TECHNISCHE MECHANIK 4 (1983) Heft 1
Manuskripteingang: 7. 6. 1982

Umrisse der modernen statistischen Turbulenztheorie [1)]

J. Biehounek, B. Krause, B. Rummler

1. Einleitung

Zu den Wesenszügen turbulenter Strömungen zählt, wie bereits der Augenschein vermuten läßt, ihr im Detail regelloser Verlauf. Wegen der an einem festen Punkt des Feldes vorhandenen Schwankungen der Feldgrößen handelt es sich stets um einen instationären Vorgang, bei dem auf die Beteiligung unkontrollierbarer, zufälliger Einwirkungen geschlossen werden kann. Andrerseits wirken die Bewegungsgesetze der Kontinuumsmechanik ohne Zweifel auch bei Turbulenz. Diesen Vorstellungen entspricht der Gedanke, zur Beschreibung des Vorgangs Mechanik und Stochastik in geeigneter Weise zu verbinden. Er findet sich erstmals in einer Arbeit aus dem Jahre 1895, in der O. Reynolds die Momentenfunktionen in den Mittelpunkt stellt. Inzwischen wurde das Reynoldsche Konzept – vielfach weiterentwickelt – zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel bei der Berechnung konkreter turbulenter Strömungen. Dennoch kann heute nur in Ausnahmefällen von einer ausreichenden strömungsmechanischen Durchdringung der Turbulenz gesprochen werden [1], [2], was damit im Zusammenhang stehen dürfte, daß das Abschlußproblem der statistischen Turbulenztheorie noch nicht in jeder Hinsicht zufriedenstellend gelöst wurde. Die Schwierigkeiten beim Aufklären der turbulenten Bewegung sind nach Meinung von W. Albring auch durch einen unzureichenden Austausch über Fachrichtungsgrenzen hinweg entstanden, weshalb in manchen Phasen der Turbulenzforschung der Schaffung einer begrifflichen Basis als Grundlage für das zielgerichtete Einsetzen mathematischer Methoden zu wenig Bedeutung beigemessen wurde [3], [4].

In der Tat hat sich seit dem Wirken O. Reynolds die Maßtheorie, verbunden mit der Entfaltung der Stochastik als eigenständige Disziplin der Mathematik entwickelt. Hinzu kommen wesentliche Fortschritte beim Einsatz funktionalanalytischer Methoden in der Lösungstheorie der Navier-Stokesschen Gleichung (NSG). Auf diese Weise wurden die Voraussetzungen für ein neuartiges Herangehen an das Turbulenzproblem geschaffen, was schließlich zur modernen statistischen Turbulenztheorie hinführte. Nach einer Arbeit von E. Hopf aus dem Jahr 1952, die starke Beachtung fand, wurde sie durch Beiträge von O. A. Ladyshenskaja, M. I. Wischik, A. W. Fursikow, C. Foias, R. Temam u. a. zu einem festen Bestandteil der Turbulenzforschung ausgebaut. Heute ist ein solcher Entwicklungsstand der Theorie erreicht, daß die Frage einer möglichen Nutzung geprüft werden kann.

Mit diesem Beitrag verfolgen wir in der Hauptsache das Ziel, auf die Verbindung der Turbulenztheorie mit Funktionalanalysis und Maßtheorie sowie Stochastik hinzuweisen. Im einzelnen werden im Anschluß an eine knappe Darstellung der Grundgedanken zwei stochastische Modelle turbulenter Strömungen vorgestellt, die zur Systematisierung bisher bekannter Richtungen der modernen statistischen Turbulenztheorie dienen. Die genauere Betrachtung des räumlichen Modells führt zur Hopfschen Gleichung und ihrer Verallgemeinerung durch Foias. Sodann wird ein Weg zur näherungsweisen Behandlung der Gleichung vorgeschlagen, der auf eine Familie linearer partieller Differentialgleichungen für gewisse Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen als Ersatzproblem führt. Schließlich heben wir den Umstand hervor, daß man dieselben Gleichungen auch bei Anwendung der Theorie dynamischer Systeme auf turbulente Strömungen erhält, wie das von Mascheck wiederholt vorgeschlagen wurde [5], [6]. Einige Grundlagen aus der Funktionalanalysis, die zur Darstellung des Stoffs benötigt werden, sind im Anhang zusammengestellt.

2. Stochastische Modelle turbulenter Strömungen

Bei konsequenter Anwendung der Kontinuumsvorstellung erscheinen Flüssigkeiten und Gase als Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden. Die Dazwischenkunft vieler, im einzelnen noch so unbedeutender Umstände kann die unterschiedlichsten Bewegungsformen hervorbringen. Zur Beschreibung solcher und anderer Vorgänge, die auch von zufälligen Einwirkungen geprägt werden, kennt die Mathematik den Begriff der stochastischen Funktion, der durch Verallgemeinerung der Zufallsgröße entsteht. Während bei letzterer jedem Elementarereignis $\omega \in \underline{\Omega}$ gemäß $X : \underline{\Omega} \to \mathbf{R}$ eine reelle Zahl als Realisation zugeordnet wird, handelt es sich bei der stochastischen Funktion um eine meßbare Abbildung

$$V : \underline{\Omega} \to \mathbf{X} \tag{1}$$

aus $\underline{\Omega}$ in eine Menge $\mathbf{X}$ nichtzufälliger Funktionen x, die auf einem Gebiet $\underline{\Theta}$ definiert sind. Vielfach liegen Zeit- und Ortsabhängigkeiten vor, die ihrerseits bestimmten gesetzmäßigen Veränderungen unterliegen; bei Turbulenz wird in Newtonschen Fluiden die Gültigkeit der NSG angenommen. Stochastische Funktionen sind also das geeignete Instrumentarium zur Modellierung solcher Vorgänge, bei denen hinter einem zufälligen Erscheinungsbild sich gesetzmäßige Zeit- und Ortsabhängigkeit verbergen. Uns bieten sie insbesondere die Ansatzpunkte dafür, um durch Verbindung der Stochastik mit den Be-

1) Bearbeitete Fassung eines Vortrags auf dem Umlaufkolloquium über Probleme Turbulenz, Berlin 1981

wegungsgesetzen des Fluids einer adäquaten Beschreibung der Turbulenz näherzukommen.
Als mathematisches Modell eines Zufallsversuchs dient allgemein ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\underline{\Omega}, \underline{B}, P)$, wo $\underline{B}$ eine σ-Algebra von Teilmengen aus $\underline{\Omega}$ und P ein darauf definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Die Abbildungen X bzw. V übertragen, da sie meßbar sind, P in den Bildraum. Im Falle der stochastischen Funktion gelangen wir zu dem Maßraum $(X, \underline{H}, m)$. Hier ist $\underline{H}$ eine gewisse σ-Algebra in X und m gemäß

$$m(\Delta X) = P(V^{-1}(\Delta X)), \Delta X \in \underline{H}, V^{-1}(\Delta X) = \Delta\underline{\Omega} \in \underline{B} \quad (2)$$

das Bildmaß von P. In Anbetracht des Wesens turbulenter Strömungen sollte ein Wahrscheinlichkeitsraum, dessen Grundmenge eine Funktionenmenge X ist, die geeignete Grundlage zur Formulierung stochastischer Modelle turbulenter Strömungen bieten. Allerdings müssen dazu die Daten des Maßraumes an die Besonderheiten solcher Vorgänge angepaßt werden, d. h. es geht darum, die Abbildung so zu definieren, daß als Bildraum nicht eine beliebige Funktionenmenge, sondern eine solche erscheint, die den zugrunde liegenden Bewegungsgesetzen (NSG und Kontinuitätsgleichung) entspricht.
Bei diesen Überlegungen spielen Ergebnisse der funktionalanalytischen Untersuchung der NSG eine entscheidende Rolle, die auf einem verallgemeinerten Lösungsbegriff fußen (vgl. Anhang, Def. 2). Von den Besonderheiten der funktionalanalytischen Behandlung instationärer Vorgänge interessiert vorerst allerdings nur die Interpretation von Funktionen der Art $u(t, x)$: Sie werden als Funktionen der Zeit aufgefaßt, deren Werte in einem Raum von Ortsfunktionen liegen. Dementsprechend betrachten wir nachfolgend die Realisationen $v(t, x)$ eines turbulenten Geschwindigkeitsfeldes als Funktionen der Zeit mit Werten in einem Raum von Ortsfunktionen. Die Anpassung dieses Raumes an Besonderheiten von Strömungsvorgängen (und an die entsprechende Bewegungsgesetze) führt dazu, den $v(t, \cdot)$ gewisse Eigenschaften zuzuschreiben. Und zwar soll es sich um auf dem Gebiet G definierte, vektorwertige, solenoidale Funktionen handeln, die über G quadratisch integrierbar und im verallgemeinerten Sinn (sh. Anhang) differenzierbar sind sowie auf dem Rand ∂G verschwinden. Diesen Raum nennen wir ${}^sH$ und schließen noch zwei Bemerkungen an. a) Die Annahme der Nullrandbedingung bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, weil sich beim Übergang zu beliebigen Randbedingungen nichts ändert (vgl. [7]). b) Die Solenoidalität ist in einem verallgemeinerten Sinn zu verstehen (vgl. Anhang, Def. 1).
Nach diesen Festsetzungen haben wir es mit einer Abbildung

$$v(\cdot,\cdot) : \Delta R^+ \to {}^sH$$

$$\Delta R^+ = [0,T], T>0, v(t,\cdot) \in {}^sH, v(t,\cdot) = \quad (3)$$

$$= (v_1(t,\cdot), v_2(t,\cdot), v_3(t,\cdot))$$

zu tun, die in ihrem Bildraum bereits einige Wesenszüge inkompressibler Strömungen in einem endlichen Gebiet G widerspiegelt. Man könnte daher daran denken, die Potenzmenge ${}^sH^{\Delta R^+}$ von ${}^sH$ mit dem Exponenten ΔR^+, d. h. die Menge aller Funktionen mit dem Definitionsbereich ΔR^+ und dem Wertebereich ${}^sH$ ([8], S. 14) als Grundmenge des stochastischen Modells turbulenter Strömungen zu benutzen. Das ist jedoch unzweckmäßig, weil die Menge ${}^sH^{\Delta R^+}$ viel zu umfassend ist und sicher auch solche Funktionen enthält, die als Realisationen turbulenter Geschwindigkeitsfelder nicht auftreten können. Wir müssen daher eine Einschränkung vornehmen. Dabei lassen wir uns von der Tatsache leiten, daß im Augenblick zwar die Ortsabhängigkeit der Realisationen mit den erforderlichen Eigenschaften ausgestattet ist, die Zeitabhängigkeit dagegen noch nicht näher gekennzeichnet ist. Diesbezüglich gehen wir von der Forderung aus, daß nahe benachbarten Zeitpunkten auch nur wenig verschiedene Strömungsfelder entsprechen müssen, also eine in einem gewissen Sinne stetige Funktion vorliegen soll. Auch der Anspruch, daß $v(t, \cdot)$ bezüglich der Zeit quadratisch integrierbar sein muß, stellt eine sinnvolle Einschränkung dar. Allen Gesichtspunkten bezüglich der Zeit- und Ortsabhängigkeit wird der von M. I. Wischik und A. W. Fursikow eingeführte Raum

$$Z = L_2(0, T; {}^sH) \cap C([0,T]; {}^sH_2^{-r}) \quad (4)$$

gerecht [9], [10]. Dabei ist ${}^sH_2^{-r}$ ein im Anhang näher erläuterter Raum, von dessen Eigenschaften wir hier nur die Beziehung

$${}^sH \subset {}^sH_2^{-r}$$

anführen wollen. Wegen des ersten Anteils von Z werden nur solche Zeitfunktionen erfaßt, die höchstens auf einer Menge vom Maß Null keine endliche Norm $\| v \|$ besitzen. Der zweite Anteil gewährleistet die angesprochene Stetigkeitseigenschaft. Die eigentliche Rechtfertigung für die Wahl von Z als Grundmenge des stochastischen Modells turbulenter Strömungen liefert allerdings erst die folgende Überlegung.
Wenn es um die Suche nach Mengen geht, die für die Formulierung von Turbulenzmodellen geeignet sind, wäre zuallererst an die Menge der verallgemeinerten Lösungen der NSG

$$v'(t) + \nu A v(t) + B(v(t), v(t)) = g(t) \quad (5)$$

zu denken. In dieser Gleichung, deren Ableitung im Anhang dargestellt wird, bedeutet v' die verallgemeinerte Zeitableitung der Geschwindigkeit, ν die kinematische Zähigkeit und A bzw. B sind Differentialoperatoren, die dem Reibungs- bzw. Transportglied in der klassischen Schreibweise der NSG entsprechen. Durch $g(t)$ wird die Wirkung einer äußeren Kraft beschrieben. In unserem Zusammenhang interessiert besonders die Menge W aller Lösungen von (5) für beliebige Anfangsbedingungen

$$v(0, \cdot) = v_0(\cdot) \in {}^sH \quad (6)$$

und beliebige, aber feste Kräfte sowie die Nullrandbedingung (wobei man sich entsprechend der obigen Bemerkung auch feste andere Randbedingungen vorstellen darf). Da ein Ziel der modernen statistischen Turbulenztheorie die Konstruktion eines Maßes m ist, das die statistische Beschreibung eines turbulenten Geschwindigkeitsfeldes ermöglicht, wäre es nur natürlich, als Grundmenge des entsprechenden stochastischen Modells W einzusetzen. Das ist aber nicht möglich, weil man die Struktur dieser Menge nicht kennt und daher auch nicht in der Lage ist, sie anzugeben. Dagegen kann man die schwächere Aussage

$$W \subset Z \tag{7}$$

beweisen [9], [10]. Sie ist in der beschriebenen Situation für uns ausschlaggebend und führt zu der Festsetzung $X = Z$ im allgemeinen stochastischen Modell $(X, \underline{H}, m)$. Wir spezialisieren es damit so, daß seine Anwendung auf Strömungsvorgänge denkbar wird. Außerdem dient von nun an als Grundmenge ein normierter Raum, so daß im weiteren die σ-Algebra $\underline{B}(Z)$ der Borelmengen von Z benutzt werden kann.

Ein zentrales Problem bei der Entwicklung einer sinnvollen Theorie ist die Spezialisierung des Maßes m. Es zeigt sich, daß Ansprüche an m nicht unabhängig von den Annahmen über Z formuliert werden können. Zieht man nämlich – wie soeben geschehen – eine Menge heran, die W umfaßt, so kommen unter den vielen auf $\underline{B}(Z)$ definierbaren Wahrscheinlichkeitsmaßen m nur solche zur Beschreibung turbulenter Strömungen in Betracht, die auf W konzentriert sind. Wir müssen daher die Beziehung

$$\mu(W) = 1, \; \mu(Z \setminus W) = 0 \tag{8}$$

fordern, wobei wir die Spezialisierung des Maßes durch Übergang zum Symbol μ betonen. Die Forderung (8) besitzt über den bisher diskutierten Aspekt hinaus weitreichende physikalische Konsequenzen. Dazu halte man sich vor Augen, daß W sehr stark von physikalischen und geometrischen Bedingungen geprägt wird, denen die Strömung unterliegt. Jede Veränderung der Randbedingungen und der äußeren Kräfte führt in einer durch die NSG beschriebenen Weise zur Änderung des Feldes und damit von W. Also sichert diese Eigenschaft des Maßes den Einfluß äußerer Gegebenheiten auf μ und ist ausschlaggebend dafür, daß die Bewegungsgesetze des Strömungsfeldes in das Modell einbezogen werden. Es handelt sich mithin um die Nahtstelle, an der Mechanik und Stochastik verbunden werden. Wir betonen die besondere Bedeutung dieser Eigenschaft und verzichten darauf, weitere Aussagen über μ anzuführen, die z. B. den Zusammenhang von μ mit einem vorgegebenen Maß μ_o auf dem Raum der Anfangsbedingungen betreffen. Vielmehr weisen wir darauf hin, daß diese Überlegungen nur dann den Status einer Theorie erlangen, wenn die Existenz eines derartigen Maßes μ gesichert ist. Dieser Beweis wurde von Wischik geführt. Er liefert zudem noch das physikalisch sinnvolle Ergebnis, daß der Erwartungswert der kinetischen Energie für alle t und der der Dissipation für fast alle t (bezogen auf das gesamte Strömungsgebiet) endlich sein muß, wenn dies zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt.

Das Ergebnis der bisherigen Überlegungen ist zusammengefaßt in folgender Definition.

Def.: Als raum-zeitliches Modell einer turbulenten Strömung, die unter dem Einfluß einer nichtzufälligen Kraft in dem endlichen Strömungsgebiet $G \subset R^3$ abläuft, bezeichnet man den Wahrscheinlichkeitsraum $(Z, \underline{B}(Z), \mu)$ [11].

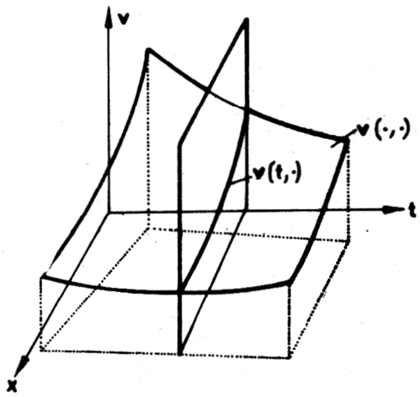

Bild 1

Vom allgemeinen raum-zeitlichen Modell ist der Übergang zum räumlichen Modell möglich, das die Grundlage der Hopfschen Theorie bildet. Dazu dient die folgende Überlegung.

Fixiert man in $v(\cdot, \cdot)$ die Variable t, so erhält man bekanntlich die Ortsfunktion $v(t, \cdot) \in {}^sH \subset {}^sH_2^{-r}$. Sie heißt t-Schnitt von $v(\cdot, \cdot)$ (vgl. Bild 1). Indem so jedem $v(\cdot, \cdot) \in Z$ ein $v(t, \cdot) \in {}^sH_2^{-r}$ zugeordnet wird, gelangt man zu einer Familie $\{\Gamma_t\}_{t \in \Delta R^+}$, $\Delta R^+ = [0, T]$ von Abbildungen

$$\Gamma_t : Z \rightarrow {}^sH_2^{-r}. \tag{9}$$

Sie sind wegen der Wahl von Definitions- und Wertebereich stetig und daher auch meßbar. Infolgedessen geht gemäß

$$\mu_t(\Delta\, {}^sH_2^{-r}) = \mu(\Gamma_t^{-1}\, \Delta\, {}^sH_2^{-r}), \; \Delta\, {}^sH_2^{-r} \in \underline{B}({}^sH_2^{-r}) \tag{10}$$

aus μ das Bildmaß μ_t hervor und wir gelangen vom raum-zeitlichen Modell $(Z, \underline{B}(Z), \mu)$ zum räumlichen Modell

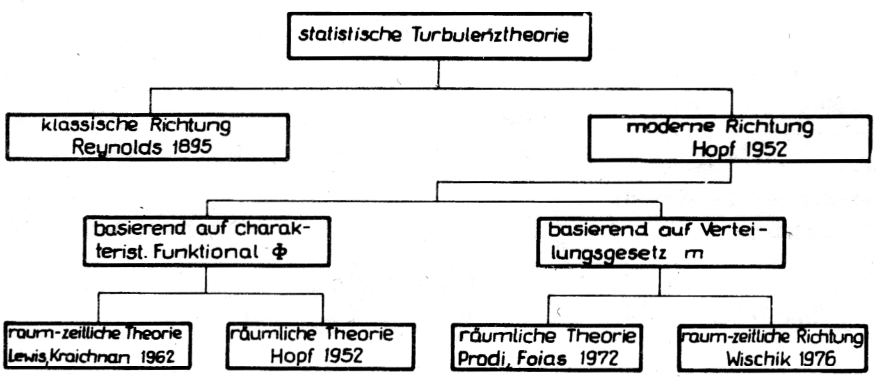

Bild 2

($^sH^{-r}$, $\underline{B}(^sH^{-r})$, μ_t) eines turbulenten Geschwindigkeitsfeldes. Die Bezeichnungen orientieren sich am Charakter des jeweiligen Grundraumes. Beim raum-zeitlichen Modell handelt es sich um einen Raum zeit- u n d ortsabhängiger Funktionen, während beim räumlichen Modell nur eine Ortsabhängigkeit vorliegt. Im Gegensatz zur raum-zeitlichen Theorie, wo die Strömung durch ein einziges zeitunabhängiges Maß beschrieben wird, liegt jedoch beim räumlichen Modell eine Familie von Maßen vor, die auf $^sH \subset {}^sH_2^{-r}$ konzentriert sind. Man kann hier also von der Evolution eines Maßes sprechen, das sich unter dem Einfluß der Bewegungsgesetze aus einem Anfangsmaß entwickelt. Das Anliegen der von E. Hopf begründeten Richtung der modernen statistischen Turbulenztheorie ist es, diesen Prozeß quantitativ zu beschreiben. Im Sinne der oben eingeführten Terminologie handelt es sich also um eine räumliche Theorie. Insgesamt kann mit Hilfe dieser Vorstellung die in Bild 2 gezeigt Systematisierung bisher bekannter Zweige der statistischen Turbulenztheorie vorgenommen werden.

3. Die Hopfsche Theorie und ihre Verallgemeinerung durch Foias

Bevor wir auf die Grundgleichung der Hopfschen Theorie eingehen, sollen die physikalischen Vorstellungen skizziert werden, auf die sich die moderne statistische Turbulenztheorie hinsichtlich unkontrollierbarer Einflüsse auf den Bewegungsablauf stützt. Diese resultieren bekanntlich im wesentlichen aus den Anfangsbedingungen und aus Störungen, die von den Kräften ausgehen bzw. über den Rand des Strömungsgebietes wirken. Von all diesen und eventuell noch anderen denkbaren Möglichkeiten wird mit Ausnahme der Anfangsbedingungen abgesehen. Die Berücksichtigung stochastischer äußerer Kräfte wäre angesichts der Definition von $\mathbb{W}$ möglich, soll aber der Einfachheit halber nicht diskutiert werden (vgl. [9]). Im Grunde genommen handelt es sich also um die vielfach vertretene Vorstellung, die NSG reagiere sehr empfindlich auf Veränderungen der Anfangsbedingungen, wobei kleinen Änderungen zu Beginn nicht notwendig kleine Änderungen des Endzustandes folgen müssen.
Wir gehen nun zu derjenigen Behandlung des räumlichen Modells über, wie sie bei E. Hopf zu finden ist [12]. Die von ihm angegebene Gleichung bezieht sich nicht auf μ_t selbst, sondern auf das leichter handhabbare, aber völlig äquivalente räumliche charakteristische Funktional (r. c. F.)

$$\Phi[y](t) = \int_{^sH} e^{i(y,v)_{^sH}} \mu_t(dv), \quad y \in {}^sH. \tag{11}$$

Indem wir voraussetzen, daß die Lösungen $v(t, \cdot)$ der NSG zur jeweiligen Anfangsbedingung $v_o(\cdot)$ eindeutig sind, ordnet ein Operator $W(t)$ jedem $v_o \in {}^sH$ eindeutig ein $v(t, \cdot) = W(t)\, v_o \in {}^sH$ zu. Die Anwendung des Satzes über die Transformation von Integralen (vgl. [8], S. 158) und Differentiation nach der Zeit liefert dann

$$\frac{d\Phi[y](t)}{dt} = i \int (y, v')\, e^{i(y, W(t) v_o)} \mu_o(dv_o) . \tag{12}$$

Wird nun in Gl. (12) v' mit Hilfe der NSG ersetzt, entsteht im Ergebnis der Verbindung von Maßtheorie bzw. Stochastik und Mechanik die erstmals 1952 von E. Hopf angegebene Gleichung (HG)

$$\frac{d\Phi[y](t)}{dt} = -i \int_{^sH} (\nu(Av, y) + (B(v,v), y) - (g(t), y))\, e^{i(y,v)} \mu_t(dv). \tag{13}$$

Mit Rücksicht auf die Arbeiten von Foias verzichten wir darauf, die rechte Seite von Gl. (13) durch funktionale Ableitungen auszudrücken. Zusammen mit dem c. F.

$$\Phi_o[y] = \int_{^sH} e^{i(y, v_o)} \mu_o(dv_o) \tag{14}$$

einer Anfangsverteilung μ_o beschreibt das Cauchy-Problem der HG mit der Anfangsbedingung $\Phi[y](0) = \Phi_o[y]$ die zeitliche Entwicklung des r. c. F. und damit des anfänglich gegebenen Verteilungsgesetzes μ_o. Die Annahme der Existenz des Operators $W(t)$ scheint eine wesentliche Einschränkung zu sein, ist sie doch im dreidimensionalen Fall nicht bewiesen. Allerdings ist die Ableitung der HG auch ohne diese Annahme aus dem raum-zeitlichen Modell möglich. Darauf wollen wir hier nicht eingehen. Wir weisen aber darauf hin, daß damit das Hopfsche Konzept die Möglichkeit der Lösungsverzweigung prinzipiell berücksichtigt.

Aus dem r. c. F. lassen sich durch funktionale Differentiation die Momentenfunktionen des Geschwindigkeitsfeldes gewinnen. Beispielsweise gilt für den Mittelwert EV_α der Geschwindigkeitskoordinate V_α, $\alpha = 1, 2, 3$

$$\left.\frac{\delta\Phi}{\delta y_\alpha(x)}\right|_{y=o} = i \int_{^sH} v_\alpha(x)\, \mu_t(dv) = iE\,V_\alpha . \tag{15}$$

Die zweite Ableitung liefert gemäß

$$\frac{\delta^2\Phi}{\delta y_\alpha(x)\, \delta y_\beta(x')} = -\int_{^sH} v_\alpha(x)\, v_\beta(x')\, \mu_t(dv) = -EV_\alpha V_\beta$$

die Momente zweiter Ordnung. Es handelt sich um die Koordinaten des Kovarianztensors, aus denen sich die Reynoldschen Spannungen, d. h. die Koordinaten des Reynoldstensors, ableiten lassen. Da sich der Differentiationsprozeß fortsetzen läßt, sind bei Kenntnis des charakteristischen Funktionals alle Momente des Geschwindigkeitsfeldes verfügbar.
Eine allgemeinere Möglichkeit zur Bestimmung des Verteilungsgesetzes μ_t wurde von Foias angegeben [13]. Bei ihm tritt an die Stelle des speziellen Integranden in Gl. (11) ein Frechet-differenzierbares Funktional

$$\chi : [0,T] \cdot {}^sH \to R \tag{16}$$

das einer gewissen Menge von Testfunktionalen angehört, deren Eigenschaften so gewählt sind, daß die Integrale der Foias-Gleichung (FG)

$$\int_0^t \Big\{ \int_{^sH} [-\chi_\tau(\tau, v) + \langle \nu A v + B(v,v) - g(\tau), \chi_v(\tau, v) \rangle]\, \mu_\tau(dv) \Big\}\, d\tau = \int_{^sH} \chi(t, v)\, \mu_t(dv) - \int_{^sH} \chi(0, v_o)\, \mu_o(dv_o) \tag{17}$$

existieren. Dabei ist χ_v die durch $\left(\frac{\delta\chi}{\delta v_1}, \frac{\delta\chi}{\delta v_2}, \frac{\delta\chi}{\delta v_3}\right)$ gegebene Frechet-Ableitung von χ.

4. Grundvorstellungen über ein Näherungsverfahren zur Lösung der Foias-Gleichung

Bis heute mangelt es an Lösungsmethoden des Anfangswertproblems der HG oder der FG, die allen Ansprüchen in mathematischer und physikalischer Hinsicht entsprechen. Als Beitrag zum Studium des Problems sollen nachfolgend erste Vorstellungen über ein Verfahren zur näherungsweisen Behandlung der Foias-Gleichung skizziert werden. Sein Wesen besteht darin, die Vorgehensweise der modernen statistischen Turbulenztheorie nicht auf die NSG, sondern auf ihre Galerkin-Approximationen anzuwenden [14]. Dazu wählen wir in ${}^sH$ ein vollständiges Orthonormalsystem $\{w_j\}_{j=1}$ und bezeichnen mit $H^{(n)}$ den durch $\{w_1, \ldots, w_n\}$ aufgespannten Unterraum. Ein $v^{(n)} \in H^{(n)}$ besitzt die Darstellung

$$v^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} a_j(t)\, w_j(x) \tag{18}$$

wobei $v^{(n)}$ und w_j vektoriellen Charakter tragen. Der entsprechende Operator

$$P_n : {}^sH \to H^{(n)} \tag{19}$$

der orthogonalen Projektion ist meßbar und ordnet gemäß

$$\mu_t^{(n)}(\Delta H^{(n)}) = \mu_t(P_n^{-1}\, \Delta H^{(n)}),\ \Delta H^{(n)} \in \underline{B}(H^{(n)}) \tag{20}$$

dem Maß μ_t die Familie seiner Projektionen $\mu_t^{(n)}$ auf $H^{(n)}$ zu. Auf diese Weise steht dem räumlichen stochastischen Modell $({}^sH_2^{-r}, \underline{B}({}^sH_2^{-r}), \mu_t)$ die Familie endlichdimensionaler Maßräume $\{(H^{(n)}, \underline{B}(H^{(n)}), \mu_t^{(n)})\}_n$ gegenüber. Da die Basisfunktionen fest gewählt sind, besteht eine eineindeutige Abbildung von $H^{(n)}$ auf die Menge aller n-Tupel $a^{(n)} = (a_1, \ldots, a_n)$. Außerdem liegt Isomorphie vor und die Räume $H^{(n)}$ bzw. R^n können identifiziert werden. Daher ist das Maß $\mu_t^{(n)}$ auch auf R^n erklärt. Nun lassen sich die $(a_1, \ldots, a_n)$ als Realisationen eines zufälligen Vektors $(A_1, \ldots, A_n)$ interpretieren, ebenso wie die $v(t, x)$ Realisationen eines stochastischen Feldprozesses sind. Aus dieser Sicht ist $\mu_t^{(1)}(\Delta R)$ die Wahrscheinlichkeit, daß a_1 zum Zeitpunkt t in $\Delta R \in \underline{B}(R)$ liegt. Entsprechend bedeutet $\mu_t^{(2)}(\Delta R_1 \cdot \Delta R_2)$ die Wahrscheinlichkeit, daß die Realisation a_1 in ΔR_1 und a_2 in ΔR_2 liegen.

Im weiteren setzen wir voraus, daß das Maß $\mu_t^{(n)}$ bezüglich des Lebesgueschen Maßes auf R^n absolut stetig ist. Dann besitzt es eine Dichtefunktion $p^{(n)}(\tau, a^{(n)})$ und es gilt

$$\mu_t^{(n)}(\Delta R^n) = \int_{\Delta R^n} p^{(n)}(t, a^{(n)})\, da^{(n)},\ \Delta R^n \in \underline{B}(R^n). \tag{21}$$

Die Berechnung von $p^{(n)}$ ist das – nur näherungsweise erreichbare – Ziel. Wir ersetzen dazu in der FG ${}^sH$ durch $H^{(n)}$ und v durch $v^{(n)}$. Es entsteht eine Näherungsgleichung, die der aus der NSG hervorgehenden Galerkin-Gleichung entspricht.

$$\begin{aligned} &\int_0^t \Big\{ \int_{H^{(n)}} [-\chi_t(\tau, v^{(n)}) + \langle \nu A v^{(n)} + B(v^{(n)}, v^{(n)}) \\ &- g(\tau), \chi_v(\tau, v^{(n)})\rangle]\, \hat{\mu}_\tau^{(n)}(dv^{(n)}) \Big\}\, d\tau \\ &= \int_{H^{(n)}} \chi(t, v^{(n)})\, \hat{\mu}_t^{(n)}(dv^{(n)}) \\ &- \int_{H^{(n)}} \chi(0, v_o^{(n)})\, \mu_o^{(n)}(dv_o^{(n)}),\ t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{22}$$

Als Ersatzproblem der Foias-Gleichung spiegelt es diese nur näherungsweise wider. Daher sind seine Lösungen $\hat{\mu}_t^{(n)}$ i. a. auch nicht mit den Projektionen $\mu_t^{(n)}$ von μ_t identisch. Sie sind nur als Näherungen aufzufassen und bilden insbesondere auch kein projektives System. Wohl aber geht $\mu_o^{(n)}$ aus dem vorgegebenen Anfangsmaß μ_o durch Projektion hervor. Mit der Approximation von v durch $v^{(n)}$ geht χ gemäß

$$\chi(t, v^{(n)}) = \chi(t, a^{(n)}) \tag{23}$$

in eine Funktion von $n+1$ Variablen über. Wie man zeigen kann, entsteht bei diesem Übergang aus der funktionalen Ableitung χ_v entsprechend

$$\chi_v(t, v^{(n)}) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \chi(t, a^{(n)})}{\partial a_l}\, w_l$$

eine Summe partieller Ableitungen. Daher erhalten wir bei dem geschilderten Vorgehen zu jedem n jeweils eine partielle DGL. Eine Rechnung, auf deren Details wir hier nicht eingehen können, führt schließlich zu dem Anfangswertproblem

$$\frac{\partial \hat{p}^{(n)}}{\partial t} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial a_l} \Big(\nu \sum_{j=1}^{n} a_j c_{lj} + \sum_{j,k=1}^{n} a_j a_k b_{ljk} - d_l\Big) \hat{p}^{(n)}(t, a^{(n)})$$

$$\hat{p}^{(n)}(0, a^{(n)}) = p_o^{(n)}(a^{(n)}), \tag{25}$$

in dem durch $\hat{p}^{(n)}$ die Dichtefunktionen von $\mu^{(n)}$ bezeichnet werden und $c_{lj} = (Aw_j, w_l)$, $b_{ljk} = (B(w_j, w_k), w_l)$, $d_l = (g, w_l)$ bedeuten. Von besonderem Interesse dürfte die Tatsache sein, daß dieses System auch bei Anwendung der Theorie dynamischer Systeme auf die Turbulenz folgt [5], [6].

Die Gleichungen (25) entsprechen der Liouville-Gleichung der statistischen Mechanik. Sie sind linear und auf jeder Stufe abgeschlossen. Damit überwindet die moderne statistische Turbulenztheorie das Abschlußproblem der klassischen Richtung. Andrerseits liegt wegen der mit n wachsenden Zahl von Variablen die Anwendung der Aufgabe (25) für konkrete Strömungsprobleme gegenwärtig noch nicht im Bereich des möglichen. Weitere Untersuchungen müssen zeigen, ob diese Schwierigkeiten überwunden werden können oder ob andere Zugänge günstigere Voraussetzungen für die Lösung des in vielen Punkten noch offenen Turbulenzproblems bieten.

Wir danken Herrn Prof. Schultz-Piszachich für die kritische Durchsicht der Arbeit und Anregungen zu ihrer Verbesserung.

Anhang

Funktionenräume und verallgemeinerte Lösungen der NSG

Die moderne statistische Turbulenztheorie benutzt Funktionenräume, die den Bewegungsgleichungen inkompressibler Fluide angepaßt sind. Sie sollen nachfolgend exakt definiert werden. Anschließend erfolgt der Übergang von den klassischen Bewegungsgleichungen zur verallgemeinerten Problemstellung in Form einer Operatordifferentialgleichung. Dabei wird immer ein endliches Strömungsgebiet $\mathbf{G} \subset \mathbf{R}^N$ mit einem hinreichend glatten Rand $\partial\, \mathbf{G}$ vorausgesetzt.

Werden zu einer Menge alle ihre Grenzelemente hinzugefügt, entsteht ihr Abschluß. Jedes Element des Abschlusses läßt sich als Grenzwert einer Folge darstellen. Natürlich spielt der dabei benutzte Abstandsbegriff eine Rolle, so daß man von ein und derselben Menge ausgehend zu unterschiedlichen Räumen gelangt.

Def. A 1:

${}^s\mathbf{H}_2^r\,(\mathbf{G}) = {}^s\mathbf{H}_2^r$ ist der Abschluß der Menge

$$\mathbf{V} = \left\{ v(\cdot) \in (C_o^\infty\,(\mathbf{G}))^N : \operatorname{div} v = 0 \right\} \qquad (\mathrm{A\,1})$$

in der Norm

$$\| v(\cdot) \|_{2,r} = \Big(\int_G \sum_{|\alpha| \leqslant r} \sum_{i=1}^{n} |D^\alpha v^i(x)|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \qquad (\mathrm{A\,2})$$

mit $x = (x^1, \ldots, x^N)$, $v(x) = (v^1(x), \ldots, v^N(x))$,

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N),\ |\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\,,\ D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x^1 \ldots \partial^{\alpha_N} x^N}$$

Beim Übergang zum Abschluß werden die Eigenschaften der Funktionen aus $\mathbf{W}$ (sie erfüllen die Nullrandbedingung, sind solenoidal und differenzierbar) auf die Funktionen von ${}^s\mathbf{H}_2^r$ im verallgemeinerten Sinn übertragen. Insbesondere besitzen sie verallgemeinerte Ableitungen bis zur Ordnung r: ${}^s\mathbf{H}_2^r$ ist ein Teilraum des Sobolewraums $(\overset{o}{\mathbf{W}}{}_2^r\,(\mathbf{G}))^N$ und mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{2,r}^2 = \int_G \sum_{|\alpha| \leqslant r} \sum_{i=1}^{N} D^\alpha u^i(x) D^\alpha v^i(x)\, dx \qquad (\mathrm{A\,3})$$

ein Hilbertraum. Wir setzen ${}^s\mathbf{H}_2^0 = {}^s\mathbf{H}$.

Der Dualraum von ${}^s\mathbf{H}_2^r$ wird mit ${}^s\mathbf{H}_2^{-r}$ bezeichnet. Wie üblich, ist $\langle u, v \rangle = u(v)$ der Wert des beschränkten linearen Funktionals $u \in {}^s\mathbf{H}_2^{-r}$ an der Stelle $v \in {}^s\mathbf{H}_2^r$.

Die Ortsabhängigkeit ist nunmehr mit Eigenschaften ausgestattet, die zur Entwicklung einer sinnvollen Theorie gefordert werden müssen. Wir wenden uns daher der Zeitabhängigkeit zu. Zur Beschreibung zeitabhängiger Vektorfelder werden die Funktionenräume $\mathbf{L}_p\,(0, T; {}^s\mathbf{H}_2^r)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ bzw. $C\,(0, T; {}^s\mathbf{H}_2^r)$ benutzt, die bezüglich der Zeit t meßbare bzw. stetige Funktionen $u(\cdot,\cdot)$ mit Werten $u(t,\cdot)$ in ${}^s\mathbf{H}_2^r$ enthalten (genauere Definition in [10]). Insbesondere sollen die verallgemeinerten Lösungen der NSG im Raum

$$\underline{\mathbf{V}} = \left\{ u(\cdot,\cdot) \in \mathbf{L}_2\,(0, T; {}^s\mathbf{H}_2^1) \cap \mathbf{L}_\infty(0, T; {}^s\mathbf{H}) : u'(\cdot,\cdot) \in \mathbf{L}_\infty(0, T; {}^s\mathbf{H}_2^{-r}) \right\}$$

$$r > \frac{1}{2} N + 1 \qquad (\mathrm{A\,4})$$

bestimmt werden (vgl. Def. A 2). Die Zeitableitung $u'(\cdot,\cdot)$ ist wieder im verallgemeinerten Sinne zu verstehen, d. h. für alle $v \in {}^s\mathbf{H}_2^r$ ist

$$\langle u'(t,\cdot), v \rangle = \frac{d}{dt}(u(t,\cdot), v)_{2,0}\,. \qquad (\mathrm{A\,5})$$

Daraus folgt insbesondere, daß der Raum

$$\mathbf{Z} = \mathbf{L}_2\,(0, T; {}^s\mathbf{H}) \cap C\,(0, T; {}^s\mathbf{H}_2^{-r}) \qquad (\mathrm{A\,6})$$

den Raum $\underline{\mathbf{V}}$ umfaßt. Es gilt

$$\underline{\mathbf{V}} \subset \mathbf{Z}\,. \qquad (\mathrm{A\,7})$$

Um zur verallgemeinerten Problemstellung der NSG zu gelangen, betrachten wir in $\mathbf{G} \subset \mathbf{R}^N$, N = 2,3 die Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit, deren Geschwindigkeit $u\,(t, x)$ im Zeitintervall $\Delta\,\mathbf{R}^+ = [0, T]$ durch folgende Gleichungen beschrieben wird:

$$(0, T) \cdot \mathbf{G} : \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) - \nu \Delta_x u(t,x)$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} u^i(t,x) \frac{\partial}{\partial x^i} u(t,x) + \nabla_x p(t,x) = f(t,x) \qquad (\mathrm{A\,8})$$

$$\operatorname{div} u(t,x) = 0 \qquad (\mathrm{A\,9})$$

$$[0, T] \cdot \partial\, \mathbf{G} : u(t,x) = 0 \quad \text{(Nullrandbedingung)} \qquad (\mathrm{A\,10})$$

$$\mathbf{G} : u(0,x) = u_o(x) \quad \text{(Anfangsbedingung)} \qquad (\mathrm{A\,11})$$

Dabei wurde für die Dichte der Flüssigkeit $\rho = 1$ gesetzt, $p\,(t, x)$ steht für den Druck, ν für die kinematische Zähigkeit und $f\,(t, x)$ bezeichnet den Vektor einer äußeren Kraft. Um vom klassischen Rand-Anfangswertproblem (A 8) – (A 11) zum entsprechenden verallgemeinerten Problem zu gelangen, ist (A 8) zunächst (in $\mathbf{R}^N$) skalar mit einer Funktion aus der Menge (A 1) zu multiplizieren. Anschließend wird über $\mathbf{G}$ integriert und durch partielle Integration umgeformt. Es entsteht dann:

$$\frac{d}{dt}\,(u(t,\cdot), v(\cdot)) + \nu\, a\,(u(t,\cdot), v(\cdot))$$

$$+ b\,(u(t,\cdot), u\,(t,\cdot), v(\cdot)) = (f\,(t,\cdot), v\,(\cdot)) \qquad (\mathrm{A\,12})$$

mit dem Skalarprodukt $(\cdot\,,\cdot) = (\cdot\,,\cdot)_{2,0}$ aus (A 3) und $a\,(u, v) = -\,(u, \Delta\, v)$ sowie

$$b\,(u, w, v) = \int_G \sum_{ij=1}^{N} u^i(x)\, w^j(x) \frac{\partial}{\partial x^i} v^j(x)\, dx\,.$$

Für $r > \frac{N}{2} + 1$ gelten die Abschätzungen $|a\,(u, v)| \leqslant c_1 \|u\|_{2,0} \|v\|_{2,r}$ und $|b\,(u, w, v)| \leqslant c_2 \|u\|_{2,0} \|w\|_{2,0} \|v\|_{2,r}$, so daß zu beliebigem $u \in {}^s\mathbf{H}$ durch

$$\langle Au, v \rangle := a\,(u, v) \qquad (\mathrm{A\,13a})$$

bzw. zu $u, w \in {}^s\mathbf{H}$ durch

$$< B(u, w), v > := b(u, w.v), \quad v \in {}^sH_2^r \qquad \text{(A 13b)}$$

jeweils beschränkte lineare Funktionale Au bzw. B (u,w) $\in {}^sH_2^{-r}$ auf ${}^sH_2^r$ bzw. ${}^sH_2^r \cdot {}^sH_2^r$ erklärt, d. h. A bzw. B sind beschränkte Operatoren A: ${}^sH \to {}^sH_2^{-r}$, B: ${}^sH \cdot {}^sH \to {}^sH_2^{-r}$. Aus der Beziehung (A 12) entsteht die Operatordifferentialgleichung in ${}^sH_2^{-r}$ (für fast alle $t \in (0, T)$)

$$u'(t,\cdot) + \nu Au(t,\cdot) + B(u(t,\cdot), u(t,\cdot)) = g(t,\cdot) \qquad \text{(A 14)}$$

wenn $g(t,\cdot) \in {}^sH_2^{-r}$ das durch $< g(t,\cdot), v(\cdot) > = (f(t,\cdot), v(\cdot))$ definierte lineare Funktional ist und die Beziehung (A 5) und (A 13) benutzt werden.
Diese Überlegungen gestatten es, den Begriff der verallgemeinerten Lösung durch folgende Definition einzuführen.

Def. A 2: Eine Funktion $u \in \underline{V}$ (vgl. (A 4)) heißt verallgemeinerte Lösung von (A 8) – (A 11) zur Anfangsbedingung $u_o(\cdot) \in {}^sH$ und zur rechten Seite $f(\cdot,\cdot) \in L_\infty(0, T; {}^sH)$, wenn sie für fast alle $t \in (0, T)$ die Gleichung (A 14) erfüllt und

$$u(0,\cdot) = u_o(\cdot) \qquad \text{(A 15)}$$

gilt.

Nach der hier skizzierten Herleitung von (A 14) ist jede klassische Lösung von (A 8) – (A 11) (die dann bezüglich t einmal und bezüglich x zweimal stetig differenzierbar ist) auch verallgemeinerte Lösung gemäß Def. A 2. Eine verallgemeinerte Lösung braucht dagegen nur für fast alle t verallgemeinerte Ableitungen 1. Ordnung bezüglich t und x zu besitzen.

LITERATUR

[1] Landau, L. D., Lifschitz, E. M.: Hydrodynamik, Bd. VI des Lehrbuchs der theoretischen Physik. Akademie-Verlag, Berlin 1966.

[2] Präzisierte verbale Zielstellung der HFR Strömungsmechanik Berlin 1981.

[3] Albring, W.: Turbulenzuntersuchungen und ein Besinnen auf die Grundansprüche der Mechanikforschung. Heft 1 des Tagungsbandes „Transportprozesse in turbulenten Strömungen" Eisenach, 20. – 24. 11. 1979.

[4] Albring, W.: Mechanikforschung mit technischen Zielen. Spektrum, 12 (1981),

[5] Mascheck, H.-J.: Informationstheoretische Beschreibung der Turbulenz. Vortrag zur 2. Tagung Strömungsmechanik, Magdeburg 1979.

[6] Mascheck, H.-J.: Über die Bedeutung der molekularen Fluktuationen für die Theorie der turbulenten Strömung. Preprint, TU Dresden, Sektion Energieumwandlung, 1979.

[7] Foias, C.: Funktional'naja traktovka teorii turbulentnosti. UMN, 29,2 (1974), 282 – 313.

[8] Michel, H.: Maß- und Integrationstheorie I. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1978.

[9] Wischik, M. I., Komeč, A. I., Fursikov, A. V.: Nekotorye matematičeskie zadači statističeskoj gidrodinamiki. UMN 34, 5 (1979) 135 – 210.

[10] Wischik, M. I., Fursikov, A. V.: Matematičeskije zadači statističeskoj gidromechaniki Moskva, Nauka, 1980.

[11] Biehounek, J.: Stochastische Modelle turbulenter Strömungen. Kolloquium der Sektion Mathematik der MLU, 1981.

[12] Hopf, E.: Statistical Hydromechanics and Functional Calculus. Rational Mech. Anal. 1, 87 (1952), 87 – 123.

[13] Foias, C.: Statistical study of Navier-Stokes equations I, II. Rend. Sem. Matem. Univ. Padova 48 (1972), 219 – 348, 49 (1973), 9 – 123.

[14] Krause, B.: Über statistische Lösungen der Navier-Stokes Gleichung. IV. Tagung der Abt. MRT, Köthen 1980.

Anschrift der Verfasser:

J. Biehounek
B. Krause
B. Rummler
Ingenieurhochschule
Abt. Mathematik/Rechentechnik

4370 Köthen
Bernburger Straße 52 – 57