

Zum Zusammenhang zwischen Fließbedingung und innerem Zustand bei plastisch verformbaren Materialien

Siegfried Koczyc

1. Allgemeine Bemerkungen zum Materialverhalten

Die Berücksichtigung der Eigenschaften des Materials und sein Verhalten unter Belastung durch äußere Kräfte sind für Festigkeitsuntersuchungen von großer Wichtigkeit. Da die Bestimmung des Spannungszustandes bei Bauteilen mit einer komplizierten geometrischen Struktur oft nur mit einem erheblichen rechentechnischen Aufwand möglich ist, begnügt man sich häufig mit einfachen Modellvorstellungen hinsichtlich des Materialverhaltens. Im Falle eines linear elastisch-isotropen Körpers braucht man zur Spannungs- und Verformungsberechnung als Materialgrößen nur den Elastizitätsmodul und die Querdehnungszahl. Damit können aber noch keine Aussagen über das Festigkeitsverhalten des Materials getroffen werden, sondern es ist die Angabe weiterer spezieller Materialkonstanten und Berechnungsvorschriften (Festigkeitsannahmen) notwendig. Ein Vergleich mit analogen aus dem errechneten Spannungszustand hergeleiteten Größen ermöglicht eine Beurteilung des Festigkeitsverhaltens des betreffenden Bauteils.

Da sich bei einer entsprechend hohen Belastung viele Materialien plastisch verformen, wurde eine Erweiterung hinsichtlich der mathematischen Beschreibung ihrer Eigenschaften notwendig. Die Einbeziehung bleibender Deformationen in die Konzeption des Materialverhaltens diente dabei im wesentlichen einer realen Berechnung des Spannungszustandes, während der Festigkeitsnachweis noch in derselben Weise wie bei einem elastischen Material geführt wird.

Mit einem solchen Vorgehen werden allerdings die Möglichkeiten, die die Plastizitätstheorie bietet, nicht ausgeschöpft. Geht man davon aus, daß bei einer rein elastischen Deformation der innere Zustand des Materials nach Be- und Entlastung unverändert ist, so kann man das Auftreten irreversibler Zustandsänderungen als eine Begleiterscheinung plastischer Deformationen ansehen. Der Begriff irreversibel ist hier im Zusammenhang mit einer Entlastung zu verstehen. Lediglich beim idealplastischen Material erfolgt die plastische Deformation ohne Änderung des inneren Zustandes, denn jede Zustandsänderung muß sich letztlich im Verhalten des Materials bei Belastung in irgendeiner Weise bemerkbar machen.

Eine genauere Erfassung derartiger Zustandsänderungen in Verbindung mit einer plastischen Deformation würde zweifellos eine wesentlich verbesserte Festigkeitsberechnung ermöglichen. Die Schwierigkeiten liegen sowohl in ihrer qualitativen als auch in ihrer quantitativen Bestimmung,

da sie ja nicht unmittelbar im makroskopischen Experiment definiert und erfaßt werden können. Trotzdem sind hier in letzter Zeit Fortschritte erzielt worden, die eine bessere theoretische Beschreibung der experimentell gewonnenen Ergebnisse gestatten und auch Zusammenhänge mit der metallphysikalischen Betrachtungsweise herstellen [1], [4].

2. Fließbedingung und Verfestigungsregeln

Es ist in der phänomenologischen Plastizitätstheorie üblich, einen Modellwerkstoff zu betrachten, der sich durch spezielle Eigenschaften auszeichnet:

1. Die gesamte differentielle Änderung des Deformationstensors setzt sich bei einer differentiell kleinen Laststeigerung aus dem elastischen und dem plastischen Anteil zusammen.
2. Beide Anteile sind zeitunabhängig.
3. Eine Zunahme der plastischen Deformation ist nur möglich, wenn der Spannungstensor – im weiteren als Spaltenvektor $\underline{\sigma}$ eingeführt – der Fließbedingung

$$F(\underline{\sigma}, h) = 0 \quad (1)$$

genügt, und eine weitere Belastung stattfindet, d. h.

$$F(\underline{\sigma} + d\underline{\sigma}, h) > 0. \quad (2)$$

4. Durch h werden bestimmte Parameter eingeführt, die vom inneren Zustand des Materials abhängig sind. Diese verändern sich infolge der plastischen Deformation so, daß nach einer Belastung durch $d\underline{\sigma}$ wieder gilt

$$F(\underline{\sigma} + d\underline{\sigma}, h + dh) = 0. \quad (3)$$

5. Für die plastischen Dehnungsinkremente gilt die Normalitätsbedingung

$$d\underline{\epsilon}_p = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} d\underline{\lambda} \quad (4)$$

mit dem zunächst noch unbestimmten Faktor $d\underline{\lambda}$.

Es ist klar, daß durch die genannten Eigenschaften des Modellwerkstoffes das wirkliche Verhalten des Materials nur näherungsweise dargestellt werden kann. Speziell über die Natur des Zusammenhangs zwischen dem Zustand desselben und den in h enthaltenen Parametern gibt es noch keine einheitliche Auffassung. Es kann als sicher gelten, daß sie von Mikroeigenzuständen abhängen, die durch die gestörte kristalline Struktur me-

tallischer Werkstoffe entstehen. Die Beschreibung aller möglichen Mikroeigen Spannungszustände innerhalb eines kleinen Volumenelementes erfordert eine sehr große Zahl von Parametern. Für eine effektive Berechnung ist es jedoch erforderlich, deren Zahl zu begrenzen. Eine Darstellung von (1) als quadratische Form

$$(\underline{\sigma}^T - \underline{a}^T) A (\underline{\sigma} - \underline{a}) - \sigma_F^2 = 0 \quad (5)$$

erscheint unter diesem Gesichtspunkt als eine starke Vereinfachung. Trotzdem kann man mit (5) schon wesentliche Effekte qualitativ und mit gewissen Einschränkungen auch quantitativ richtig darstellen. In $\underline{\sigma}$ sind die 3 Normal- und die 3 Schubspannungen zu einem Spaltenvektor zusammengefaßt. Das gleiche gilt für den Spannungszustand \underline{a} , der die Verschiebung der Fließfläche aus der zentralen Lage angibt. Die Größe des elastischen Bereiches wird durch σ_F angegeben und durch die 6×6 - Matrix A eine möglicherweise vorhandene Anisotropie. Bei kleinen plastischen Deformationen kann man noch Isotropie voraussetzen, und es gilt $A = A_0$ mit

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Mit $\underline{a} = 0$ geht (5) damit in die Huber- v. Mises-Hencky Fließbedingung über.

Aus (4) folgt für die Inkremente der plastischen Deformation

$$d\underline{\epsilon}_p = 2 A (\underline{\sigma} - \underline{a}) d\lambda. \quad (7)$$

Da die Vektoren $\underline{\sigma}$, \underline{a} und die Matrix A aufgrund der Symmetrie des Spannungstensors 6 bzw. 6×6 Elemente enthalten, erscheinen in dem Spaltenvektor $d\underline{\epsilon}_p$ die Gleitungen $d\gamma_{ijp} = 2 d\epsilon_{ijp}$ ($i \neq j$). Anstelle von $d\lambda$ führt man die Änderung des Umformgrades φ (plastische Vergleichsdehnung) ein, gemäß

$$d\lambda = \frac{d\varphi}{2\sigma_F} \quad (8)$$

und erhält aus (7)

$$d\underline{\epsilon}_p = \frac{d\varphi}{\sigma_F} A (\underline{\sigma} - \underline{a}). \quad (9)$$

Voraussetzungsgemäß ändern sich die in (5) enthaltenen Parameter bei einer plastischen Deformation. Es erscheint daher sinnvoll, sie zur Größe der plastischen

Deformationsinkremente in Beziehung zu setzen. Es gilt für die Änderung von

$$d\sigma_F = E_p d\varphi, \quad (10)$$

und für die Änderung von \underline{a} gilt die Pragersche Verfestigungsregel

$$d\underline{a} = c \frac{3}{2} B \frac{d\underline{\epsilon}_p}{d\varphi} d\varphi \quad (11)$$

mit der Diagonalmatrix

$$B = \text{diag} \left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right], \quad (12)$$

die aufgrund der Verkürzung der Spaltenvektoren von ursprünglich 9 auf 6 Elemente eingeführt werden muß.

Für die Änderung von A muß man die zusätzliche Forderung

$$(\underline{\sigma}^T - \underline{a}^T) dA (\underline{\sigma} - \underline{a}) = 0 \quad (13)$$

erheben, weil eine Änderung dieser Art bereits in (10) Berücksichtigung findet. Der Ansatz

$$dA = -D \left[\frac{d\underline{\epsilon}_p}{d\varphi} \frac{d\underline{\epsilon}_p^T}{d\varphi} - A \right] \quad (14)$$

genügt dieser Forderung und weicht damit von analogen Ansätzen, wie sie z. B. von Baltov und Sawczuk [7] eingeführt wurden, ab.

Der Einfluß des Materials kommt in den durch (10), (11) und (14) eingeführten Verfestigungsregeln durch die Größen E_p , c und D zum Ausdruck. Diese sind offenbar vom Zustand des Materials und vom Spannungszustand abhängig (Abschnitt 3).

Mit (10), (11) und (14) kann man $d\varphi$ durch die Spannungsänderung ausdrücken. Für einen Spannungspunkt $\underline{\sigma}$, der noch im Innern des durch (5) umschlossenen Bereiches liegt, gilt

$$(\underline{\sigma}^T - \underline{a}^T) A (\underline{\sigma} - \underline{a}) = \sigma_{v1}^2 < \sigma_F^2. \quad (15)$$

Für eine kleine Spannungsänderung $\Delta\underline{\sigma}$ folgt unter Berücksichtigung von (9), (10), (11) und (14) und unter Vernachlässigung von Größen höherer Ordnung zunächst $\Delta\varphi^*$

$$\Delta\varphi^* = \frac{(\underline{\sigma}^T - \underline{a}^T) A \Delta\underline{\sigma} - \frac{1}{2} (\sigma_F^2 - \sigma_{v1}^2)}{\sigma_F \left[E_p + \frac{3}{2} c \right]} \quad (16)$$

und es gilt

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi^* \quad \text{für} \quad \Delta\varphi^* > 0 \quad \text{und} \quad (17)$$

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{für} \quad \Delta\varphi^* \leq 0.$$

Mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes kann man in (16) $\Delta\underline{\sigma}$ durch die Dehnungsänderungen $\Delta\underline{\epsilon}$ ersetzen, und man erhält

$$\Delta \varphi^* = \frac{(\underline{\sigma}^T - \underline{a}^T) \mathbf{A} \mathbf{B} \Delta \underline{\epsilon} - \frac{1}{6G} (\sigma_F^2 - \sigma_{v1}^2)}{\sigma_F [1 + \frac{1}{3G} (E_p + \frac{3}{2} c)]} \quad (18)$$

Durch (16) bzw. (18) werden in Verbindung mit (17) auch Spannungsänderungen erfaßt, die nur zu einer elastischen Verformung führen, so daß eine Abfrage, ob sich der Ausgangspunkt im Innern des elastischen Bereiches oder auf seiner durch die Fließbedingung (5) definierten Grenze befindet, entfällt. Dies ist für numerische Berechnungen von Bedeutung, die eine Diskretisierung des Belastungsprogrammes erfordern.

3. Materialfunktionen und Zustandsgrößen

Die in (5) enthaltenen Parameter stehen in Beziehung zum inneren Zustand des Materials, d. h. sie hängen ab von der kristallinen Struktur, den Versetzungen und anderen Gitterfehlern und den daraus resultierenden Mikroeigenspannungszuständen. Eine Änderung dieses Zustandes bedingt eine Änderung dieser Parameter und umgekehrt. Es ist aber nicht möglich, denselben vollständig durch diese Parameter zu beschreiben. Ebenso kann man nicht jeden möglichen Zustand durch eine plastische Verformung realisieren. Andererseits werden ausgehend von einer gewissen Grundstruktur des Materials, die durch die Form der Materialfunktionen E_p , c und D festgelegt ist, mögliche Veränderungen, die durch eine plastische Verformung erreichbar sind, durch dieselben angenähert beschrieben. Da aber Größen, die auf den Zustand des Materials bezogen sind, von der Orientierung des Koordinatensystems unabhängig sein müssen, kommen nur invariante Größen in Frage. Diese werden mit h_i^* bezeichnet, und man kann daher schreiben

$$\begin{aligned} E_p &= E_p(h_1^*, \dots, h_N^*), \\ c &= c(h_1^*, \dots, h_N^*), \\ D &= D(h_1^*, \dots, h_N^*), \end{aligned} \quad (19)$$

wobei N die Zahl dieser Invarianten darstellt.

Invariante Größen sind einmal σ_F selbst, ferner der Parameter q , der durch

$$q = \frac{\underline{a}^T \mathbf{A} (\underline{\sigma} - \underline{a})}{\sigma_F^2} \quad (20)$$

definiert ist, sowie

$$p = \frac{\underline{a}^T \mathbf{A} \underline{a}}{\sigma_F^2} \quad (21)$$

und

$$\sigma_i^2 = \underline{\sigma}^T \mathbf{A} \underline{\sigma} \quad (22)$$

Zwischen σ_F , q , p und σ_i besteht aufgrund von (5) die Beziehung

$$\sigma_i^2 = \sigma_F^2 (1 + 2q + p). \quad (23)$$

Die einzelnen Parameter haben unterschiedliche Bedeutung. So gibt σ_F die Größe des elastischen Bereiches an, p ist ein Maß für die Verschiebung der Fließfläche aus der zentralen Lage und q beschreibt zusammen mit weiteren Parametern die Lage des Spannungspunktes auf der Fließfläche. Auf die Einführung weiterer invarianter Größen sei zunächst verzichtet. Geht man von der Voraussetzung aus, daß eine plastische Verformung immer zu einer entsprechenden irreversiblen Zustandsänderung führt, vom ideal elastisch-plastischen Material abgesehen, so folgt, daß σ_F mit der Wechselfestigkeit vergleichbar sein muß. Kann der Werkstoff eine beliebige Zahl von Lastwechseln ertragen, so können bei jedem Lastwechsel offenbar nur reversible, d. h. elastische Zustandsänderungen erfolgen. Erfahrungsgemäß vermindert sich die Wechselfestigkeit mit wachsender Zugbelastung. Aus diesen Überlegungen folgt weiter, daß das oft noch verwendete Modell der isotropen Verfestigung, bei dem sich der elastische Bereich mit der Belastung ständig vergrößert, nicht sinnvoll ist.

Wenn sich, wie die Erfahrung zeigt, der durch die Größe der Wechselfestigkeit festgelegte elastische Bereich infolge einer Zugbelastung verringert, so muß E_p für diesen Fall negativ sein. Andererseits muß sich für den Nenner in (18) ein positiver Wert ergeben. Das bedeutet, daß c einen entsprechend großen Wert besitzen muß. Die Größe von $\Delta \varphi$ und damit auch der Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kurve des Zugversuchs wird daher wesentlich durch c bestimmt. Es zeigt sich weiter, daß $\Delta \varphi$ und damit c von der Verschiebung des elastischen Bereichs aus der zentralen Lage und von der Lage des Spannungspunktes auf der Fließfläche (5) abhängig sind. Dieser Tatsache kann dadurch Rechnung getragen werden, daß man c in erster Näherung als Funktion des Parameters q auffaßt. Die Funktion $c = c(q)$ nimmt wegen (18) für $q \leq 0$ sehr große Werte an und vermindert sich für $q > 0$. Dies wird am Beispiel des einachsigen Spannungszustandes (Bild 1) deutlich.

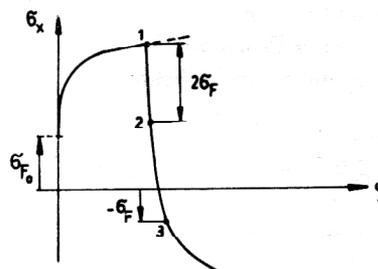


Bild 1
Zugversuch mit Lastwechsel

Aus (20) folgt mit $a_y = a_z = -\frac{1}{2} a_x$

$$q = \frac{1}{\sigma_F^2} (\sigma_x - \frac{3}{2} a_x) \frac{3}{2} a_x, \quad (24)$$

und es ergibt sich weiter für Pkt. 1 im Bild 1 aus (24)

$$q_1 = \frac{\sigma_{x1}}{\sigma_F} - 1 \quad (25)$$

und für Pkt. 2

$$q_2 = - \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_F} + 1 \right) \quad (26)$$

bzw.

$$q_2 = -q_1$$

Setzt man nun in erster Näherung $E_p = 0$, so folgt aus (26) für zunehmende Belastung und $\sigma_x > \sigma_F$

$$\frac{d\sigma_x}{d\varphi} = \frac{3}{2} c(q), \quad q = \frac{\sigma_x}{\sigma_F} - 1 \quad (27)$$

Durch Integration von (27) folgt dann $\sigma_x = \sigma_x(\varphi)$.

4. Verallgemeinerung des Potenzansatzes als Beispiel

Für viele Zwecke der Anwendung und auch der Interpretation spezieller Versuchsergebnisse wird die σ - φ -Beziehung in der Form

$$\sigma = k \varphi^n \quad (28)$$

dargestellt.

Diese zeichnet sich durch ihre Einfachheit aus, doch kann man mit ihr kein allgemeines Belastungsprogramm realisieren. Hinzu kommt das Fehlen eines elastischen Bereiches in (28). Diesen Nachteil kann man durch den Ansatz

$$\sigma = \sigma_F + k_1 [(\varphi + \varphi_0)^{n_1} - \varphi_0^{n_1}], \quad (\sigma > \sigma_F) \quad (29)$$

beseitigen. Darin ist φ_0 eine kleine Größe, die zur Realisierung einer endlichen Ableitung $\frac{d\sigma}{d\varphi}$ für $\varphi = 0$ eingeführt wird. Setzt man

$$\varphi_0 = \left(\frac{\sigma_F}{k} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (30)$$

so gilt $k_1 \approx k$ und $n_1 \approx n$

Aus (29) folgt unter Beachtung von (27) zunächst φ als Funktion von q und weiter schließlich

$$c = \frac{2}{3} k n \left(\frac{\sigma_F}{k} q + \varphi_0^n \right)^{\frac{n-1}{n}} \quad (31)$$

Für $q = 0$ ergibt sich unter Beachtung von (30)

$$c(q=0) = \frac{2}{3} \frac{\sigma_F^n}{\varphi_0}, \quad (32)$$

also wegen $\varphi_0 \ll 1$ ein sehr großer Wert.

Analog geht (31) mit $m = \frac{1}{n} - 1$ über in

$$c = \frac{2}{3} \frac{\sigma_F^n}{\varphi_0} \frac{1}{(1+q)^m} \quad (q > 0). \quad (33)$$

Für $q < 0$ wird näherungsweise für c der Wert nach (32) angenommen. In dieser Darstellung gilt $E_p = 0$ und $D = 0$. Zur Erläuterung sei das nachfolgende Zahlenbei-

spiel angeführt. Für einen hochfesten Stahl liegen die Werte $k = 1600$ und $n = 0,1$ vor. Derartige Stähle besitzen eine Zug-Druck-Wechselfestigkeit von ca. 500 N/mm^2 . Setzt man also $\sigma_F = 500 \text{ N/mm}^2$, so folgt zunächst φ_0 aus (30) zu $\varphi_0 = 8,882 \cdot 10^{-6}$ und weiter $c(q=0) = 3,753 \cdot 10^6 \text{ N/mm}^2$. Der Verlauf der Funktion $c(q)$ ist in Bild 2 dargestellt, wobei für c eine logarithmische Darstellung gewählt wurde.

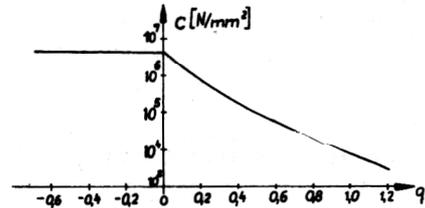


Bild 2
Darstellung der Funktion $c(q)$

Die zugehörige σ - φ -Kurve zeigt Bild 3. Es wurden 3 typische Belastungsvarianten dargestellt:

1. Monoton anwachsende Belastung,
2. Entlastung von Punkt P und erneute Belastung,
3. Entlastung von Punkt P und Lastumkehr (Druckbelastung).

Da nur eine Abhängigkeit $c(q)$ vorausgesetzt wurde, ergibt sich auch bei Entlastung und erneuter Belastung sowie Lastumkehr die gleiche Form der σ - φ -Kurve. Dabei ist dieselbe je nach der Größe der plastischen Vorverformungen in Richtung der φ -Achse verschoben (Bild 3). Damit wird der Bauschinger Effekt qualitativ bereits richtig erfaßt. Quantitativ genügt dieses vereinfachte Modell jedoch noch nicht allen Anforderungen, so daß eine Verbesserung notwendig erscheint.

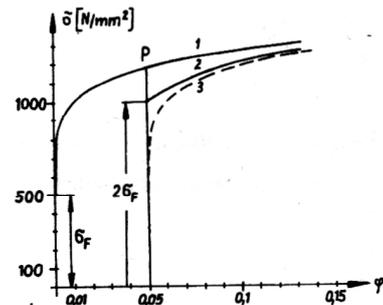


Bild 3
 σ - φ -Kurve

5. Verbesserte Ansätze für die Materialfunktionen

Die Ausführungen der Abschnitte 3. und 4. haben gezeigt, daß der sogenannte „kinematische“ Anteil der Verfestigung, der durch c innerhalb der Pragerschen Verfestigungsregel festgelegt ist, die Form der Spannungs-Dehnungs-Kurve wesentlich bestimmt. Im zweiten Schritt erscheint es daher sinnvoll, auch die Veränderlichkeit von σ_F in die Überlegungen einzubeziehen, wäh-

rend D zunächst noch näherungsweise gleich Null gesetzt werden kann. Dabei ist zu beachten, daß die Materialfunktionen E_p und c sicher nicht unabhängig von einander sind.

Es wird daher für c der Ansatz

$$c = c_0 - c_1 \quad (34)$$

gewählt.

Dem liegt folgende Überlegung zugrunde. Die für die plastische Deformation aufzuwendende spezifische Arbeit wird zum Teil in Wärme umgesetzt, zum Teil aber auch in Form von Mikroeigen Spannungszuständen im Inneren des Materials gespeichert [4]. Es gilt

$$dW_p = \underline{\sigma} d\underline{\epsilon}_p, \quad (35)$$

und es folgt weiter unter Berücksichtigung von (9) und (20)

$$dW_p = \sigma_F d\varphi + q \sigma_F d\varphi. \quad (36)$$

Der Anteil $\sigma_F d\varphi$ tritt auch bei ideal elastisch-plastischem Material auf und wird in Wärme umgesetzt. Der zweite Anteil tritt nur bei sich verfestigendem Material auf. Nimmt man an, daß dieser Anteil vollständig im Inneren gespeichert wird, so ist damit ein sehr steiler Anstieg der Spannungs-Dehnungs-Kurve verbunden. Diesem Anstieg entspricht die Funktion c_0 und das Material würde ein ausgesprochen sprödes Verhalten zeigen, wenn nicht Effekte auftreten, die zu einer Kompensation von Versetzungen untereinander bzw. an den Korngrenzen und damit zu einer weiteren Verminderung der inneren Energie führen. Dieser Kompensationseffekt kommt in der Funktion c_1 zum Ausdruck. Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich für den Anteil der spezifischen Energie dW_{pe} der in Form von Mikroeigen Spannungszuständen gespeichert wird

$$dW_{pe} = \frac{c}{c_0} q \sigma_F d\varphi. \quad (37)$$

Man kann andererseits annehmen, daß die Größe des verbleibenden elastischen Bereiches in Beziehung zu der inneren Energie steht und mit einem noch zu bestimmenden Faktor k_p schreiben

$$E_p = -k_p \frac{c}{c_0} q \sigma_F. \quad (38)$$

Die Funktionen c_0 und c sollten zunächst so einfach wie möglich gewählt werden. Für c_0 wird daher analog zur (32) der Ansatz

$$c_0 = \frac{2}{3} \frac{n}{\varphi_0} \sigma_F \quad (39)$$

mit veränderlichem σ_F gemacht.

Für den einachsigen Zug folgt aus (16)

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = E_p + \frac{3}{2} c, \quad (\sigma > \sigma_F). \quad (40)$$

Setzt man nun k_p als konstant voraus, so ergibt sich aufgrund von (25), (38), (39) und (40) nach Integration

einer Differentialgleichung die Fließspannung σ_F als Funktion von σ . Mit der Konstanten

$$a = k_p \frac{\varphi_0}{n} \quad (41)$$

folgt

$$\sigma_F = \frac{a}{1+a} \sigma + \frac{1}{1+a} \sqrt{\sigma_{F0}^2 (1+a) - a \sigma^2}. \quad (42)$$

Da der Radikand in (42) nicht negativ werden kann, ergibt sich als maximal mögliche Spannung

$$\sigma_{\max} = \sigma_{F0} \sqrt{\frac{1+a}{a}}, \quad (43)$$

und die zugehörige Fließspannung ist

$$\sigma_F (\sigma = \sigma_{\max}) = \sigma_{F0} \sqrt{\frac{a}{1+a}}. \quad (44)$$

Die Änderung der inneren Energie steht wegen $k_p = \text{konst.}$ in direkter Beziehung zur Änderung der Fließspannung

$$W_{pe} = \frac{1}{k_p} (\sigma_{F0} - \sigma_F). \quad (45)$$

Die Beziehungen (42) bis (45) gelten unabhängig von der Form der σ - φ -Beziehung, d. h. sowohl für relativ spröde als auch für duktile Materialien.

Setzt man weiter (29) für eine Erstbelastung als gültig voraus, so folgt für φ zunächst aus (29) und (30)

$$\varphi = \varphi_0 \left[\left(\frac{\sigma}{\sigma_{F0}} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right], \quad \sigma > \sigma_{F0} \quad (46)$$

und damit für $\sigma = \sigma_{\max}$

$$\varphi_{\max} = \varphi_0 \left[\left(\sqrt{\frac{1+a}{a}} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right]. \quad (47)$$

Aus (38) und (40) erhält man schließlich die Funktion c , die diesem Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kurve angepaßt ist:

$$c = \frac{2}{3} \sigma_{F0} \frac{n}{\varphi_0} \left(\frac{\sigma_{F0}}{\sigma_F} \right)^m \frac{1}{(1+q)^m} \frac{1}{1-aq} \quad (48)$$

mit

$$0 \leq q < \frac{1}{a}, \quad m = \frac{1}{n} - 1.$$

Für $q < 0$ soll wieder gelten $c = c_0$

Neben σ_{F0} , n und φ_0 ist nun k_p als weiterer Parameter anzugeben. Es liegt nahe, k_p bzw. a so zu wählen, daß σ_{\max} der Bruchspannung in etwa entspricht. Zumindest darf σ_{\max} nicht kleiner als diese werden. Mit den Zahlenwerten aus Abschnitt 4 ergibt sich für $a = 0,1$, $\sigma_{F0} = 500 \text{ N/mm}^2$ eine maximale Spannung $\sigma_{\max} = 1658,3 \text{ N/mm}^2$ und die zugehörige Fließspannung ist $\sigma_F (\sigma =$

$\sigma_{\max}) = 150 \text{ N/mm}^2$, also eine beträchtliche Verringerung des elastischen Bereiches. Die Konstante k_p wird aus (41) zu $k_p = 1125,8$ berechnet. Damit ergibt sich für die innere Energie W_{pe} nach (45) der Wert $W_{pe\max} = 0,31 \text{ Nmm/mm}^3$. Aus (47) bestimmt man schließlich $\varphi_{\max} = 1,43$. Es sei abschließend bemerkt, daß es sich bei W_{pe} nicht um die gesamte innere Energie sondern nur um die Änderung nach der plastischen Deformation handelt.

6. Zusammenfassung und Einschätzung

Die Realisierung des Konzepts der Fließbedingung für elastisch-plastisch verformbare Materialien führt bereits unter vereinfachenden Annahmen zu Aussagen, die besonders für Festigkeitsberechnungen interessant sind. Die Beschreibung des Zustandes des Materials durch die in der Fließbedingung enthaltenen Parameter hat sich dabei als tragfähige Grundlage erwiesen. Die Wahl wesentlicher invarianter Größen und die Formulierung entsprechender Materialfunktionen bilden das eigentliche Problem im Hinblick auf eine praktische Anwendung. Je nach dem verfolgten Zweck können aber auch schon vereinfachte Materialfunktionen Verwendung finden. Für Festigkeitsberechnungen bedeutsam erscheint eine möglichst genaue Bestimmung der inneren Energie W_{pe} , die in Form von Mikroeigenstressungen im Material gespeichert ist. Da nur eine begrenzte Energiemenge dieser Art im Material gespeichert werden kann, besteht die Möglichkeit, ein Versagenskriterium $W_{pe} = W_{pe\max}$ einzuführen, welches prinzipiell für beliebig wechselnde Belastung verwendbar ist. Über die Größe dieser Energie liegen nur wenig Angaben vor. Von Kafka [4] wurden gleichfalls Untersuchungen zur Bestimmung von W_{pe} durchgeführt und mit experimentellen Resultaten verglichen. Berechnungen, die auf der Grundlage der hier vorgestellten Theorie durchgeführt wurden, zeigten bei entsprechender Parameterwahl eine gute Übereinstimmung mit den in [4] angegebenen Werten.

Von Bergander [5], [6] wurde eine Standardformulierung plastischer Deformationsgesetze angegeben, in die sich die hier vorgestellte Theorie einordnet. Schwieriger ist es, eine Verbindung zu der von Backhaus [8] entwickelten Integraldarstellung herzustellen. In weiteren in der letzten Zeit erschienenen Veröffentlichungen zur Theorie der Plastizität [9], [10] rückte die Bestimmung der Zustandsänderungen immer mehr in den Mittelpunkt.

Die Möglichkeiten, die die Theorie bietet, sind mit den in 4. und 5. vorgestellten Beispielen keineswegs erschöpft. Eine Änderung der Matrix A , also eine echte Anisotropie, wurde noch nicht berücksichtigt, ebenso können die Materialfunktionen noch durch weitere invariante Parameter erweitert werden.

Hier sollte insbesondere die hydrostatische Spannung berücksichtigt werden, um das unterschiedliche Verhalten bei Zug und Druck zu erklären. Bei entsprechend hoher Druckbeanspruchung vermindert sich die innere Energie und es kommt zu einer echten Verfestigung des Materials.

Die hier entwickelte Theorie wurde bereits zur Berücksichtigung elastisch-plastischer Verformungen in Finite-Elemente-Programmen benutzt.

LITERATUR

- [1] Koczyk, S.: Die Kontinuumstheorie der Plastizität und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme. Diss. B. TH „Otto v. Guericke“ Magdeburg (1979).
- [2] Kafka, V.: Zur Thermodynamik der plastischen Verformung. ZAMM 54 (1974), S. 649 – 657.
- [3] Kafka, V.: On Constitutive Equations of Quasihomogeneous Materials. ZAMM 59 (1979), S. 423 – 430.
- [4] Kafka, V.: Strain-Hardening and Stored Energy. Acta techn. CSAV 1979, Nr. 2, S. 199 – 216.
- [5] Bergander, H.: Eine verallgemeinerte Darstellung inelastischer Deformationsgesetze zur Erleichterung der numerischen Lösung von Anfangs-Randwertproblemen. ZAMM 58 (1978) S. 489 – 499.
- [6] Bergander, H.: Das Deformationsgesetz in Rechenprogrammen für Bauteile aus inelastischem Material. Techn. Mechanik 1 (1980), S. 57 – 61.
- [7] Baltov, A., Sawczuk, A.: A rule of anisotropic hardening. Acta Mech. Vol. 1/2 (1965).
- [8] Backhaus, G., Richter, K.: Deformationsgesetze des plastischen Materialverhaltens auf der Grundlage von Versuchsergebnissen, Techn. Mechanik 2 (1981) 2, S. 36 – 46.
- [9] Hsieh S. S., Ting, E. C., Chen, W. F.: A plastic-fracture model for concrete. Int. J. of Sol. and Struct. Vol. 18 (1982) S. 181 – 197.
- [10] Besdo, D.: Zur Formulierung von Stoffgesetzen der Plastomechanik im Dehnungsraum nach Ilijushins Postulat. Ing. Arch. 51 (1981) S. 1 – 8.

Anschrift des Verfassers

Doz. Dr. sc. techn. Siegfried Koczyk
Technische Hochschule
„Otto von Guericke“
Sektion Maschinenbau
3010 Magdeburg
Bierutplatz 5