

# Spannungsuntersuchung faserverstärkter Werkstoffe bei Belastung quer zur Faserrichtung

Siegfried Holweg, Wolfgang Pfefferkorn

## 1. Einleitung

Mehrere Veröffentlichungen, insbesondere die von Puck [1], Roth und Grüninger [2] weisen darauf hin, daß dem Querzugversagen von verstärkten Werkstoffen fundamentale Bedeutung zukommt. In den bisher bekannten Arbeiten von Haberl [3], Avramidis [4] und Skudra u. Bulavs [5] werden die Eigenschaften faserverstärkter Werkstoffe bei Belastung quer zur Faserrichtung unter der Voraussetzung ermittelt, daß an der Kontur des Berechnungsmodells eine konstante Normalspannungsverteilung vorliegt.

Urbanczyk [6] verwendet zur Spannungsanalyse querbeanspruchter Kompositionen die Methode der punkweisen Näherung.

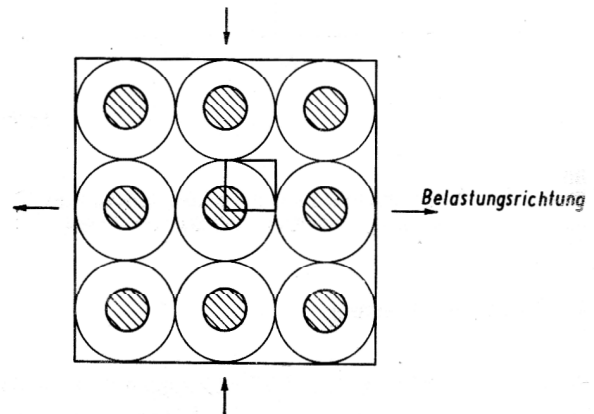
In der vorliegenden Arbeit wird unter Anwendung der Scheibentheorie eine Spannungsuntersuchung an der Faser-Matrix-Grenzfläche querbeanspruchter faserverstärkter Werkstoffe vorgenommen. Der Einfluß der benachbarten Faser auf den Spannungszustand in der Scheibe wird über die Verschiebungen der Randpunkte des Grundelementes (Berechnungsmodell) erfaßt.

## 2. Beschreibung des mechanischen Modells

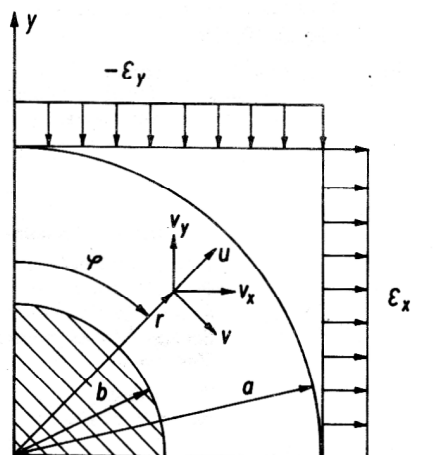
Die Fasern mit kreisförmigem Querschnitt sind in der Matrix nach einem quadratischen Raster und parallel zueinander angeordnet (Bild 1). Faser und Matrix sind homogen, isotrop und haften aneinander.

Aus der im Bild 1 angenommenen Faseranordnung wird ein Grundelement herausgeschnitten (Bild 2). Der kreisförmig angeordnete Außenrand der Matrixhülle  $a$  erfährt eine Verformung, die der mittleren Verformung der Komposition entspricht.

Die Spannungsberechnung erfolgt auf der Grundlage eines ebenen Formänderungszustandes und linear-elastischen Werkstoffverhaltens für die Faser und die Matrix. Der Matrixrand (Kontur des Grundelementes) soll als schubspannungsfrei betrachtet werden.



**Bild 1**  
Anordnung der Einlagerung in der Matrix



$a$  Radius der Begrenzung des  
Einflußbereiches der Einlagerung  
 $b$  Radius der Einlagerung

$\epsilon_x, \epsilon_y$  Mittlere Dehnung der Komposition  
 $v_x, v_y$  Verschiebungen in  $x, y$ -Richtung  
 $u, v$  Verschiebungen in radialer und  
tangentialer Richtung

**Bild 2**  
Verformung des Grundelementes

### 3. Ableitung der Grundgleichungen für die Spannungsanalyse

#### 3.1. Formulierung der Rand- und Übergangsbedingungen

$\epsilon_x$  und  $\epsilon_y$  sind die infolge der Querbelastung in x- und y-Richtung erzeugten mittleren Dehnungen der Komposition. Die Verschiebungskomponenten u und v in radialer und tangentialer Richtung sowie die Winkelverzerrung  $\gamma$  am Matrixrand a ergeben sich durch Transformation der Verschiebungskomponenten  $v_x = \epsilon_x a$  und  $v_y = \epsilon_y a$  auf Polarkoordinaten (Bild 2):

$$\begin{aligned} u(a, \varphi) &= \frac{a}{2} [(\epsilon_x + \epsilon_y) - (\epsilon_x - \epsilon_y) \cos 2\varphi] \\ v(a, \varphi) &= \frac{a}{2} (\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2\varphi \\ \gamma(a, \varphi) &= (\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (1)$$

Die Verschiebungskomponenten u und v und die Winkelverzerrung  $\gamma$  werden in einem drehsymmetrischen (Index s) und in einen periodischen Anteil (Index p) zerlegt.

Der drehsymmetrische Spannungszustand ist vom Winkel  $\varphi$  unabhängig und es verschwinden alle Ableitungen nach dem Winkel  $\varphi$ .

Für diesen Spannungszustand gelten am Übergang vom Faserbereich (Index 1) zum Matrixbereich (Index 2) für die Radialspannungen  $\sigma_r$  und Radialverschiebungen u die Beziehungen

$$\begin{aligned} \sigma_{r1}^s(b) &= \sigma_{r2}^s(b) \\ u_1^s(b) &= u_2^s(b) \end{aligned} \quad (2)$$

während für den periodischen Spannungszustand zusätzlich die Gleichheit der Schubspannungen  $\tau$  sowie der Tangentialverschiebungen v vorausgesetzt werden müssen:

$$\begin{aligned} \sigma_{r1}^p(b) &= \sigma_{r2}^p(b) \\ u_1^p(b) &= u_2^p(b) \\ \tau_1^p(b) &= \tau_2^p(b) \\ v_1^p(b) &= v_2^p(b) \end{aligned} \quad (3)$$

#### 3.2. Die Lösung des Elastizitätsproblems

Die Lösungen der Bipotentialgleichung (Scheibengleichung) müssen die gegebenen Randbedingungen erfüllen (Randwertproblem 3. Art).

Mit den bekannten Ansätzen (Spannungsfunktionen) für den rotationssymmetrischen Spannungszustand

$$\begin{aligned} F_1^s &= \frac{1}{2} C_3 r^2 \\ F_2^s &= \frac{1}{2} C_1 r^2 + C_2 b^2 \ln r \end{aligned}$$

und den Ansätzen für den periodischen Spannungszustand

$$\begin{aligned} F_1^p &= \frac{1}{2} (K_4 r^2 + K_5 \frac{1}{b^2} r^4) \cos 2\varphi \\ F_2^p &= \frac{1}{2} (K_0 b^2 + K_1 r^2 + K_2 \frac{b^4}{r^2} + K_3 \frac{r^4}{b^2}) \cos 2\varphi \end{aligned}$$

können die Normalspannungskomponenten  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  und die Schubspannung  $\tau$  für den Faser- und Matrixbereich angegeben werden. Die aus dem rotationssymmetrischen und periodischen Spannungszustand ermittelten Spannungskomponenten werden überlagert und ergeben die Grundgleichungen für die Spannungsanalyse:

Für den Faserbereich  $0 \leq r \leq b$

$$\begin{aligned} \sigma_{r1} &= C_3 - K_4 \cos 2\varphi \\ \sigma_{\varphi 1} &= C_3 + [K_4 + 6 K_5 (\frac{r}{b})^2] \cos 2\varphi \\ \sigma_{z1} &= \nu_1 (\sigma_{r1} + \sigma_{\varphi 1}) \\ \tau_1 &= [K_4 + 3 K_5 (\frac{r}{b})^2] \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (4)$$

und für den Matrixbereich  $b \leq r \leq a$

$$\begin{aligned} \sigma_{r2} &= C_1 + C_2 (\frac{b}{r})^2 - [2 K_0 (\frac{b}{r})^2 + K_1 + 3 K_2 (\frac{b}{r})^4] \cos 2\varphi \\ \sigma_{\varphi 2} &= C_1 - C_2 (\frac{b}{r})^2 + [K_1 + 3 K_2 (\frac{b}{r})^2 + 6 K_3 (\frac{r}{b})^2] \cos 2\varphi \\ \sigma_{z2} &= \nu_2 (\sigma_{r2} + \sigma_{\varphi 2}) \\ \tau_2 &= [-K_0 (\frac{b}{r})^2 + K_1 - 3 K_2 (\frac{b}{r})^4 + 3 K_3 (\frac{r}{b})^2] \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (5)$$

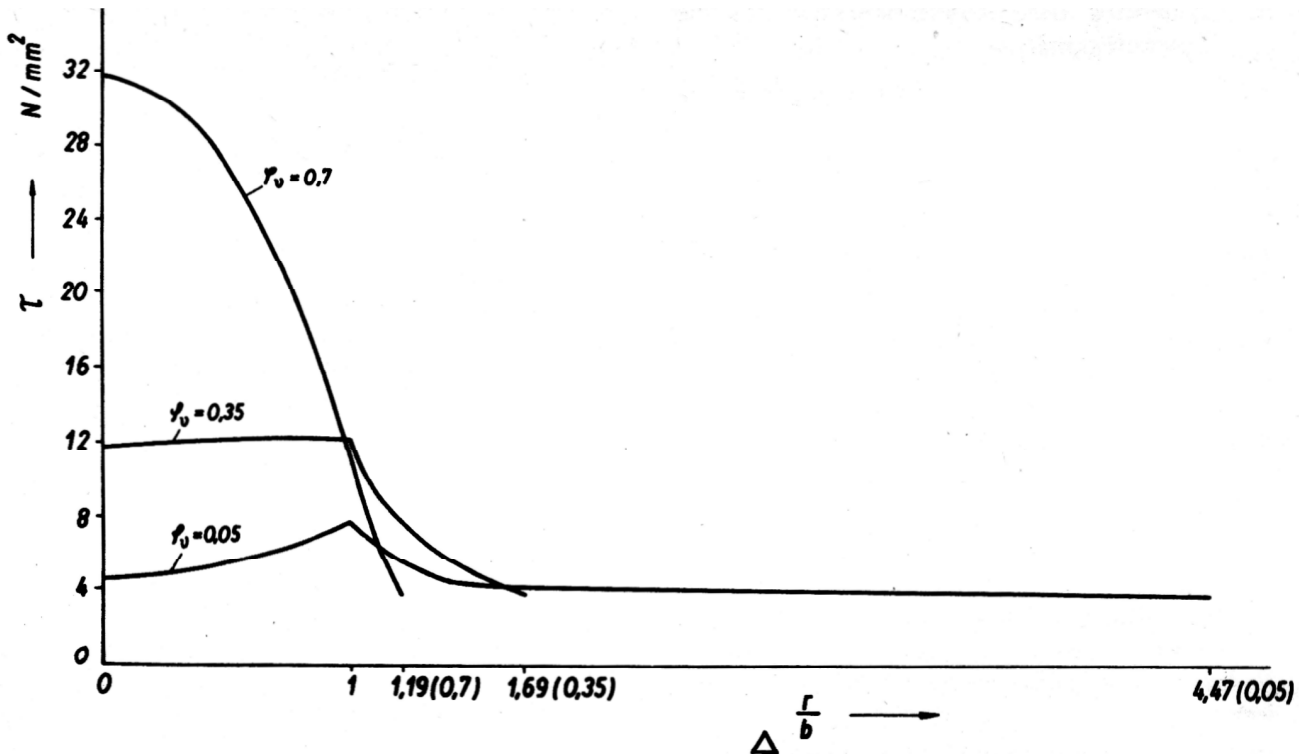
Die Integrationskonstanten ( $C_i$  und  $K_i$ ) enthalten als Parameter die elastischen Konstanten und den Faservolumenanteil, dargestellt als Radienverhältnis  $\frac{b}{a}$ .

### 4. Auswertung der Rechenergebnisse

Der Verzerrungszustand in der Scheibe sei durch die mittlere Dehnung in x- und y-Richtung  $\epsilon_x = \epsilon_o$  und  $\epsilon_y = -\epsilon_o$  mit  $\epsilon_o = 0,5\%$  gegeben (Bild 2). Für diesen Belastungsfall existiert nur ein vom Winkel  $\varphi$  abhängiger (periodischer) Spannungszustand ( $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ ). Die Berechnung der Vergleichsspannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_{v2}$  und  $\sigma_{v4}$  (Hauptspannungs-, Hauptdehnungs- und Gestaltänderungshypothese) mit den Spannungskomponenten (4), (5) erfolgt für Faservolumenanteile im Bereich  $\varphi_v = 0,05$  bis  $\varphi_v = 0,7$  und den Elastizitätskonstanten (E-Modul, Querkontraktionszahl) für die Einlagerung und für die Matrix:

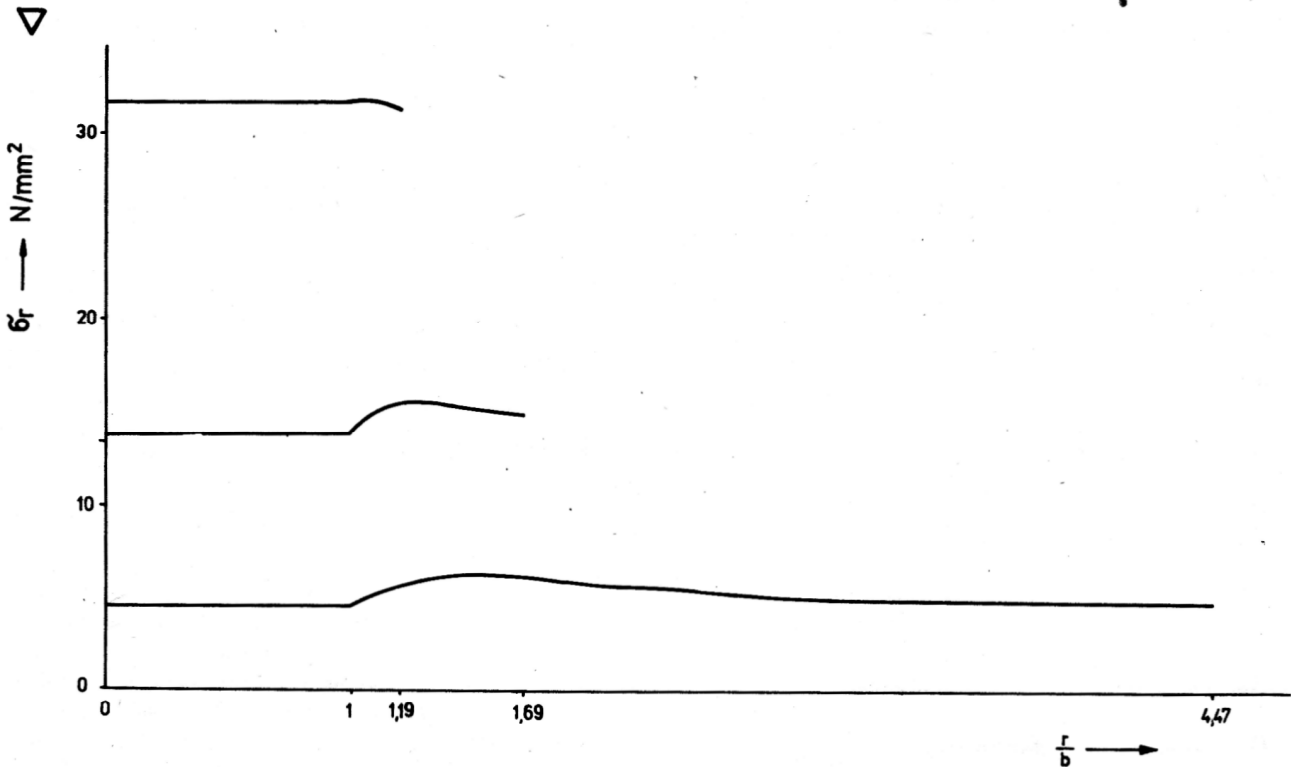
$$\begin{aligned} E_1 &= 20\,000 \text{ N/mm}^2, \nu_1 = 0,3 \\ E_2 &= 1000 \text{ N/mm}^2, \nu_2 = 0,35. \end{aligned}$$

Nach den Gleichungen (4) und (5) verschwinden im



**Bild 5**  
Radialspannungsverlauf im Schnitt  $\varphi = 90^\circ$  für ausgewählte Faservolumenanteile in Abhängigkeit vom Radius  $\frac{r}{b}$

**Bild 3**  
Schubspannungsverlauf im Schnitt  $\varphi = 45^\circ$  für ausgewählte Faservolumenanteile in Abhängigkeit vom Radius  $\frac{r}{b}$



Schnitt  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  die Normalspannungskomponenten  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  und im Schnitt  $\varphi = 0$  bzw.  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  die Schubspannungen  $\tau$ .

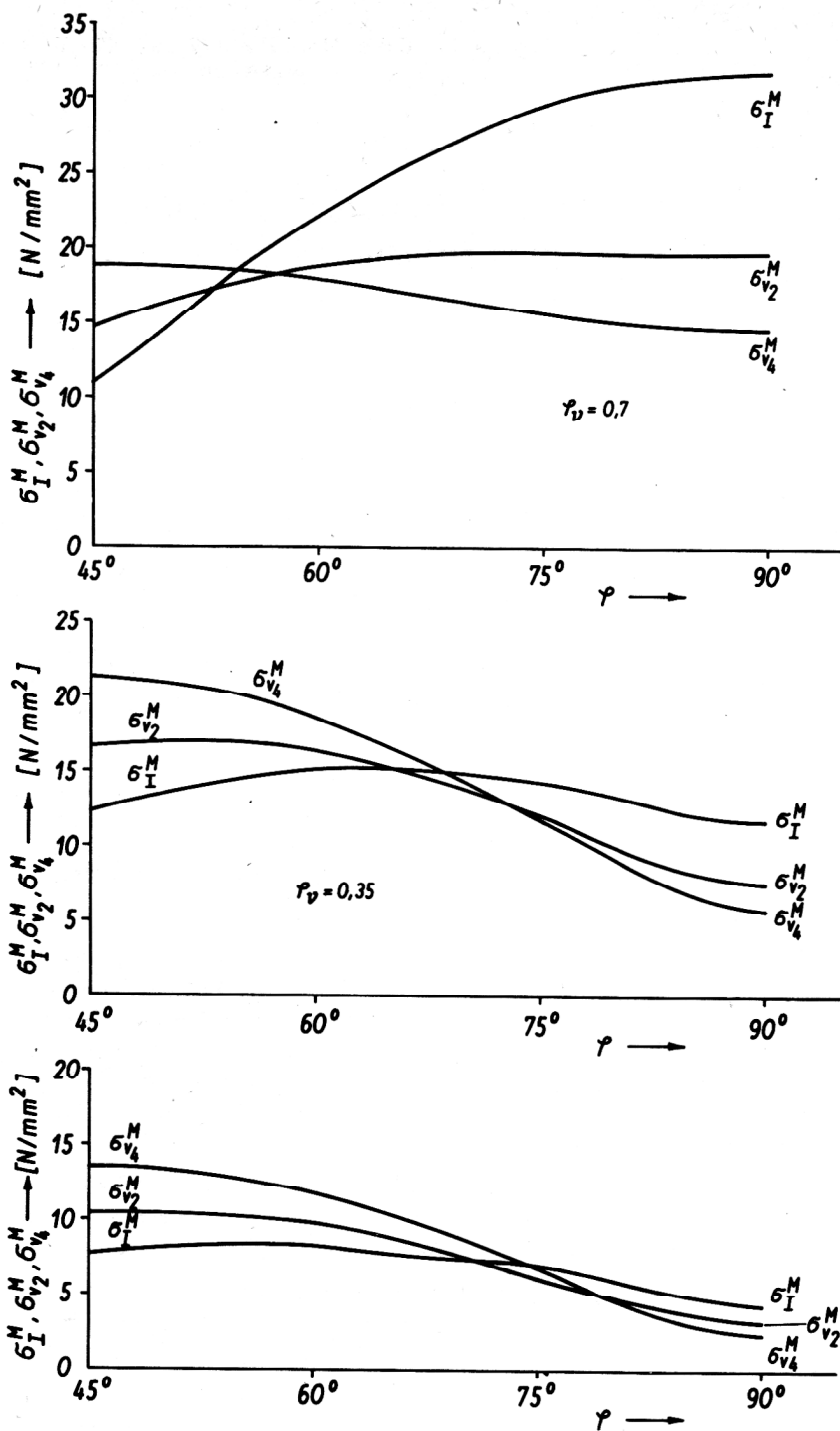
Der Verlauf der Schubspannungen für ausgewählte Faservolumenanteile im Schnitt  $\varphi = \pi/4$  geht aus Bild 3 hervor. Die größten Vergleichspannungswerte in diesem

Schnitt ergeben sich faserseitig (Index F) und matrixseitig (Index M) aus den Beziehungen:

$$\sigma_{v4}^F = \sqrt{3} \tau_1, \quad \sigma_{v4}^M = \sqrt{3} \tau_2.$$

Von besonderem Interesse ist die Spannungsuntersuchung im Matrixbereich, da die Einlagerung meist grö-

**Bild 4**  
Vergleichsspannungen an der Faser-Matrix-Grenzfläche (matrixseitig) für ausgewählte Faservolumenanteile



Anschrift der Verfasser:  
Dr.-Ing. Siegfried Holweg  
Prof. Dr.-Ing. habil. Wolfgang Pfefferkorn  
Technische Hochschule „Carl Schorlemmer“  
Leuna-Merseburg,  
Sektion Werkstofftechnik  
Wissenschaftsbereich Technische Mechanik  
4200 Merseburg, Gcusaer Str.

lere Spannungen aufnehmen kann. Bild 4 zeigt den Verlauf der Vergleichsspannungen  $\sigma_I^M, \sigma_{v2}^M, \sigma_{v4}^M$  an der Faser-Matrix-Grenzfläche matrixseitig. Im Schnitt  $\varphi = 90^\circ$  ist die Hauptspannung ( $\sigma_I = \sigma_r$ ) größer als die anderen Vergleichsspannungen. Mit zunehmendem Faservolumenanteil wächst der Einfluß der Radialspannung  $\sigma_{r2}$ . Der Maximalwert der Radialspannung im Schnitt  $\varphi = 90^\circ$  liegt nach (5) im Matrixbereich ( $K_2$  ist für alle Parameter negativ).

Wie aus dem Bild 5 ersichtlich, ist allerdings die Radialspannung in der Matrix nur geringfügig größer als an der Matrix-Faser-Grenzfläche.

Die vorliegende Untersuchung erlaubt eine Aussage über die Verteilung der interessierenden Spannung sowohl an der Faser-Matrix-Grenzfläche als auch an jeder beliebigen Stelle der Scheibe.

#### LITERATUR

- [1] Puck, A.: Zum Deformationsverhalten und Bruchmechanismus von unidirektionalem und orthogonalem Glasfaser-Kunststoff. *Kunststoffe* Bd. 55 (1965), 913.
- [2] Roth, S., Grüniger, G.: Beitrag zur Deutung des Quersugversagens von Stranglaminaten. *Kunststoffe* Bd. 59 (1969), 967.
- [3] Haberl, G.: Theoretische Bestimmung der Eigenschaften faserverstärkter Werkstoffe bei Belastung quer zur Faserrichtung. *ZAMM* Bd. 54 (1974), T 80.
- [4] Avramidis, I. E.: Ein finites Zwei-Komponenten-Element zur Erfassung hoher Spannungsänderungen in quer zur Faserrichtung belasteten, unidirektional faserverstärkten Verbundwerkstoffen. *Ing. Arch.* (1979), 13.
- [5] Скудра, А. М., Булавс, Ф. А.: Структурная теория армированных пластиков. Рига „Зинате“ 1978.
- [6] Urbanczyk, M.: Ein Beitrag zur Spannungsanalyse in gefüllten und kurzfaserverstärkten Platten. Diss. TH Leuna-Merseburg (1977).