

Parameterresonanzen beim durchströmten geraden Rohr

O. Becker

1. Einleitung

Bei einer genaueren Modellierung der Eigenschaften von Rohrleitungen ist auch der Einfluß des im Rohr strömenden Mediums zu erfassen, da er zu qualitativen Veränderungen im dynamischen Verhalten führen kann. Seit Beginn der fünfziger Jahre ist das durchströmte Rohr daher Gegenstand theoretischer und experimenteller Untersuchungen. Über Modelle, Lösungsverfahren und Ergebnisse wird in [1] bis [4] berichtet.

In der Mehrzahl der Untersuchungen werden Druck und Strömungsgeschwindigkeit als zeitunabhängig vorausgesetzt und es wird die kritische Geschwindigkeit V_{krit} des Mediums bestimmt, bei der das Rohr seine Stabilität verliert. Bei Metallrohren liegt V_{krit} jedoch i. a. weit oberhalb der auftretenden Nenngeschwindigkeiten (vgl. [27]) und ist daher ohne praktische Bedeutung.

Den zeitunabhängigen Anteilen von Druck und Strömungsgeschwindigkeit sind jedoch stets mehr oder weniger ausgeprägte, aus vielfachen Ursachen herrührende Pulsationen überlagert. Dominiert der Einfluß der periodisch arbeitenden Antriebsaggregate, so können sie näherungsweise als periodische Funktionen der Zeit betrachtet werden und das durchströmte Rohr stellt ein deterministisch parametererregtes System dar. Beim Arbeiten des Rohres in einem der Parameterresonanzbereiche ergeben sich nach einem linearisierten Modell trotz vorhandener Dämpfung exponentiell wachsende Lösungen. Nichtlinearitäten des realen Systems werden sie zwar begrenzen, doch wird das Rohr i. a. noch mehr oder weniger heftige Schwingungen ausführen, so daß die Gefahr eines vorzeitigen Versagens vor allem durch Werkstoffermüdung besteht. Da Parameterresonanzen bereits bei kleinen Nenngeschwindigkeiten des Mediums möglich sind, ist ihrer Bestimmung und Vermeidung erhöhte Aufmerksamkeit zu widmen.

In [5] bis [8] werden nur Druckpulsationen, in [9] bis [15] nur Geschwindigkeitspulsationen, in [16] bis [27] gekoppelte Druck- und Geschwindigkeitspulsationen zugrundegelegt. Das Rohr wird u. a. als gelenkig-gelenkig, eingespannt-gelenkig, eingespannt-eingespannt oder eingespannt-frei, in [14], [16], [21], [22], [24] als teilweise elastisch gelagert betrachtet; in [15] wird der Durchlaufträger, in [6] das unendlich lange Rohr untersucht. Unterschiede in den Modellen bestehen ferner hinsichtlich der berücksichtigten Vorbelastung und Dämpfung.

Durch Zurückführung des Problems auf eine Mathieu'sche Dgl. ([5] bis [8], [10], [11], [13]) bzw. durch Ansetzen der Lösungen auf den Grenzflächen als periodische Funktionen ([9], [12], [14] bis [22]) werden nur

einfache Parameterresonanzen erhalten. Aus einem System Hillscher Dgl. und seiner charakteristischen Exponenten bzw. Multiplikatoren werden in [22], [24], [27] einfache Parameterresonanzen und Kombinationsresonanzen bestimmt. Beide Resonanzarten ergeben sich in [12] bzw. [25] bis [27] für kleine Pulsationen nach der Methode von Hsu bzw. Mettler. Über experimentelle Ergebnisse wird in [23] berichtet.

Einerseits erhält man auf Grund des verwendeten Modells oder Lösungsverfahrens nur ein unvollständiges Bild über das Resonanzverhalten des Rohres. Andererseits sind die numerischen, alle Resonanzarten liefernden Verfahren rechenzeitintensiv und Änderungen von Systemgrößen sind nur beschränkt verfolgbar. Diese Frage spielt aber bei der Beurteilung des Resonanzverhaltens und der Vermeidung der Resonanzbereiche eine wichtige Rolle.

Bei einer Vielzahl praktisch auftretender Fälle ist die Nenngeschwindigkeit klein gegen V_{krit} , liegt schwache Dämpfung vor und sind die Pulsationen klein gegenüber den konstanten Anteilen. Unter diesen Voraussetzungen werden bei beliebig periodischen Druck- und Geschwindigkeitspulsationen Näherungsformeln für die Hauptstabilitätsbereiche bei einfacher Parameterresonanz und bei Kombinationsresonanz hergeleitet. Die damit erhaltenen Ergebnisse werden für den Zweistützträger und den Kragträger mit denen aus der Literatur verglichen.

2. Mathematisches Modell

2.1. Bewegung des Mediums

Die Bewegung des inkompressiblen, reibungsfreien Mediums wird durch ein eindimensionales Strömungsmodell beschrieben. Der Vektor der Relativgeschwindigkeit ist stets tangential zur verformten Rohrachse gerichtet und die Rückwirkung der Rohrbewegung wird vernachlässigt. Die Bewegungs- bzw. Kontinuitätsgleichung lautet damit

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_F \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial z} \right) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

Bei $z = L$ strömt das Medium in ein Reservoir, in dem ein i. a. zeitabhängiger Druck herrscht. Als Lösung von (1) folgt

$$V(t) = V_0 + \mu V_1 \Phi(t),$$

$$p(z,t) = p_0 + \mu p_1 \Psi(t) + \mu \rho_F V_1 (L-z) \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (2)$$

mit den konstanten Größen V_0, V_1, p_0, p_1 und den beliebigen Funktionen Φ, Ψ . Es ist ρ_F die Dichte des Mediums und μ eine reelle Zahl, welche die Größenordnung der Pulsationen in Bezug auf die konstanten Anteile kennzeichnet. Im weiteren sind Φ und Ψ periodisch mit der Periode $T = 2\pi/\Omega$, der Pulsationskreisfrequenz Ω

und den konvergenten Fourierreihen

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \sum_{s=1}^{\infty} [\varphi_s \cos(s\Omega t) + \bar{\varphi}_s \sin(s\Omega t)], \\ \Psi(t) &= \sum_{s=1}^{\infty} [\psi_s \cos(s\Omega t) + \bar{\psi}_s \sin(s\Omega t)].\end{aligned}\quad (3)$$

Nach (2) sind mit $p_1 \neq 0, V_1 = 0$ reine Druckpulsationen gemäß [5] bis [8] möglich; reine Geschwindigkeitspulsationen entsprechend [9] bis [15] würden $V_1 \neq 0$ und $p_1 = V_1 = 0$ erfordern und sind daher nicht möglich. In [16] bis [27] wird der Fall $V_1 \neq 0, p_1 = 0$ zugrundegelegt, während der Fall $V_1 \neq 0, p_1 \neq 0$ noch nicht betrachtet wurde.

2.2. Bewegung des Rohres

Das Rohr konstanten Querschnitts wird als Euler-Bernoulli-Balken mit viskoelastischem Material vom Kelvin-Voigt-Typ, elastischer Querbettung und geschwindigkeitsproportionaler äußerer Dämpfung betrachtet. Die Einströmstelle $z = 0$ ist längs und quer unverschieblich gelagert; weitere vorhandene Bindungen sind starr. An der axial verschieblichen Ausströmstelle $z = L$ greifen die Druckkräfte R_1 (richtungstreu) und T_1 (körperstreu) an; in positiver z -Richtung wirkt eine konstante, richtungstreuere Streckenlast r_{10} , die für das vertikale Rohr als Eigenlast von Rohr und Medium deutbar ist.

Der Einfluß des im Rohr strömenden Mediums kommt über die Fliehkraft, die Corioliskraft und den Mediendruck zur Wirkung. Seine korrekte Erfassung ist erst im Rahmen einer Theorie zweiter Ordnung möglich; vgl. [27]. Die Bewegungsgleichung des Rohres – einschließlich eines Terms T_{zus} – und die Randaussagen lauten:

$$EI \frac{\partial^4}{\partial z^4} (w + k_E \frac{\partial w}{\partial t}) + k \frac{\partial w}{\partial t} + (\mu_R + \mu_F) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + r_{10} \frac{\partial}{\partial z} [(z-L) \frac{\partial w}{\partial z}] + Bw + 2\mu_F V \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} \quad (4)$$

$$+ (R_1 + T_1 + pA_F + \mu_F V^2) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + T_{zus} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \text{ oder } EI \frac{\partial^2}{\partial z^2} (w + k_E \frac{\partial w}{\partial t}) = 0 \\ w = c \end{aligned} \right\} \text{in } z = 0 \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \text{ oder } EI \frac{\partial^2}{\partial z^2} (w + k_E \frac{\partial w}{\partial t}) = 0 \\ w = 0 \text{ oder } EI \frac{\partial^3}{\partial z^3} (w + k_E \frac{\partial w}{\partial t}) + R_1 \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right\} \text{in } z = L$$

Neben bereits erklärter Größen bedeuten: EI – Biegesteifigkeit, A_F – lichter Rohrquerschnitt, μ_R bzw. μ_F – Masse pro Längeneinheit des Rohres bzw. Mediums, B – Bettungskonstante, L – Rohrlänge, k_E bzw. k – Koeffizient der Werkstoff- bzw. äußeren Dämpfung, w – Biegeauslenkung der Rohrachse, z – Ortskoordinate, t – Zeit.

In [5] bis [27] werden nur Spezialfälle von (2) bis (4) betrachtet; [21], [22], [24] ist bezüglich (5) allgemeiner. Inkorrekte Gleichgewichtsbetrachtungen führen bei [9], [12], [14], [15], [18], [20] zu einem fehlerhaften Zusatzterm T_{zus} ; er wurde in (4) mit aufgenommen, um seine Auswirkungen zu verfolgen:

$$T_{zus} = \begin{cases} 0 & \text{für korrekte Gl. (4)} \\ \mu_F \frac{dV}{dt} \frac{\partial w}{\partial z} & \text{für fehlerhafte Gl. (4)} \end{cases} \quad (6)$$

Den Beziehungen (4), (5) ist mit (2), (6) der Ausdruck

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\{ (w'' + \kappa_E \dot{w}'') \delta w'' + [\kappa \dot{w} + \ddot{w} + \rho w \right. \\ \left. + 2\beta c (\alpha_0 + \alpha_1 \mu \Phi) \dot{w}' + (\gamma + \alpha_1 \beta_f \mu \Phi^*) w' \right. \\ \left. + f_{ges} w'' \right\} dx - f_R w'(1) \delta w(1) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

mit

$$\begin{aligned} f_{ges} = f_R + f_T - \gamma(1-x) + (\alpha_0 + \alpha_1 \mu \Phi)^2 \\ + \pi_0 + \pi_1 \mu \Psi + (1-x)\alpha_1 \beta_p \mu \Phi^* \end{aligned} \quad (8)$$

gleichwertig. Striche bzw. Punkte bezeichnen partielle Ableitungen nach x bzw. τ . Es wurden folgende einheitenfreie Größen eingeführt:

$$\begin{aligned} x &= z/L, & \tau &= L^{-2} \sqrt{EI/(\mu_R + \mu_F)} \cdot t \\ \alpha_0 &= V_0 L \sqrt{\mu_F/(EI)}, & \alpha_1 &= V_1 L \sqrt{\mu_F/(EI)} \\ \pi_0 &= p_0 A_F L^2/(EI), & \pi_1 &= p_1 A_F L^2/(EI) \\ f_R &= R_1 L^2/(EI), & f_T &= T_1 L^2/(EI) \\ \gamma &= r_{10} L^3/(EI), & \rho &= BL^4/(EI) \\ \kappa &= kL^2/\sqrt{EI(\mu_R + \mu_F)}, & \kappa_E &= k_E L^{-2} \sqrt{EI/(\mu_R + \mu_F)} \\ \omega &= \Omega L^2 \sqrt{(\mu_R + \mu_F)/(EI)}, & \beta &= \sqrt{\mu_F/(\mu_R + \mu_F)} \end{aligned} \quad (9)$$

Die Pulsationen sind bereits durch $\mu\Phi$ bzw. $\mu\Psi$ erfaßt, so daß man $\alpha_1 = \alpha_0$ und $\pi_1 = \pi_0$ setzen könnte. Die Größe β wurde bei dem aus der Coriolisbeschleunigung herrührenden Term mit β_c , bei den aus den Geschwindigkeitspulsationen resultierenden Druckpulsationen mit β_p und beim fehlerhaften Zusatzterm mit β_f bezeichnet. Bei korrekter Bewegungsgleichung und Beachtung der Kopplung zwischen Geschwindigkeits- und Druckpulsationen ist $\beta_c = \beta_p = \beta$ und $\beta_f = 0$ zu setzen. Die unterschiedlichen Bezeichnungen werden beibehalten, um die Einflüsse getrennt zu verfolgen.

2.3. Diskretisiertes Ersatzsystem

Das elastische Kontinuum Rohr wird durch

$$w(x, \tau) \approx \sum_{j=1}^N v_j(x) q_j(\tau) \quad (10)$$

auf ein System mit N Freiheitsgraden reduziert. Mit den Eigenwerten λ_j bzw. Eigenkreisfrequenzen $\omega_{j0} = \lambda_j^2$ (im Rohr ruhendes Medium, keine Dämpfung, keine Vorbelastung) gilt:

$$\begin{aligned} v_j'''' - \lambda_j^4 v_j &= 0 \\ \left. \begin{aligned} v_j' &= 0 \quad \text{oder} \quad v_j'' = 0 \\ v_j &= 0 \end{aligned} \right\} & \text{in } x = 0 \\ \left. \begin{aligned} v_j' &= 0 \quad \text{oder} \quad v_j'' = 0 \\ v_j &= 0 \quad \text{oder} \quad v_j''' = 0 \end{aligned} \right\} & \text{in } x = L \end{aligned} \quad (11)$$

Mit (10), (11) folgt aus (7), (8) das Dgl.-System

$$\ddot{q}_i + \omega_{i0}^2 q_i + \sum_{j=1}^N [b_{ij} \dot{q}_j + c_{ij} q_j] = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (12)$$

mit den periodischen Koeffizienten

$$b_{ij}(\tau) = (\kappa + \kappa_E \omega_{i0}^2) \delta_{ij} + 2\beta c (\alpha_0 + \alpha_1 \mu \Phi) u_{ij}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} c_{ij}(\tau) &= \rho \delta_{ij} + \gamma (u_{ij} - p_{ij}) + f_R (r_{ij} - z_{ij}) \\ &+ [f_T + \pi_0 + \pi_1 \mu \Psi + (\alpha_0 + \alpha_1 \mu \Phi)^2] r_{ij} \\ &+ \alpha_1 (\beta_p p_{ij} + \beta_f u_{ij}) \mu \Phi^* \end{aligned} \quad (14)$$

und den Abkürzungen

$$\begin{aligned} u_{ij} &= \frac{1}{c_i} \int_0^1 v_i v_j' dx, \quad r_{ij} = \frac{1}{c_i} \int_0^1 v_i v_j'' dx \\ p_{ij} &= \frac{1}{c_i} \int_0^1 (1-x) v_i v_j'' dx, \quad z_{ij} = \frac{1}{c_i} v_i(1) v_j'(1) \\ c_i &= \int_0^1 v_i^2 dx, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

Für (13), (14) existieren mit (3) die Fourierreihen

$$b_{ij}(\tau) = b_{ij}^{(0)} + \mu \sum_{s=1}^{\infty} [b_{ij}^{(s)} \cos(s\omega\tau) + \bar{b}_{ij}^{(s)} \sin(s\omega\tau)], \quad (16)$$

$$c_{ij}(\tau) = c_{ij}^{(0)} + \mu \sum_{s=1}^{\infty} [c_{ij}^{(s)} \cos(s\omega\tau) + \bar{c}_{ij}^{(s)} \sin(s\omega\tau)]$$

mit den Koeffizienten

$$b_{ij}^{(0)} = (\kappa + \kappa_E \omega_{i0}^2) \delta_{ij} + 2\alpha_0 \beta c u_{ij}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} b_{ij}^{(s)} &= 2\alpha_1 \beta c u_{ij} \varphi_s, \\ \bar{b}_{ij}^{(s)} &= 2\alpha_1 \beta c u_{ij} \varphi_s, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} c_{ij}^{(0)} &= \rho \delta_{ij} + \gamma (u_{ij} - p_{ij}) + f_R (r_{ij} - z_{ij}) + \\ &+ (f_T + \pi_0 + \alpha_0^2) r_{ij}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} c_{ij}^{(s)} &= 2\alpha_0 \alpha_1 r_{ij} \varphi_s + \alpha_1 \Omega_0 (\beta_p p_{ij} + \beta_f u_{ij}) \bar{\varphi}_s + \\ &+ \pi_1 r_{ij} \psi_s, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \bar{c}_{ij}^{(s)} &= 2\alpha_0 \alpha_1 r_{ij} \bar{\varphi}_s - \alpha_1 \Omega_0 (\beta_p p_{ij} + \beta_f u_{ij}) \varphi_s + \\ &+ \pi_1 r_{ij} \bar{\psi}_s. \end{aligned}$$

Die Näherungsformeln in 3.1 beruhen u. a. auf einem Störungsansatz in μ bei Berücksichtigung der Glieder bis zur ersten Potenz, so daß mit Ω_0 nach (23) in (20) bereits folgende Näherungen verwendet wurden:

$$\omega \approx \Omega_0, \quad (\alpha_0 + \alpha_1 \mu \Phi)^2 \approx \alpha_0^2 + 2\alpha_0 \alpha_1 \mu \Phi \quad (21)$$

3. Hauptinstabilitätsbereiche

3.1. Näherungsformeln für die Grenzkurven

Die Terme mit ρ , γ , f_R , f_T , π_0 , α_0^2 seien hinreichend klein, so daß sie als schwache Vorbelastung des Rohres deutbar sind; dies ist im wesentlichen identisch mit der Bedingung $V_0 \ll V_{krit}$. Es liege schwache Dämpfung vor, d. h. κ , $\kappa_E \ll 1$, und es erfolgt eine Beschränkung auf kleine Pulsationen, d. h. $\mu \ll 1$. Damit beschreibt (12) bis (14) das Verhalten eines deterministisch schwach parametererregten, schwach gedämpften Systems mit schwacher Vorbelastung. Hierfür haben i. a. nur noch die sog. Hauptinstabilitätsbereiche (HIB) praktische Bedeutung. Ihre Grenzkurven in der $\mu\omega$ -Ebene ergeben sich nach der Methode von Mettler [28] in über modifizierten Darstellung gemäß [27], [29] für $\mu_{min} \leq \mu \leq 1$ näherungsweise als

$$\omega_G^{(s)}(\mu) = [\Omega_0 + A + C\mu^2 \pm \sqrt{D^2\mu^4 + B^2(\mu^2 - E^2)}] / s \quad (22)$$

mit den Abkürzungen

$$\Omega_0 = \omega_{i0} + \omega_{j0}, \quad A = (K_i + K_j)/2 \quad (23)$$

$$B = \frac{D_i + D_j}{4\sqrt{D_i D_j}} \sqrt{\Gamma_{ij}}, \quad E = 2\sqrt{\frac{D_i D_j}{\Gamma_{ij}}} \quad (24)$$

$$C = \frac{-D_i + D_j}{16 D_i D_j} \Delta_{ij}, \quad D = \frac{D_i + D_j}{16 D_i D_j} \Delta_{ij} \quad (25)$$

$$K_i = c_{ii}^{(0)} / \omega_{i0}, \quad K_j = c_{jj}^{(0)} / \omega_{j0} \quad (26)$$

$$D_i = b_{ii}^{(0)}, \quad D_j = b_{jj}^{(0)} \quad (27)$$

und dem Schwellwert

$$\mu_{min} = \sqrt{\frac{1}{2D^2} [-B^2 + \sqrt{B^4 + 4(DBE)^2}]} \quad \text{für } \Delta_{ij} \neq 0, \quad (28)$$

$$\mu_{min} = E \quad \text{für } \Delta_{ij} = 0. \quad (29)$$

Mit den Amplituden Φ_s , Ψ_s und Phasenwinkeln σ_s , τ_s wird

$$\varphi_s = \Phi_s \cos \sigma_s, \quad \bar{\varphi}_s = \Phi_s \sin \sigma_s, \quad (30)$$

$$\psi_s = \Psi_s \cos \tau_s, \quad \bar{\psi}_s = \Psi_s \sin \tau_s$$

und mit (18), (20) folgt nach [29]:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij} = & \left\{ \pi_1^2 \Psi_s^2 r_{ij} r_{ji} + \alpha_1^2 \Phi_s^2 [4 \alpha_o^2 r_{ij} r_{ji} \right. \\ & + (\beta_p \Omega_o p_{ij} - 2 \beta_c \omega_{jo} u_{ij} + \beta_f \Omega_o u_{ij}) \\ & \cdot (\beta_p \Omega_o p_{ji} - 2 \beta_c \omega_{io} u_{ji} + \beta_f \Omega_o u_{ji})] \\ & + \alpha_1 \pi_1 \Phi_s \Psi_s \cos(\sigma_s - \tau_s) \cdot 4 \alpha_o r_{ij} r_{ji} \\ & + \alpha_1 \pi_1 \Phi_s \Psi_s \sin(\sigma_s - \tau_s) \\ & \cdot [r_{ij} (\beta_p \Omega_o p_{ji} - 2 \beta_c \omega_{io} u_{ji} + \beta_f \Omega_o u_{ji}) \\ & \left. + r_{ji} (\beta_p \Omega_o p_{ij} - 2 \beta_c \omega_{jo} u_{ij} + \beta_f \Omega_o u_{ij}) \right\} / (\omega_{io} \omega_{jo}) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{ij} = & \alpha_1 \Phi_s [2 \alpha_o \alpha_1 \Phi_s + \pi_1 \Psi_s \cos(\sigma_s - \tau_s)] \\ & \cdot [r_{ij} (\beta_p \Omega_o p_{ji} - 2 \beta_c \omega_{io} u_{ji} + \beta_f \Omega_o u_{ji}) \\ & - r_{ji} (\beta_p \Omega_o p_{ij} - 2 \beta_c \omega_{jo} u_{ij} + \beta_f \Omega_o u_{ij})] / (\omega_{io} \omega_{jo}) \end{aligned} \quad (32)$$

Ein durch (22) bis (32) beschriebener HIB bezieht sich auf die Parameterresonanz der s-ten Harmonischen von (3) mit ω_{io} bzw. ω_{jo} und die Beziehungen gelten für

- einfache Parameterresonanzen E_1^{ii} mit $i = j$,
- Kombinationsresonanzen S_1^{ij} vom Summentyp mit $i > j$,
- Kombinationsresonanzen D_1^{ij} vom Differenztyp mit $i > j$ bei Ersetzung von ω_{jo} durch $-\omega_{jo}$ und unverändertem ω_{io} .

Bei bekannter oberer Schranke μ_{max} folgen nach Bild 1 die zur Vermeidung von Parameterresonanzen auszuschließenden Bereiche der Pulsationskreisfrequenz als

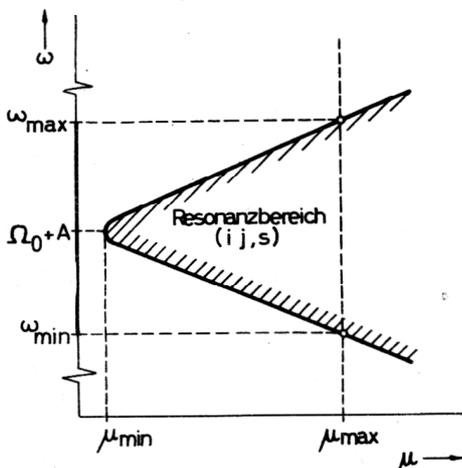


Bild 1
Auszuschließende ω -Bereiche

$$\omega \notin [\omega_{min}, \omega_{max}]_{ij,s} \quad (33)$$

für alle ij, s mit $\mu_{min} \leq \mu_{max}$ und

$$\begin{aligned} & \omega_{min} \\ & \omega_{max} \\ & = [\Omega_o + A + C \mu_{max}^2 \pm \sqrt{D^2 \mu_{max}^4 + B^2 (\mu_{max}^2 - E^2)}] / s. \end{aligned} \quad (34)$$

3.2. Diskussion der Ergebnisse

Einfluß der Vorbelastung

Der Lageparameter Ω_o bestimmt die Fußpunkte der HIB des dämpfungsfreien, nicht vorbelasteten Rohres. Die schwache Vorbelastung kommt über den Lageparameter A zum Ausdruck, wobei nur die konstanten Anteile der Elemente in der Hauptdiagonale von $\{c_{ij}\}$ eingehen. Die Fußpunkte der HIB des dämpfungsfreien, schwach vorbelasteten Rohres sind damit durch $\Omega_o + A$ gegeben.

Mit $u_{ii} > p_{ii}$, $z_{ii} > r_{ii}$ werden alle HIB durch die elastische Bettung ρ durch die Eigenlast $\gamma > 0$ (hängendes Rohr) stets zu größeren ω -Werten, durch die Eigenlast $\gamma < 0$ (stehendes Rohr) und durch die richtungstreue Druckkraft f_R stets zu kleineren ω -Werten verschoben. Die Richtung der Verschiebung der HIB infolge der körpertreuen Druckkraft f_T , des konstanten Druckanteils π_o und des konstanten Fliehkraftanteils α_o^2 hängt vom Vorzeichen von r_{ii} und damit vom Lagerungsfall ab.

Einfluß der Dämpfung

Die Formparameter B, E, C, D werden i. a. auch durch die Dämpfung beeinflusst, wobei nur die konstanten Anteile der Elemente in der Hauptdiagonale von $\{b_{ij}\}$ eingehen. Diese setzen sich aus der äußeren Dämpfung κ , der Werkstoffdämpfung $\kappa_E \omega_{io}^2$ und der durch die Coriolisbeschleunigung bedingten Strömungsdämpfung $2 \alpha_o \beta_c u_{ii}$ zusammen. Mit $u_{ii} \geq 0$ wird letztere bei $\alpha_o \geq 0$ nicht negativ, verschwindet jedoch für alle Lagerungsfälle mit $v_1(1) = 0$. Die Werkstoffdämpfung gewinnt mit wachsender Ordnung der ω_{io} stark an Einfluß; ihre Vernachlässigung führt zwar zu einfacheren Beziehungen, aber auch zu falschen Schlussfolgerungen über die Gefährlichkeit der den höheren Eigenfrequenzen zugeordneten HIB.

Einfluß der Pulsationsanteile

Bei reinen Druckpulsationen ist $\alpha_1 = 0$; es wird $C = D = 0$ und B, E unabhängig von α_o, β . Es ist B direkt und μ_{min} umgekehrt proportional zur Druckamplitude $\pi_1 \Psi_s$. Die Resonanzen E_1^{ii} existieren stets. Für Lagerungsfälle mit $v_1(1) = 0$ oder $v_1'(1) = 0$ sind zusätzlich nur die Resonanzen S_1^{ij} möglich.

Bei gekoppelten Geschwindigkeits- und Druckpulsationen ist $\pi_1 \neq 0$. Jetzt haben α_o und $\beta_p, \beta_c, \beta_f$ Einfluß auf alle Formparameter. Es wäre bei reinen Geschwindigkeitspulsationen $\beta_p = 0$, bei Vernachlässigung der Corio-

lisbeschleunigung $\beta_c = 0$, bei fehlerhafter Bewegungsgleichung $\beta_f \neq 0$. Nach (2), (6) muß jedoch $\beta_p = \beta_c = \beta$ und $\beta_f = 0$ verwendet werden; andernfalls ergeben sich fehlerhafte Aussagen über Öffnungsbreiten, Schwellwerte und die Existenz von Kombinationsresonanzen. Die Breite der HIB ist direkt und μ_{\min} umgekehrt proportional zur Geschwindigkeitsamplitude $\alpha_1 \Phi_s$. Die Resonanzen E_1^{ii} existieren stets; über das Auftreten der Resonanzen S_1^{ij} und D_1^{ij} sind nur für den konkreten Lagerungsfall Aussagen möglich.

Beim **allgemeinen Fall der Pulsationen** gemäß (2), (3) ist in den Beziehungen (31), (32) $\beta_p = \beta_c = \beta$ und $\beta_f = 0$ zu setzen. Die Formparameter hängen außer vom Lagerungsfall und von α_0 , β , κ , κ_E nun von beiden Pulsationsamplituden $\alpha_1 \Phi_s$, $\pi_1 \Psi_s$ und vom relativen Phasenwinkel $\sigma_s - \tau_s$ ab. Man kann zeigen, daß die Resonanzen E_1^{ii} stets existieren; über das Auftreten der Resonanzen S_1^{ij} und D_1^{ij} sind nur für den konkreten Fall der Lagerung und der Pulsationen Aussagen möglich.

Umkehr der Strömungsrichtung

Diese Frage tritt z. B. bei der Entleerung von Kavernen mittels Rohrtour auf und wurde in [30] für $V = \text{const.}$ untersucht. Bei unveränderten Systemgrößen ist V durch $-V$ zu ersetzen, so daß die abgeleiteten Beziehungen mit $\alpha_0 \rightarrow -\alpha_0$ und $\alpha_1 \rightarrow -\alpha_1$ gültig bleiben. Es werden Ω_0 und A nicht beeinflusst. Mit $u_{ij} \geq 0$ wirkt die „Strömungsdämpfung“ nun anfachend. Es geht Δ_{ij} in $-\Delta_{ij}$ über, während Γ_{ij} nur für $\alpha_1 \neq 0$ und $\pi_1 \neq 0$ verändert wird. Gegenüber dem ursprünglichen System wirkt eine Strömungsumkehr i. a. stabilitätsmindernd (z. B. infolge kleinerer Schwellwerte); eine Veränderung im Auftreten der Kombinationsresonanzen ist zu erwarten; genauere Aussagen sind nur im konkreten Fall möglich.

Gültigkeitsbereich der Ergebnisse

Die Gln. (22) bis (34) gelten nur für HIB unter Einhaltung der Bedingungen $\mu \ll 1$, $V_0 \ll V_{\text{krit}}$ und $\kappa, \kappa_E \ll 1$. Ein HIB wird für festes ij, s in erster Näherung nur durch die in Bild 2 markierten Elemente von $\{b_{ij}\}$ und $\{c_{ij}\}$ beeinflusst; die s -te Harmonische der Pulsationen kann unabhängig von allen anderen betrachtet werden. Die

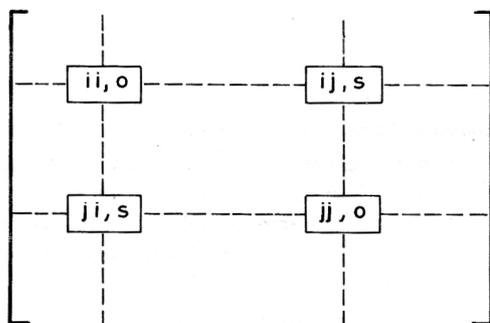


Bild 2
Einfluß der Matrixelemente auf die Resonanzbereiche für festes ij, s

Aussagen über den Einfluß der einzelnen Systemgrößen sind ebenfalls unter o. g. Bedingungen zu sehen.

Bei der Auswertung von (28), (29) können sich Schwellwerte ergeben, die der Bedingung $\mu \ll 1$ nicht genügen. Solche HIB treten erst für entsprechend große μ -Werte auf; sie sind durch (22) bis (32) nicht mehr beschreibbar, haben jedoch für schwache Parametererregung keine praktische Bedeutung. Letzteres trifft bereits für HIB zu, bei denen $\mu_{\min} > \mu_{\max}$ wird.

Vergleichsrechnungen ohne Verwendung von (21) nach der für beliebiges μ einsetzbaren Multiplikatorenmethode ergaben bis $\mu \approx 0,5$ gute und für $\mu \approx 0,5 \dots 1$ noch brauchbare Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Näherungsrechnung; vergl. auch Bilder 4 und 8.

3.3. Lagerung als Zweistützträger

Für das System nach Bild 3 wird

$$v_j(x) = \sin \lambda_j x \quad \text{mit} \quad \lambda_j = j\pi. \quad (35)$$

Die Strömungsdämpfung verschwindet; es wird $C = D = 0$ und

$$K_i = -(f_R + f_T + \pi_0 + \alpha_0^2) + \gamma/2 + \rho/(\pi^2 i^2), \quad (36)$$

$$D_i = \kappa + \kappa_E \pi^4 i^4.$$

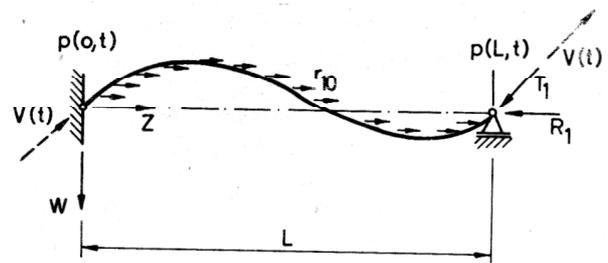


Bild 3
Das Rohr als Zweistützträger

Bei **reinen Druckpulsationen** existieren keine Kombinationsresonanzen; für die Resonanzen E_1^{ii} wird

$$\Omega_0 = 2\pi^2 i^2, \quad A = K_i, \quad (37)$$

$$B = \pi_1 \Psi_s/2, \quad \mu_{\min} = D_i/B.$$

Unter Beachtung der Voraussetzungen in 3.1. lassen sich die Ergebnisse nach [6] in (36), (37) für $\kappa_E = \gamma = 0$ überführen.

Bei **gekoppelten Geschwindigkeits- und Druckpulsationen** treten mit $\beta_p = \beta_c = \beta$, $\beta_f = 0$ keine Resonanzen D_1^{ij} auf. Für die Resonanzen E_1^{ii} wird

$$\Omega_0 = 2\pi^2 i^2, \quad A = K_i, \quad (38)$$

$$B = \alpha_1 \Phi_s \cdot \sqrt{\alpha_0^2 + \beta^2 \pi^4 i^4/4}, \quad \mu_{\min} = D_i/B.$$

Für die Resonanzen S_1^{ij} gilt mit $i > j$ und $i - j$ ungerade:

$$\Omega_0 = \pi^2 (i^2 + j^2), \quad A = (K_i + K_j)/2$$

$$B = 4\beta \frac{D_i + D_j}{\sqrt{D_i D_j}} \frac{i^2 j^2}{(i^2 - j^2)^2} \alpha_1 \Phi_s, \mu_{\min} = (D_i + D_j)/(2B) \quad (39)$$

Der Einfluß der Systemgrößen ist aus (36), (38), (39) ablesbar. Die Bilder 4 bis 6 zeigen typische Verläufe für B , μ_{\min} und die Grenzkurven. Für $i \gg 1$ (mit $j = i - 1$ bei S_1^{ij}) wird $B \sim i^2$, sowie $\mu_{\min} \sim i^2$ bei $\kappa_E \neq 0$ bzw. $\mu_{\min} \sim i^{-2}$ bei $\kappa_E = 0$; bei Vernachlässigung der Werkstoffdämpfung wird daher die Gefährlichkeit der den höheren Eigenfrequenzen zugeordneten HIB überschätzt.

Die Ergebnisse aus [26], [29] sind Spezialfälle von (38), (39). Die Aussagen in [19] über den qualitativen Einfluß der Systemgrößen bei den Resonanzen E_1^{ii} werden durch (36), (38) bestätigt; Resonanzen S_1^{ij} , D_1^{ij} wurden in [19] nicht erhalten. Der Fall $\beta_c = \beta_f = \beta$, $\beta_p = 0$ gemäß [12] liefert bei sonst gleichen Aussagen

$$B = \alpha_0 \alpha_1 \Phi_s \quad \text{für } E_1^{ii}, \quad (40)$$

$$B = \beta \frac{D_i + D_j}{\sqrt{D_i D_j}} \alpha_1 \Phi_s \quad \text{für } S_1^{ij}$$

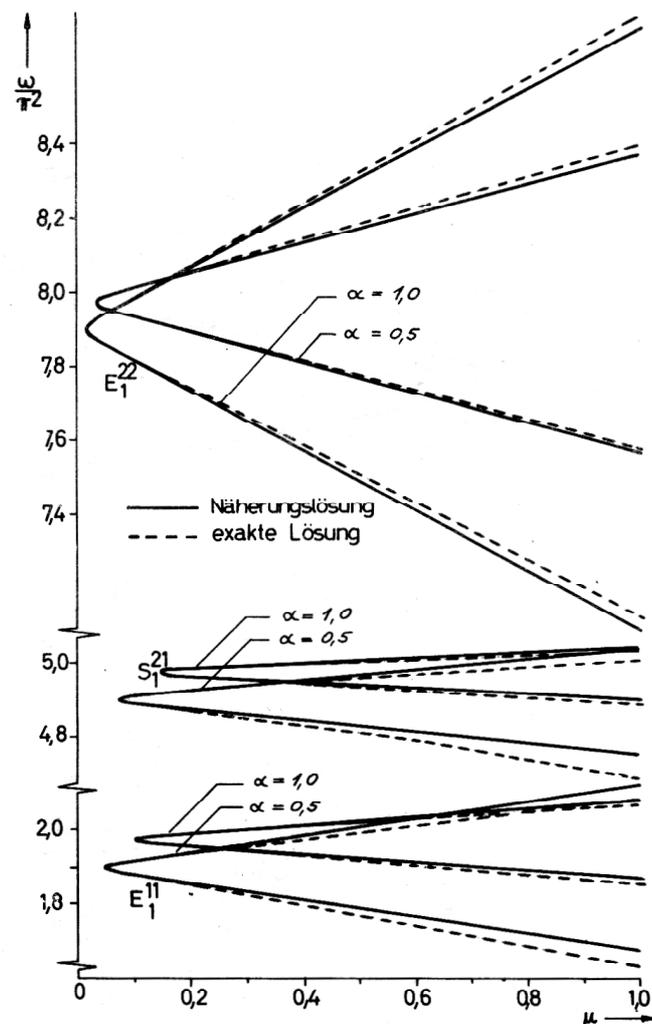


Bild 4
Hauptinstabilitätsbereiche für den Zweistützträger bei $N=2$.
($\alpha_0 = \alpha_1 = 0,5$ bzw. $1,0$; $\beta = 0,4$; $\kappa = 0,1$; $\Phi_1 = 1$; null sonst)

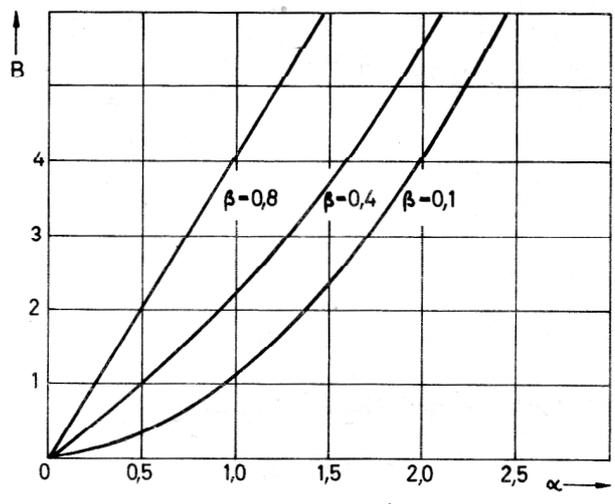


Bild 5
Öffnungsbreite des Resonanzbereiches E_1^{11} für den Zweistützträger

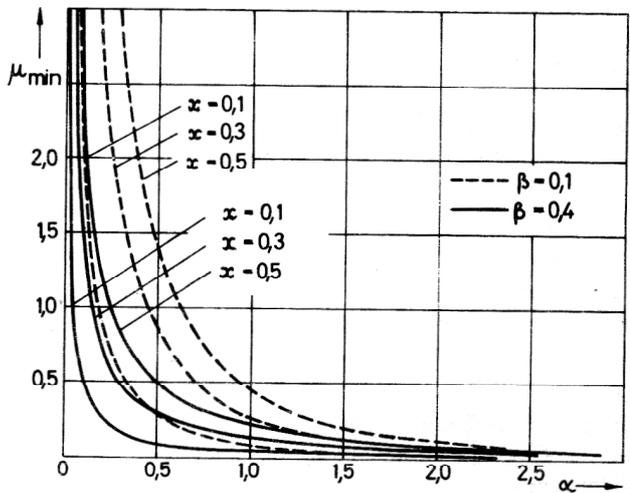


Bild 6
Schwellwert des Resonanzbereiches E_1^{11} für den Zweistützträger bei $\kappa_E = 0$

und unterschätzt damit die Gefährlichkeit aller E_1^{ii} sowie der S_1^{ij} für $0,413 i < j < i$. Resonanzen D_1^{ij} treten auch für diesen Fall im Gegensatz zu [12] nicht auf.

3.4. Lagerung als Kragträger

Für das System nach Bild 7 wird

$$v_j(x) = \lambda_j [\sin \lambda_j x - \sinh \lambda_j x - \alpha_j (\cos \lambda_j x - \cosh \lambda_j x)]/2, \quad (41)$$

$$\alpha_j = (\sinh \lambda_j + \sin \lambda_j) / (\cosh \lambda_j + \cos \lambda_j)$$

verwendet. Mit $u_{jj} = 2$ ist stets eine Strömungsdämpfung wirksam. Die Zahlenwerte für λ_j und (15) sind dem Anhang zu entnehmen. Es wird

$$K_i = [f_R (r_{ii} - z_{ii}) + (f_T + \pi_0 \alpha_0^2) r_{ii} + \gamma (2 - p_{ii}) + \rho] / \lambda_i^2, \quad (42)$$

$$D_{ii} = \kappa + \kappa_E \lambda_i^4 + 4 \alpha_0 \beta_c.$$

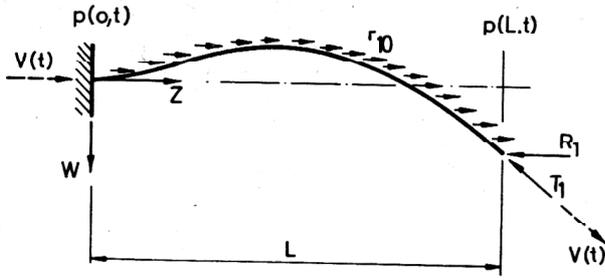


Bild 7
Das Rohr als Kragträger

Bei reinen Druckpulsationen existieren alle Resonanzarten; es ist $C = D = 0$.

Für einfache Resonanzen E_1^{ii} wird

$$\Omega_o = 2\lambda_i^2, \quad A = K_i, \quad (43)$$

$$B = \pi_1 \Psi_s r_{ii} / (2\lambda_i^2), \quad \mu_{\min} = D_i/B.$$

Für Kombinationsresonanzen S_1^{ij} bzw. D_1^{ij} wird mit $i > j$

$$\Omega_o = \lambda_i^2 \pm \lambda_j^2, \quad A = (K_i \pm K_j)/2,$$

$$B = \pi_1 \Psi_s \frac{D_i + D_j}{2\sqrt{D_i D_j}} \sqrt{\pm r_{ij} r_{ji}} / (2\lambda_i \lambda_j),$$

$$\mu_{\min} = (D_i + D_j)/(2B). \quad (44)$$

In (44) gilt das obere Vorzeichen für die Resonanzen S_1^{ij} mit $i-j$ gerade und das untere Vorzeichen für die Resonanzen D_1^{ij} mit $i-j$ ungerade. Vergleichsergebnisse aus der Literatur liegen nicht vor.

Für gekoppelte Geschwindigkeits- und Druckpulsationen sind mit $\beta_p = \beta_c = \beta$, $\beta_f = 0$ ebenfalls alle Resonanzarten möglich; es ist $C = 0$.

Für einfache Resonanzen E_1^{ii} wird

$$\Omega_o = 2\lambda_i^2, \quad A = K_i, \quad \mu_{\min} = D_i/B, \quad (45)$$

$$B = \alpha_1 \Phi_s \cdot \sqrt{\alpha_o^2 r_{ii}^2 / \lambda_i^4 + \beta^2 (2 - p_{ii})^2}, \quad D = 0.$$

Für Kombinationsresonanzen S_1^{ij} bzw. D_1^{ij} wird mit $i > j$:

$$\Omega_o = \lambda_i^2 \pm \lambda_j^2, \quad A = (K_i \pm K_j)/2, \quad (46)$$

$$\Gamma_{ij} = \pm \alpha_1^2 \Phi_s^2 \left\{ 4\alpha_o^2 r_{ij} r_{ji} + \beta^2 [(\lambda_i^2 \pm \lambda_j^2) p_{ij} \mp 2\lambda_j^2 u_{ij}] \cdot [(\lambda_i^2 \pm \lambda_j^2) p_{ji} - 2\lambda_i^2 u_{ji}] \right\} / (\lambda_i^2 \lambda_j^2), \quad (47)$$

$$\Delta_{ij} = \pm 2\alpha_o \beta \alpha_1^2 \Phi_s^2 \left\{ r_{ij} [(\lambda_i^2 \pm \lambda_j^2) p_{ji} - 2\lambda_i^2 u_{ji}] - r_{ji} [(\lambda_i^2 \pm \lambda_j^2) p_{ij} \mp 2\lambda_j^2 u_{ij}] \right\} / (\lambda_i^2 \lambda_j^2). \quad (48)$$

Die Formparameter B , E , C , D sind nach (24), (25) und μ_{\min} nach (28) zu bestimmen. In (46) bis (48) gilt das obere Vorzeichen für die Resonanzen S_1^{ij} , das untere Vorzeichen für die Resonanzen D_1^{ij} . Eine zahlenmäßige Darstellung ist für $i = 1; 2$ und $j = 1$ in [25], [27] enthalten. Für Öffnungsbreiten und Schwellwerte ergeben sich

ähnliche Verläufe wie in Bild 5 und 6; vgl. [25]. Bild 8 zeigt einen typischen Verlauf der Grenzkurven, wobei sich mit $\kappa = \kappa_E = 0$ die Strömungsdämpfung deutlich auswirkt. In Bild 9 ist μ_{\min} für $i=2; 1$ und $j=1$ dargestellt; für kleine μ tritt S_1^{21} nicht, D_1^{21} erst bei relativ großen α -Werten auf. Es wird μ_{\min} für E_1^{11} etwa doppelt so groß wie für E_1^{22} ; dies ist vermutlich die Ursache, daß in [21] bis [24] die Resonanz E_1^{11} nicht erhalten wurde. Die dortigen Aussagen über den qualitativen Einfluß der Systemgrößen werden durch (42) bis (48) bestätigt (außer den hier nicht betrachteten Federkonstanten aus [24]). Ein quantitativer Vergleich der Ergebnisse ist nicht möglich, da dort α -Werte in der Nähe von α_{krit} betrachtet wurden, wofür die Näherungsformeln nicht mehr gelten.

Außer durch die nicht verschwindende Strömungsdämpfung unterscheidet sich der Kragträger vom Zweistütträger dadurch, daß die körpertreue Vorbelastung ($f_T + \pi_o + \alpha_o^2$) den Bereich E_1^{22} zu kleineren ω -Werten, den Bereich E_1^{11} jedoch zu größeren ω -Werten verschiebt. Damit wird auch die Eigenschaft des Kragträgers in erster Näherung richtig wiedergegeben, daß ω_2 durch eine solche Belastung verkleinert, ω_1 aber vergrößert wird, und $\omega_2 = \omega_1$ die kritische Geschwindigkeit bestimmt.

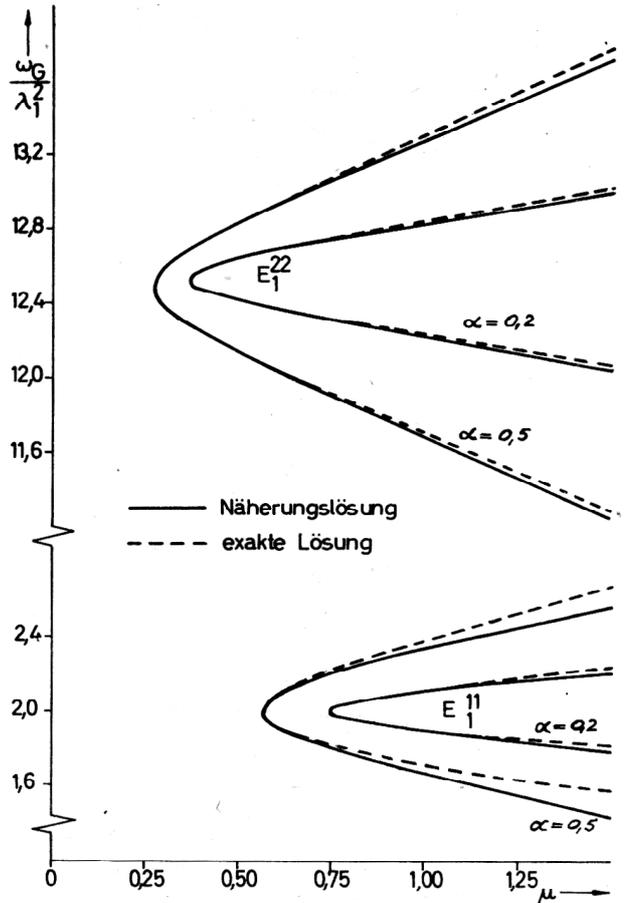


Bild 8
Hauptinstabilitätsbereiche für den Kragträger bei $N = 2$
($\alpha_o = \alpha_1 = 0,2$ bzw. $0,5$; $\beta = 0,4$; $\Phi_1 = 1$; null sonst)

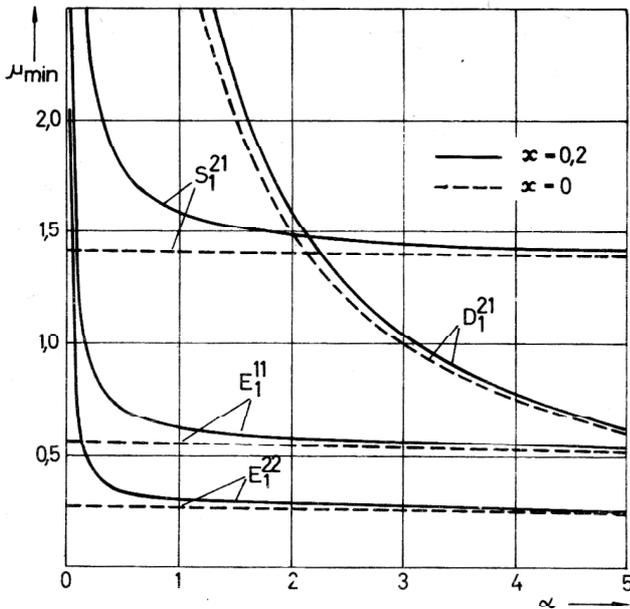


Bild 9
Schwellwerte der Resonanzbereiche für den Kragträger bei $N = 2$
($\alpha_0 = \alpha_1 = 0,5$; $\beta = 0,4$; $\kappa = 0,2$ bzw. 0 ; $\Phi_1 = 1$; null sonst)

4. Zusammenfassung und Ausblick

Den Untersuchungen liegt ein Balkenmodell für das gerade Rohr und ein Fadenmodell für das strömende Medium zugrunde. Bei beliebig periodischen Geschwindigkeits- und Druckpulsationen des Mediums wird die Bewegung des Rohres nach entsprechender Diskretisierung durch ein System Hillscher Dgl. beschrieben. Für den praktisch wichtigen Fall kleiner Pulsationen, schwacher Dämpfung und kleiner Vorbelastung wurden Näherungsformeln für die Grenzkurven der Hauptinstabilitätsbereiche bei einfacher Parameterresonanz und bei Kombinationsresonanz erhalten. Aus ihnen ist der Einfluß der Systemgrößen auf Lage und Form dieser Bereiche explizit entnehmbar. Die Näherungsformeln gestatten bei vorgegebener oberer Schranke für die Pulsationen die Berechnung der zur Vermeidung von Parameterresonanzen auszuschließenden Bereiche der Pulsationskreisfrequenz.

Eine Anwendung des Verfahrens auf das gekrümmte Rohr und auf Rohrleitungen ist möglich, nachdem die geeignet diskretisierten Bewegungsgleichungen in ein schwach gekoppeltes Dgl.-System transformiert wurden.

Die Annahme periodischer Pulsationen stellt nur eine relativ grobe Näherung für die Bewegung des Mediums im Rohr dar. Aufgrund der Vielzahl sich überlagernder, nicht völlig bekannter Einflüsse erscheint die Beschreibung der Pulsationen durch ein stochastisches Modell wirklichkeitsgetreuer. Eine stochastische Betrachtung wird ebenfalls bei Mehrphasenströmungen notwendig werden. Die Erweiterung der Untersuchungen auf die genannten Problemkreise sollte vorgenommen werden, um genauere Aussagen über das dynamische Verhalten durchströmter Rohre zu erhalten.

LITERATUR

- [1] Mote, C. D. Jr.: Dynamic stability of axially moving materials. The Shock and Vibration Digest 4 (1972) H. 4, S. 2 – 11.
- [2] Chen, S. S.: Parallel flow-induced vibrations and instabilities of cylindrical structures. The Shock and Vibration Digest 6 (1974), H. 10, S. 2 – 12.
- [3] Becker, O.: Schwingungs- und Stabilitätsverhalten des durchströmten Rohres. Kernenergie 23 (1980) H. 10, S. 337 – 342.
- [4] Becker, O.: Das durchströmte Rohr – Literaturbericht. Wiss. Berichte IH Zittau (1980), IHZ-M-80-212.
- [5] Roth, W.: Knicken von Rohren durch Innendruck. Ölhydraulik und Pneumatik 5 (1961) H. 9, S. 307 – 313.
- [6] Roth, W.: Instabilität durchströmter Rohre. Ing.-Archiv 33 (1964) H. 5, S. 236 – 263.
- [7] Roth, W.: Schwingungen und Knickprobleme flüssigkeitsdurchströmter Rohrleitungen. VDI-Berichte 113 (1967), S. 19 – 23.
- [8] Kovrevskij, A. P.: Kolebanija v sisteme vodovodov GES. Gidravličeskije mašiny 2 (1968), S. 44 – 48.
- [9] Bobezsko, A.: Sprezyste fale gietne w nieskonczonyj rurze przy przepływie płynu niesściśliwego. Rozprawy inżynierskie 11 (1963) H. 1, S. 165 – 177.
- [10] Svetlickij, V. A.: Statika, ustojčivost' i male kolebanija gibkich steržnej, zapolnennyh dvizhuščesja ideal'noj nesžimaemoj židkosti. Rasčety na pročnosť 14 (1969), S. 332 – 351.
- [11] Kataev, V. P.: Dinamičeskaja ustojčivost' truboprovodov s protekajuščej židkost'ju. Sbornik naučnych trudov mehaničeskogo fakul'teta KPI, Krasnojarsk 1970, S. 81 – 84.
- [12] Chen, S. S.: Dynamic stability of a tube conveying fluid. Journal of the Engineering Mechanics Division (1971), S. 1469 – 1485.
- [13] Ličikov, V. M.: K voprosu ob ustojčivosti i kolebanijach truboprovoda pri pul'sirujuščem karaktere dvizenija židkosti. Rasčety na pročnosť 17 (1976), S. 240 – 242.
- [14] Singh, K., Mallik, A. K.: Use of dynamic absorbers to control parametric instabilities of a pipe. Journal of Applied Mechanics 45 (1978), S. 949 – 951.
- [15] Singh, K., Mallik, A. K.: Parametric instabilities of a periodically supported pipe conveying fluid. Journal of Sound and Vibration 62 (1979) H. 3, S. 379 – 397.
- [16] Kondrašov, N. S.: Parametričeskije kolebanija truboprovodov na uprugo-dempfirujuščich oporach, vysywaemye pul'sirujuščim potokom. Rasšejanie energii pri kolebanijach uprugich sistem, Kiev 1968, S. 427 – 433.
- [17] Kataev, V. P.: Dinamičeskaja ustojčivost' truboprovoda s potokom židkosti. Dinamika i pročnosť mašin 11 (1976), S. 116 – 120.
- [18] Kataev, V. P.: Dinamičeskaja ustojčivost' truboprovodov s pul'sirujuščim potokom židkosti. Avtoreferat Dissertacii, Novosibirsk 1971.
- [19] Ginsberg, J. H.: The dynamic stability of a pipe conveying a pulsatile flow. International Journal of Engineering Science 11 (1973) H. 9, S. 1013 – 1024.
- [20] Kovrevskij, A. P.: O dinamičeskoj ustojčivosti prjamyh truboprovodov. Dinamika i pročnosť mašin 19 (1974), S. 127 – 133.
- [21] Paidoussis, M. P., Issid, N. T.: Dynamic stability of pipes conveying fluid. Journal of Sound and Vibration 33 (1974) H. 3, S. 267 – 294.
- [22] Paidoussis, M. P., Sundararajan, C.: Parametric and combination resonances of a pipe conveying pulsating fluid. Journal of Applied Mechanics 42 (1975), S. 780 – 784.
- [23] Paidoussis, M. P., Issid, N. T.: Experiments on parametric resonance of pipes containing pulsatile fluid. Journal of Applied Mechanics 43 (1976), S. 198 – 202.
- [24] Noah, S. T., Hopkins, G. R.: Dynamic stability of elastically supported pipes conveying pulsating fluid. Journal of Sound and Vibration 71 (1980) H. 1, S. 103 – 116.

- [25] Becker, O.: Parameterresonanzen des geraden durchströmten Rohres bei Lagerung als Kragträger. Wiss. Berichte IH Zittau (1982), IHZ-M-82-398.
- [26] Becker, O.: Parameterresonanzen des durchströmten geraden Rohres bei Lagerung als Zweistützträger. Maschinenbautechnik, im Druck.
- [27] Becker, O.: Lineare Stabilitätstheorie des räumlich schwach gekrümmten Trägers mit Anwendung auf das durchströmte Rohr. Dissertation, TH Magdeburg 1982.
- [28] Schmidt, G.: Parametererregte Schwingungen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1975, S. 148 - 154.
- [29] Becker, O.: Näherungsweise Ermittlung der Hauptinstabilitätsbereiche deterministisch schwach parametererregter Systeme. Wiss. Berichte IH Zittau (1982), IHZ-M-82-397.
- [30] Mahrenholtz, O.: Das Stabilitätsverhalten des durchströmten, frei hängenden Rohres. PFLÜGER-Festschrift, TU Hannover (1977), S. 173 - 182.

Anhang

Eigenwerte und Abkürzungen (15) für den Kragträger bei $N = 4$

$$\{\lambda_i\} = \begin{bmatrix} 0.187510E 01 & 0.469410E 01 & 0.785476E 01 & 0.109955E 02 \end{bmatrix}$$

$$\{u_{ij}\} = \begin{bmatrix} 0.200000E 01 & -0.858801E 01 & 0.116462E 02 & -0.177340E 02 \\ 0.420888E 00 & 0.199997E 01 & -0.106122E 02 & 0.807133E 01 \\ 0.700774E-01 & 0.130292E 01 & 0.200000E 01 & -0.114254E 02 \\ 0.278333E-01 & 0.258478E 00 & 0.298014E 01 & 0.200000E 01 \end{bmatrix}$$

$$\{r_{ij}\} = \begin{bmatrix} 0.858245E 00 & -0.211895E 02 & 0.844868E 02 & -0.160949E 03 \\ 0.103848E 01 & -0.132941E 02 & -0.154221E 02 & 0.725246E 02 \\ 0.508372E 00 & 0.189341E 01 & -0.459043E 02 & -0.116588E 02 \\ 0.252608E 00 & 0.232255E 01 & 0.304106E 01 & -0.989182E 02 \end{bmatrix}$$

$$\{p_{ij}\} = \begin{bmatrix} -0.508553E 01 & -0.782595E 01 & 0.149456E 02 & -0.139755E 02 \\ 0.654936E 00 & -0.126346E 02 & -0.138358E 02 & 0.167628E 02 \\ 0.418441E 00 & 0.194716E 00 & -0.289506E 02 & -0.230883E 02 \\ 0.230673E 00 & 0.178572E 01 & -0.298120E 01 & -0.554587E 02 \end{bmatrix}$$

$$\{z_{ij}\} = \begin{bmatrix} 0.550602E 01 & -0.345057E 02 & 0.966168E 02 & -0.189330E 03 \\ -0.305142E 01 & 0.191230E 02 & -0.535448E 02 & 0.104926E 03 \\ 0.178913E 01 & -0.112123E 02 & 0.313947E 02 & -0.615211E 02 \\ -0.127911E 01 & 0.801608E 01 & -0.224452E 02 & 0.439836E 02 \end{bmatrix}$$

Anschrift des Verfassers:

Dr.-Ing. Oswald Becker
Ingenieurhochschule Zittau
Abteilung Mathematik

8800 Zittau
Theodor-Körner-Allee 16