

Lineare und physikalisch nichtlineare Faltwerk-Statik mittels hybrider finiter Elemente

H. Müller, B. Möller

1. Einleitung

Für Faltwerke sind die in ihnen enthaltenen Kanten und Ecken charakteristisch, d. h. Unstetigkeiten in C^1 . Das in [1] angegebene hybride Element gestattet eine einfache Beschreibung der Verträglichkeiten zwischen den Verdrehungen der FEM-Knoten und denen der Elementränder auch auf den Kanten. Da mit den Spannungsansätzen des hybriden Elementes die Gleichgewichtsbedingungen im Innern streng erfüllt werden, sind ausreichend glatte Schnittkraftfunktionen mit weniger Aufwand erreichbar als bei Verwendung von Verschiebungselementen.

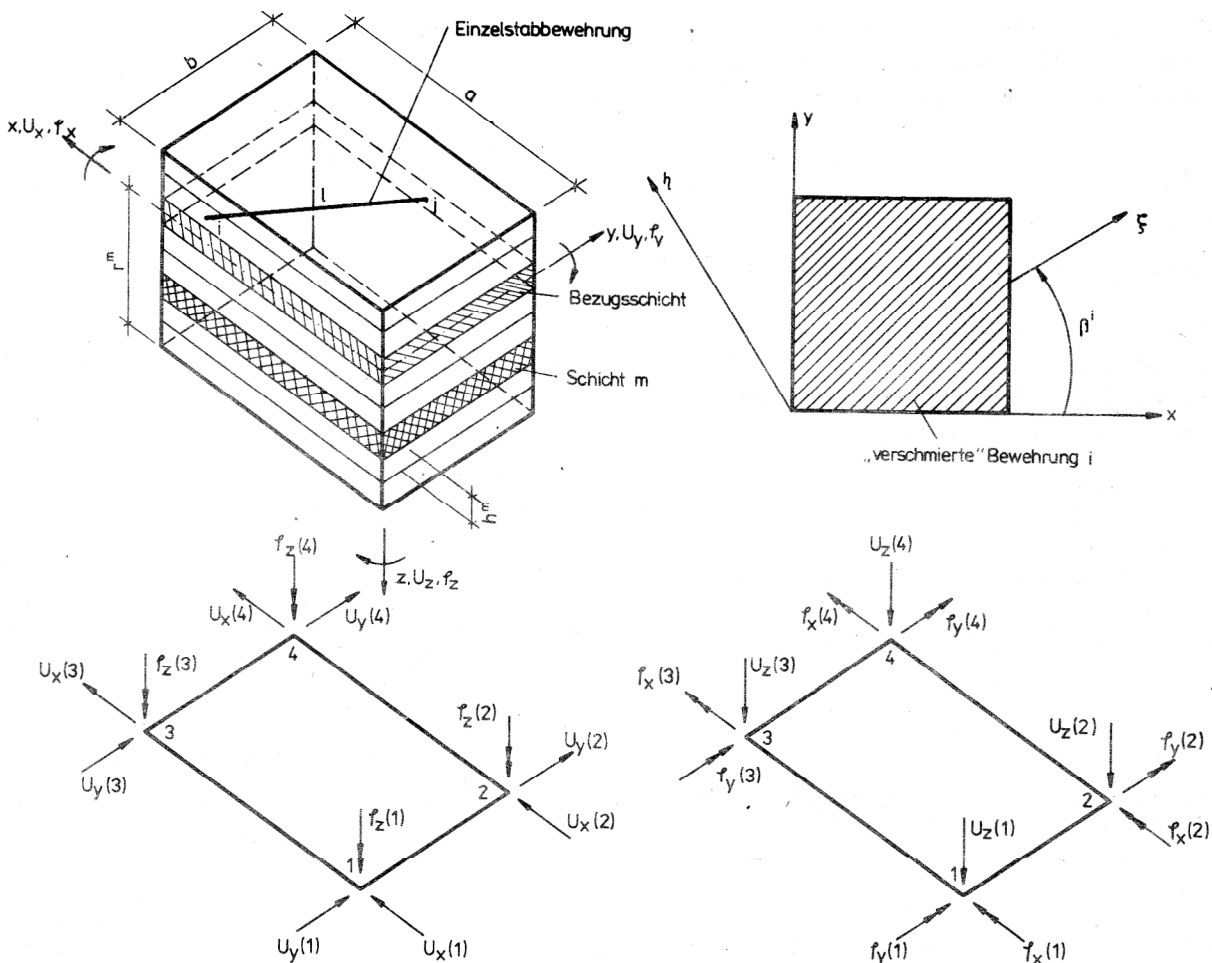
Die im Element zugelassenen Schichten können beliebig anisotrop sein. Durch Ausnutzen der Schichtanisotropie und über Anfangsspannungen kann das physikalisch nichtlineare Verhalten von Faltwerken aus Stahlbeton erfaßt werden.

2. Algorithmenübersicht für den linearen Bereich

Das Funktional der Ergänzungsenergie, erweitert nach Lagrange um die statischen Übergangsbedingungen zwischen den finiten Elementen, lautet für alle n hybriden Elemente eines Faltwerkes [1] unter Einbeziehung auch von Einzelstabbewehrung S

$$\begin{aligned} \pi^* = \sum_{e=1}^n & \left[\frac{1}{2} \underline{\beta}^T \cdot \underline{H} \cdot \underline{\beta} + \underline{\beta}^T \cdot \underline{H} \cdot \underline{\bar{\beta}} + \underline{\beta}^T \cdot \underline{h} \cdot (\varphi_0 - \varphi_0) + B_1 \right. \\ & \left. - \underline{\bar{\beta}}^T \cdot \underline{T} \cdot \underline{q} - \underline{\beta}^T \cdot \underline{T} \cdot \underline{q} - \underline{\beta}^T \cdot \underline{T} \cdot \underline{q} + \underline{Q}_0^T \cdot \underline{q} - \right. \\ & \left. (\underline{S}_{ij}^1)^T \cdot \underline{Z}_{ij}^1 \cdot \underline{q} - (\underline{S}_{ij,0}^1)^T \cdot \underline{Z}_{ij}^1 \cdot \underline{q} \right] \quad (1) \end{aligned}$$

Bild 1
Geschichtetes Faltwerkelement mit „verschmierter“ Bewehrung und Einzelstabbewehrung sowie Verschiebungsfreiheitsgraden der Knoten



Dabei sind \underline{q} die Freiwerte des Rand-Verschiebungsansatzes (Knoten-Verschiebungsfreiheitsgrade, vgl. Bild 1)

$$\underline{u} = \underline{L} \cdot \underline{q} \quad (2)$$

und $\underline{\beta}$ die Freiwerte des Spannungsansatzes

$$\underline{s} = \underline{P} \cdot \underline{\beta} + \overline{\underline{P}} \cdot \overline{\underline{\beta}} \quad (3)$$

Der erste Term rechts in Gl. (3) gehört zu den Lösungen der homogenen differentialen Gleichgewichtsbedingungen, der zweite zu den Partikulärlösungen für die Belastung. Weiter sind

$$\underline{H} = \int_{A^e} \underline{P}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{P} dA^e \quad \overline{\underline{H}} = \int_{A^e} \underline{P}^T \cdot \underline{A} \cdot \overline{\underline{P}} dA^e \quad (4), (5)$$

$$\underline{h} = \int_{A^e} \underline{P}^T dA^e \quad \underline{\varphi}_\sigma = \underline{A} \cdot \sum_{m=0}^s (\underline{G}^m)^T \cdot \underline{s}_{o,\sigma}^m \quad (6), (7)$$

$$\underline{A}^{-1} = \sum_{m=0}^s \left[\begin{array}{c|c} \underline{h}^m \cdot \underline{D}^m & \underline{r}^m \cdot \underline{h}^m \cdot \underline{D}^m \\ \hline \underline{r}^m \cdot \underline{h}^m \cdot \underline{D}^m & \underline{h}^m \cdot (\underline{r}^m)^2 \cdot \underline{D}^m + \frac{(\underline{h}^m)^3}{12} \cdot \underline{D}^m \end{array} \right] \quad (8)$$

\underline{D}^m ist die Elastizitätsmatrix einer Schicht, $\underline{s}_{o,\sigma}^m$ enthält die Anfangsspannungen (vgl. auch Gl. (20)) und \underline{G}^m den Abstand der Schicht m zur Referenzschicht. \underline{S}_{ij}^1 faßt die Einzelkräfte des Bewehrungsstabes l an den Durchstoßpunkten i und j auf dem Rand des Flächenelementes zusammen - $\underline{S}_{ij,o}^1$ sind bekannte Anfangsstabkräfte -, und \underline{Z}_{ij}^1 verknüpft die Knotenfreiheitsgrade \underline{q} mit den Verschiebungen \underline{u}_{ij}^1 der Punkte i und j .

$$\underline{u}_{ij}^1 = \underline{Z}_{ij}^1 \cdot \underline{q} \quad (9)$$

Weiter bedeuten in Gl. (1)

$\overline{\underline{q}}$ Vektor der vorgeschriebenen Knotenverschiebungen

$\underline{\varphi}_o$ Vektor der Verzerrungen der Referenzschicht und der Krümmungen

\underline{B}_1 von der Flächenbelastung und von den Anfangsspannungen abhängiger Term

$$\underline{Q}_o = -\overline{\underline{\beta}}^T \cdot \overline{\underline{T}} + \int_{O_r^e} \underline{S}_o^T \cdot \underline{L} dO_r^e + \underline{S}_K^T$$

\underline{S}_o stetige Randlasten längs des Randes eines Elementes e

\underline{S}_K konzentrierte Kräfte in den Knotenpunkten

$$\underline{T} = \int_{O_r^e} \underline{R}^T \cdot \underline{L} dO_r^e \quad \overline{\underline{T}} = \int_{O_r^e} \overline{\underline{R}}^T \cdot \underline{L} dO_r^e$$

Der Verlauf der Schnittkräfte \underline{p}_r^e am Rand O_r^e des Elementes folgt aus Gl. (3) zu

$$\underline{p}_r^e = \underline{R} \cdot \underline{\beta} + \overline{\underline{R}} \cdot \overline{\underline{\beta}}$$

Aus der Bedingung für die Stationarität von $\overline{\underline{\pi}}$ und nach Elimination der Spannungsfreiwerte $\underline{\beta}$

$$\underline{\beta} = -[\underline{H}^{-1} \cdot \underline{H} \cdot \overline{\underline{\beta}} + \underline{H}^{-1} \cdot \underline{h}(\underline{\varphi}_o - \underline{\varphi}_\sigma) - \underline{H}^{-1} \cdot \underline{T} \cdot \overline{\underline{q}} - \underline{H}^{-1} \cdot \underline{T} \cdot \underline{q}] \quad (10)$$

verbleibt das Gleichungssystem für die Knotenverschiebungen \underline{q}

$$-\sum_{e=1}^n [\underline{k}^e \cdot \underline{q} + \sum_l (\underline{Z}_{ij}^l)^T \cdot \underline{k}^l \cdot \underline{Z}_{ij}^l \underline{q} - (\underline{T}^T \cdot \underline{H}^{-1} \cdot \overline{\underline{H}} \cdot \overline{\underline{\beta}} + \underline{T}^T \cdot \underline{H}^{-1} \cdot \underline{h} \cdot (\underline{\varphi}_o - \underline{\varphi}_\sigma) - \underline{T}^T \cdot \underline{H}^{-1} \cdot \underline{T} \cdot \overline{\underline{q}} + \underline{Q}_o - \sum_l (\underline{Z}_{ij}^l)^T \cdot \underline{S}_{ij,o}^l)] = 0 \quad (11)$$

\underline{k}^e ist die Elementsteifigkeitsmatrix des geschichteten Elementes ohne Einzelstabbewehrung

$$\underline{k}^e = \underline{T}^T \cdot \underline{H} \cdot \underline{T} \quad (12)$$

Unter Einbeziehung der Einzelstabbewehrung ergibt sich die Elementsteifigkeitsmatrix

$$\underline{K}^e = \underline{T}^T \cdot \underline{H} \cdot \underline{T} + \sum_l (\underline{Z}_{ij}^l)^T \cdot \hat{\underline{k}}^l \cdot \underline{Z}_{ij}^l \quad (13)$$

Die Steifigkeitsmatrix $\hat{\underline{k}}^l$ des Bewehrungsstabes l (vgl. Bild 2) lautet im Elementkoordinatensystem x, y, z (A - Stabfläche, E - Elastizitätsmodul, l_{ij} - Stablänge)

$$\hat{\underline{k}}^l = \frac{A \cdot E}{(l_{ij})^3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} d^2 & d \cdot c & 0 & -d^2 & -d \cdot c & 0 \\ d \cdot c & c^2 & 0 & -d \cdot c & -c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -d^2 & -d \cdot c & 0 & d^2 & d \cdot c & 0 \\ -d \cdot c & -c^2 & 0 & d \cdot c & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (14)$$

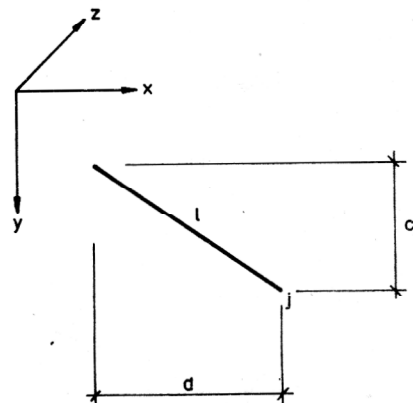


Bild 2
Bewehrungsstab l im Elementkoordinatensystem x, y, z

3. Zur Anwendung im linearen Bereich

Im Programmsystem FALT-FEM stehen z. Z. einschichtige hybride Rechteck- und Dreieckelemente sowie mehrschichtige hybride Rechteckelemente zur Verfügung. Diese Elemente sind mit Stab-Verschiebungselementen beliebig koppelbar, so daß mittige oder außermittige Versteifungen erfaßt und auch Stabtragwerksteile angeschlossen werden können.

Im Beispiel des Kohlebunkers nach Bild 3 a, b wurden einschichtige Rechteck- und Dreieckelemente sowie mittig und außermittig angeschlossene Stabelemente verwendet. Für einen aufgeständerten Wasserbehälter gemäß Bild 3 c zeigt Bild 3 d die erhaltene Längskraftverteilung

in den Wänden. In der Mitte der langen Wand ist quasi die Naviersche Verteilung bereits erreicht, während in der Mitte der kurzen Wand noch die für die Wandscheibe typische Verteilung vorliegt.

Das mehrschichtige Rechteckelement wurde bei der Berechnung einer Stahlprofilblech-Beton-Verbundplatte (Bild 4) gemeinsam mit exzentrischen Stabelementen eingesetzt. Der Beton wurde in 4 Schichten unterteilt, die horizontalen Bereiche des Trapezprofilbleches bilden eine fünfte Schicht. Die geneigten Bereiche wurden als exzentrisch angeschlossene Stabelemente modelliert. Bild 5 gibt das Elementnetz mit 70 mehrschichtigen Rechteckelementen, 70 exzentrisch angeschlossenen Stabelementen und 90 Knoten wieder. Der Vergleich der Biegemomente in Plattenmitte mit denen der isotropen

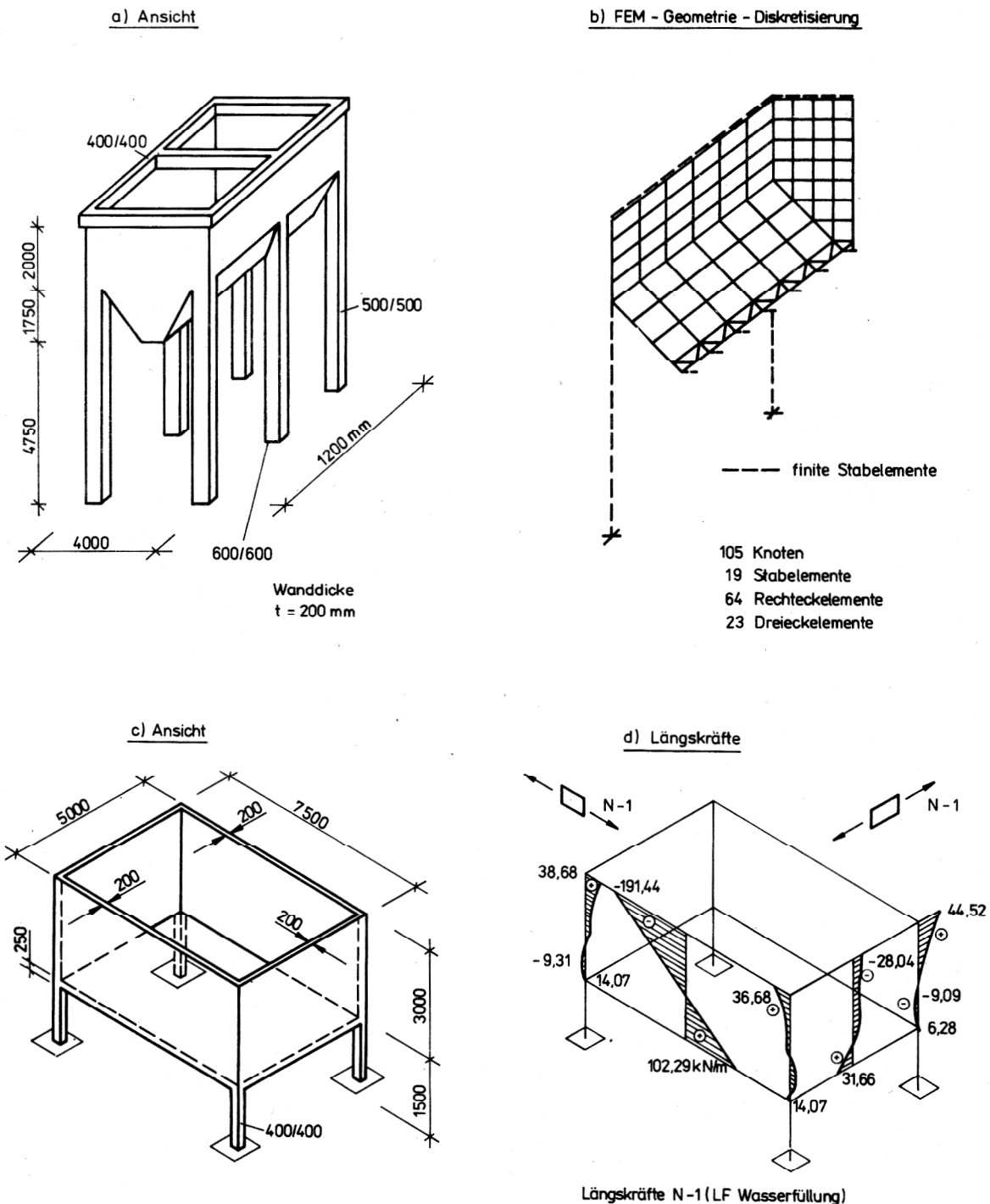
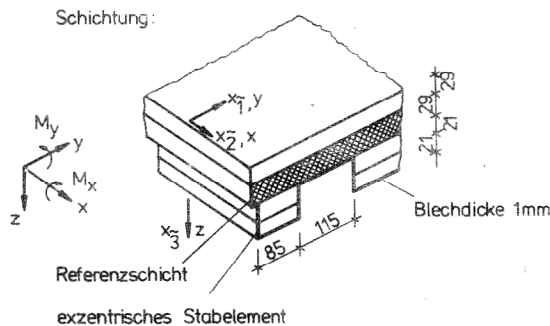
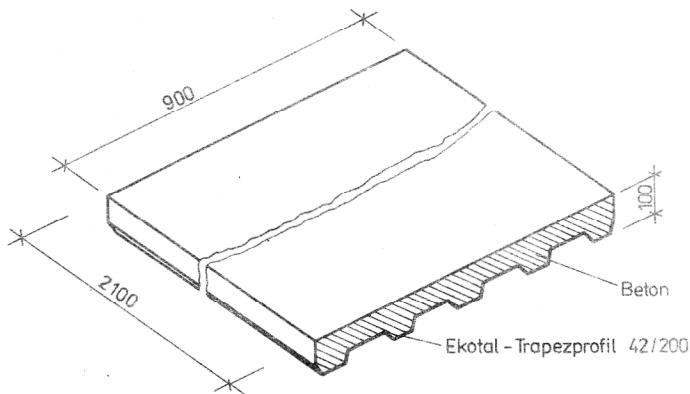


Bild 3
a), b) Kohlebunker – Ansicht und Vernetzung c), d) Wasserbehälter – Ansicht und Längskräfte in den Wänden

Tabelle 1
Stahlprofilblech-Beton-Verbundplatte, Vergleich der Biegemomente in Plattenmitte

	isotrope Rechteckplatte exakte Lösung	isotrope Rechteckplatte FALT-FEM-einschichtig	Verbundplatte FALT-FEM-mehrschichtig
M_x	0,874 kNm/m	0,88 kNm/m	0,80 kNm/m
M_y	0,251 kNm/m	0,27 kNm/m	0,40 kNm/m



Belastung: konstante Flächenlast $p = 10 \text{ kN/m}^2$
Randbedingungen: allseitig gelenkig gelagert

Bild 4
Stahlprofilblech-Beton-Verbundplatte, Schichtenmodellierung

Rechteckplatte gemäß Tabelle 1 zeigt deutlich die der konstruktiven Orthotropie zugeordnete Schnittkraftumlagerung.

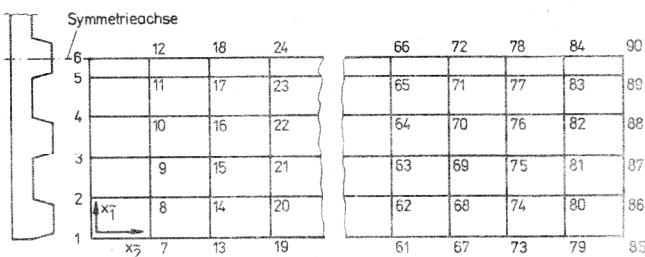


Bild 5
Elementnetz für Stahlprofilblech-Beton-Verbundplatte

4. Generelles Vorgehen im physikalisch nichtlinearen Bereich

Zur Lösung des physikalisch nichtlinearen Problems von Stahlbeton-Faltwerken wurde aus den bekannten FEM-Lösungsverfahren ein inkrementell-iteratives ausgewählt. Die Belastung wird inkrementiert. Zu Beginn jedes Inkrementes wird die Systemsteifigkeitsmatrix neu aufgebaut. Innerhalb jedes Lastinkrementes wird nach dem modifizierten Newton-Raphson-Verfahren (Methode der Anfangsspannungen) iteriert. Im Last-Verschiebungs-Diagramm und im Spannungs-Verzerrungs-Diagramm (Bild 6) ist die Iteration im r -ten Inkrement schematisch dargestellt.

Vor dem Aufbringen des r -ten Belastungsinkrementes ΔR ist der Spannungs- und Deformationszustand des Tragwerkes festgelegt durch

q_{r-1} Vektor der Knotenverschiebungen

e_{r-1}^m Verzerrungsvektor

σ_{r-1}^m Spannungsvektor

D^m Materialsteifigkeitsmatrix einer Schicht in Abhängigkeit von Rißzustand und Spannungszustand.

Im ν -ten Iterationsschritt eines Inkrementes gilt für das Gesamttragwerk die linearisierte Beziehung

$$\Delta q^{(\nu)} = K_S^{-1} \cdot (\Delta R + \sum_{i=1}^{\nu-1} \Delta R_{\sigma}^{(i)}) \quad (15)$$

ΔR_{σ} sind Korrekturlasten zur Erfassung des tatsächlich physikalisch nichtlinearen Verhaltens, sie werden aus

den Anfangsspannungen $\Delta \Delta \sigma_o^{(\nu)m}$ berechnet, vgl. Gl. (20).

K_S ist die in Abhängigkeit von den D^m gebildete Systemsteifigkeitsmatrix. Aus Gl. (15) folgt der Verschiebungszuwachs $\Delta \Delta q^{(\nu)}$ im ν -ten Iterationsschritt

$$\Delta \Delta q^{(1)} = K_S^{-1} \cdot \Delta R \quad (16)$$

$$\Delta \Delta q^{(\nu)} = K_S^{-1} \cdot \Delta R_{\sigma}^{(\nu-1)} \quad \nu \geq 2.$$

Die Gesamtverschiebungen im ν -ten Iterationsschritt des r -ten Inkrementes sind

$$q_r^{(\nu)} = q_{r-1} + \sum_{i=1}^{\nu} \Delta \Delta q^{(i)} \quad (17)$$

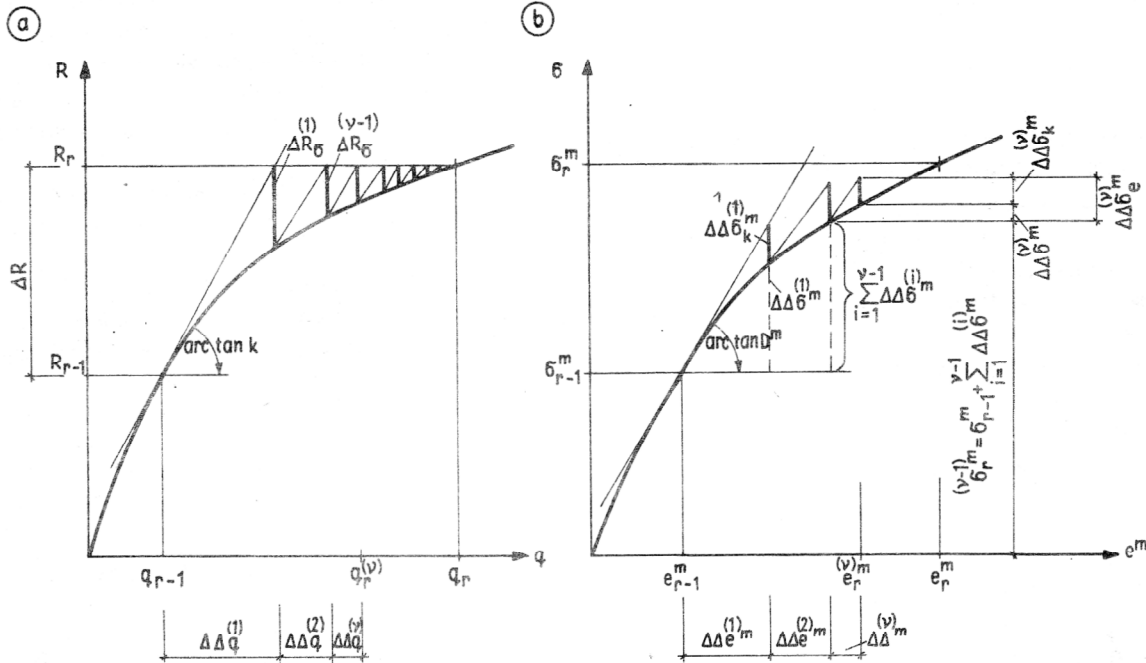
Die ΔR_{σ} erhält man in Abhängigkeit von den $\Delta \Delta \sigma_o^{(\nu)m}$ nach Gl. (11)

$$\Delta R_{\sigma}^{(\nu)} = - \sum_{e=1}^n T^T \cdot H^{-1} \cdot h \cdot \Delta \varphi_{\sigma}^{(\nu)} \quad (18)$$

$$\Delta \varphi_{\sigma}^{(\nu)} = A \cdot \sum_{m=0}^s (G^m)^T \cdot \Delta s_{o,\sigma}^{(\nu)m} \quad (19)$$

$$\Delta s_{o,\sigma}^{(v)m} = \left[\frac{\int_{h^m} \Delta \Delta \underline{\sigma}_o^{(v)m} \cdot dz^m}{\int_{h^m} \Delta \Delta \underline{\sigma}_o^{(v)m} \cdot z^m \cdot dz^m} \right] \quad (20)$$

Bild 6
 Inkrementell-iteratives Lösungsverfahren
 a) Last-Verschiebungs-Iteration
 b) Spannungs-Verzerrungs-Iteration



5. Zu den Nichtlinearitäten des Stahlbetons

Um die wirklichkeitsnahe Erfassung der physikalischen Nichtlinearitäten des Stahlbetons hat man sich besonders im letzten Jahrzehnt sehr bemüht. Es dominieren differentiale bzw. inkrementelle Deformationsgesetze sowohl vom nichtlinear elastischen Typ, wie z. B. in [2], als auch vom elastisch plastischen Typ, wie z. B. in [3], [6]. Daneben wurden auch finite Deformationsgesetze entwickelt, wie z. B. in [5].

Das hier gewählte Lösungsverfahren verlangt, daß nichtlineares Materialverhalten einschließlich Ribbildung sowohl über die Materialsteifigkeitsmatrix – zu Beginn jedes Inkrementes – als auch über Anfangsspannungen – innerhalb eines Inkrementes erfaßt werden kann. Nachfolgend werden einige der möglichen Fälle skizziert.

5.1. Materialsteifigkeitsmatrizen für ungerissene und gerissene Betonschichten sowie für Bewehrungsschichten

Für ungerissene Betonschichten wird ein inkrementelles nichtlineares Materialgesetz z. Z. nach [2] verwendet

$$\Delta \underline{\sigma}^m = D_B^m(\underline{\sigma}) \cdot (\Delta \underline{e}^m - \Delta \underline{\epsilon}_o) + \Delta \underline{\sigma}_o^m \quad (21)$$

Die Materialsteifigkeitsmatrix D_B^m ist spannungsabhängig und berücksichtigt die beanspruchungsbedingte Anisot-

ropie. Der Bruch wird mit einer ebenfalls in [2] angegebenen Bruchbedingung definiert.

Der zu $\Delta \Delta \underline{q}^{(v)}$ von Gl. (16) gehörende Verzerrungszustand $\Delta \Delta \underline{e}^m$ einer Elementschicht liefert mit der Materialsteifigkeitsmatrix $D^m(\underline{\sigma}_{r-1})$ am Beginn des Inkrementes Spannungen $\Delta \Delta \underline{\sigma}_e^{(v)m}$, die einem linearisierten Materialgesetz zugeordnet sind, jedoch nicht das nichtlineare Materialgesetz Gl. (21) (einschließlich Ribbildung) für die Verzerrungen $\Delta \Delta \underline{e}^m$ erfüllen. Durch Korrekturspannungen $\Delta \Delta \underline{\sigma}_K^{(v)m}$ sind die $\Delta \Delta \underline{\sigma}_e^{(v)m}$ so zu korrigieren, daß das nichtlineare Materialgesetz erfüllt wird (Bild 6).

$$\Delta \Delta \underline{\sigma}^{(v)m} = \Delta \Delta \underline{\sigma}_e^{(v)m} + (-\Delta \Delta \underline{\sigma}_K^{(v)m}) \quad (22)$$

$$\Delta \Delta \underline{\sigma}^{(v)m} = D^m \cdot \Delta \Delta \underline{e}^m + (-\Delta \Delta \underline{\sigma}_K^{(v)m}).$$

Die Spannungen $\Delta \Delta \underline{\sigma}^{(v)m}$ (vgl. Bild 6) werden nach einem in [2] vorgeschlagenen Iterationsverfahren bestimmt, so daß $\underline{\sigma}^{(v-1)m} + \Delta \Delta \underline{\sigma}^{(v)m}$ die bei dem erreichten Verzerrungszustand tatsächlich auftretenden Spannungen darstellen. Damit können aus Gl. (22) die Korrekturspannungen berechnet werden. Aus den Korrekturspannungen folgen die Anfangsspannungen für Gl. (20)

$$\Delta \Delta \underline{\sigma}_o^{(v)m} = -\Delta \Delta \underline{\sigma}_K^{(v)m}$$

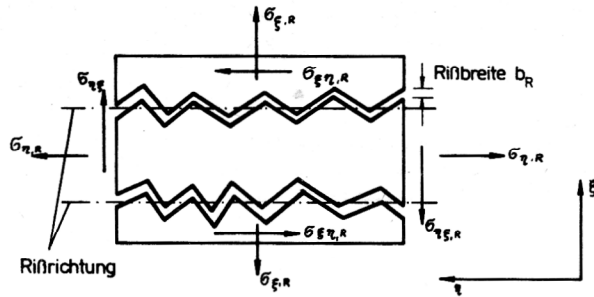


Bild 7
Riß und Rißeidealisierung

Zur Erfassung der Rißbildung in den Betonschichten werden folgende Näherungen eingeführt:

- Risse werden im Element „verschmiert“
- Risse, die bei einer Laststufe entstehen, verlaufen in einer Schicht parallel
- Risse in verschiedenen Richtungen entstehen nacheinander
- Rißeigenschaften (Rißbreite, Riffrichtung, übertragene Spannungen) ändern sich während eines Iterationsschrittes nicht, d. h. Risse öffnen und schließen sich nur am Ende eines Iterationsschrittes

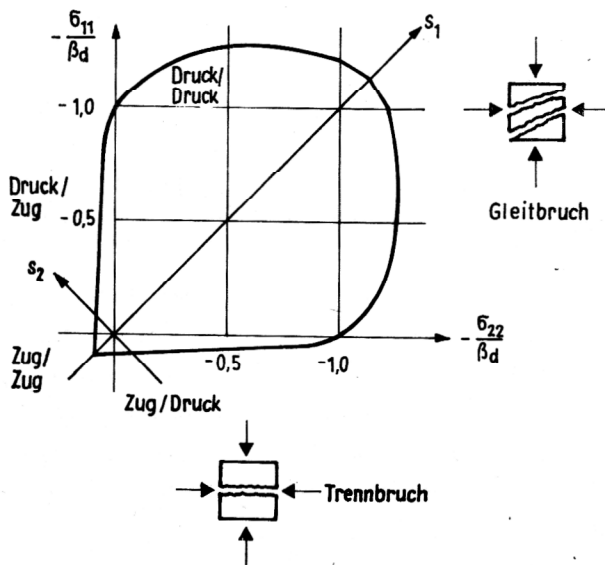


Bild 8
Versagenskurve

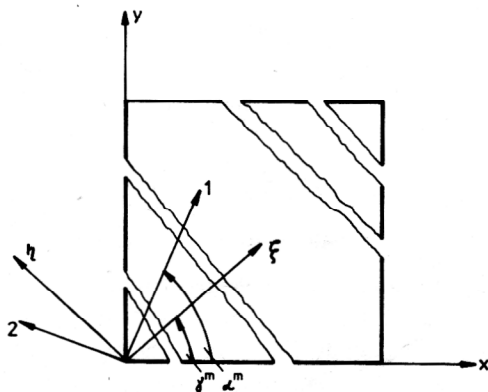


Bild 9
Gerissene Betonschicht mit einem Riß

- für die Spannungsübertragung am idealisierten Riß (Bild 7) gilt:

- senkrecht zum Riß kann keine Zugspannung übertragen werden
 - senkrecht zum Riß kann eine Druckspannung dann übertragen werden, wenn die Rißbreite b_f gleich Null ist
 - parallel zum Riß werden abgeminderte Schubspannungen übertragen
- über die Rißbildung in einer Elementschicht entscheidet der Spannungszustand in deren Schwerpunkt:
- ein Riß entsteht, wenn die zweiaxiale Festigkeit des unbewehrten, ungerissenen Betons im Zug/Druck- oder Zug/Zug-Bereich überschritten wird (Bild 8)
 - die Riffrichtung verläuft senkrecht zur Hauptzugspannung.

Bild 9 zeigt eine gerissene Betonschicht mit einem Riß und den Rißkoordinaten ξ, η sowie den Koordinaten 1, 2 der Hauptspannungen. Im Moment der Rißbildung fallen beide Koordinatensysteme zusammen.

Vor dem Entstehen des Risses gilt

$$\begin{bmatrix} \Delta \sigma_{\xi}^m \\ \Delta \sigma_{\eta}^m \\ \Delta \sigma_{\xi\eta}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{d}_{11} & \bar{d}_{12} & \bar{d}_{13} \\ \bar{d}_{21} & \bar{d}_{22} & \bar{d}_{23} \\ \bar{d}_{31} & \bar{d}_{32} & \bar{d}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta e_{\xi}^m \\ \Delta e_{\eta}^m \\ \Delta e_{\xi\eta}^m \end{bmatrix} \quad (23)$$

In gerissenem Zustand gilt.

$$\Delta \sigma_{\xi,R}^m = 0 = \bar{d}_{11} \cdot \Delta e_{\xi,R}^m + \bar{d}_{12} \cdot \Delta e_{\eta,R}^m + \bar{d}_{13} \cdot \Delta e_{\xi\eta,R}^m \quad (24)$$

Es wird nun – zunächst vereinfachend – vorausgesetzt, daß sich durch den Rißvorgang nur die Verzerrungskomponente Δe_{ξ}^m in $\Delta e_{\xi,R}^m$, eine inkrementelle Materialverzerrung im gerissenen Zustand, ändert, für die übrigen Verzerrungskomponenten aber gilt

$$\Delta e_{\eta,R}^m = \Delta e_{\eta}^m = \Delta e_{\eta,T}^m \quad (25)$$

$$\Delta e_{\xi\eta,R}^m = \Delta e_{\xi\eta}^m = \Delta e_{\xi\eta,T}^m$$

$\Delta e_{\eta,T}^m$ und $\Delta e_{\xi\eta,T}^m$ sind inkrementelle „Total“-Verzerrungen. Diese Totalverzerrungen wurden unter Einfluß der Rißöffnungen aus den linearen Abhängigkeiten für die Knotenverschiebungen errechnet.

$$\Delta e_T^m = G_1^m \cdot \Delta \varphi \quad (26)$$

$$\Delta \varphi = A \cdot \Delta \underline{s} + \Delta \varphi_o - \Delta \varphi_{\sigma} \quad (27)$$

$$\Delta \underline{s} = P \cdot \Delta \underline{\beta} + \bar{P} \cdot \Delta \underline{\beta} \quad (28)$$

$$\Delta \underline{\beta} = -[H^{-1} \cdot \bar{H} \cdot \Delta \underline{\beta} + H^{-1} \cdot h(\Delta \varphi_o - \Delta \varphi_{\sigma}) - H^{-1} \cdot T \cdot \Delta \underline{q} - H^{-1} \cdot T \cdot \Delta \underline{q}] \quad (29)$$

Mit Gl. (24) und Gl. (25) ergibt sich folgende Abhängigkeit zwischen den Materialverzerrungen im gerissenen Zustand $\Delta e_{\xi,R}^m$, $\Delta e_{\eta,R}^m$ und $\Delta e_{\xi\eta,R}^m$ und den Totalverzerrungen

$$\begin{bmatrix} \Delta e_{\xi,R}^m \\ \Delta e_{\eta,R}^m \\ \Delta e_{\xi\eta,R}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\bar{d}_{12}}{\bar{d}_{11}} & -\frac{\bar{d}_{13}}{\bar{d}_{11}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta e_{\xi,T}^m \\ \Delta e_{\eta,T}^m \\ \Delta e_{\xi\eta,T}^m \end{bmatrix} \quad (30)$$

Damit können in den inkrementellen Spannungs-Verzerrungs-Abhängigkeiten die Materialverzerrungen durch die Totalverzerrungen ersetzt werden:

$$\begin{bmatrix} \Delta \sigma_{\xi,R}^m \\ \Delta \sigma_{\eta,R}^m \\ \Delta \sigma_{\xi\eta,R}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{d}_{22} - \bar{d}_{12}^2 / \bar{d}_{11} & \bar{d}_{23} - \bar{d}_{21} \cdot \bar{d}_{13} / \bar{d}_{11} \\ 0 & \bar{d}_{32} - \bar{d}_{31} \cdot \bar{d}_{12} / \bar{d}_{11} & \bar{d}_{33} - \bar{d}_{13}^2 / \bar{d}_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta e_{\xi,T}^m \\ \Delta e_{\eta,T}^m \\ \Delta e_{\xi\eta,T}^m \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\Delta \bar{\sigma}^m = \bar{D}_{B,R}^m (\underline{\sigma}^m) \cdot \Delta \underline{e}_T^m \quad (32)$$

Zur Berücksichtigung der abgeminderten Spannungsübertragung zwischen den Rißuferñ wird in Anlehnung an das Vorgehen von z. B. [3] und [4] die Matrix $\bar{D}_{B,R}^m$ von Gl. (31) bzw. (32) durch Abminderungsfaktoren, sog. Verzahnungsbeiwerte, modifiziert. Flächenbewehrung (Bild 1) jeweils einer Richtung wird zu einer Bewehrungsschicht verschmiert. In jeder Bewehrungsschicht herrscht dann ein einachsiger Spannungszustand, der vor der Plastizierung durch die Materialsteifigkeitsmatrix

$$\bar{D}_s^m = \begin{bmatrix} E_s^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

erfaßt wird.

5.2. Anfangsspannungen für gerissene Betonschichten und für Betondruckversagen

Anfangsspannungen sind für verschiedene Rißzustände, z. B. Betonschichten mit einem oder zwei Rissen, Betonschichten mit einem wieder geschlossenen Riß, Betonschichten mit einem Riß in einer Richtung und einem wieder geschlossenen Riß in einer anderen Richtung zu berechnen.

Beim Übergang vom ungerissenen in den gerissenen Zustand sind Anfangsspannungen zu berechnen, wenn während der Newton-Raphson-Iteration die Betonspannungen

$(\nu)_{\sigma_r}^m$ außerhalb der Versagenskurve liegen. Für das Rißverhalten gelten auch weiterhin die in 5.1. formulierten Voraussetzungen. Nach dem Entstehen des Risses gilt im Rißkoordinatensystem

$$\begin{bmatrix} 0 \\ (\nu)_{\sigma_{r,\eta,R}}^m \\ (\nu)_{\sigma_{r,\xi\eta,R}}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{s}_{11,R} & \bar{s}_{12,R} & \bar{s}_{13,R} \\ \bar{s}_{21,R} & \bar{s}_{22,R} & \bar{s}_{23,R} \\ \bar{s}_{31,R} & \bar{s}_{32,R} & \bar{s}_{33,R} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\nu)_{e_{r,\xi,R}}^m \\ (\nu)_{e_{r,\eta,R}}^m \\ (\nu)_{e_{r,\xi\eta,R}}^m \end{bmatrix} \quad (34)$$

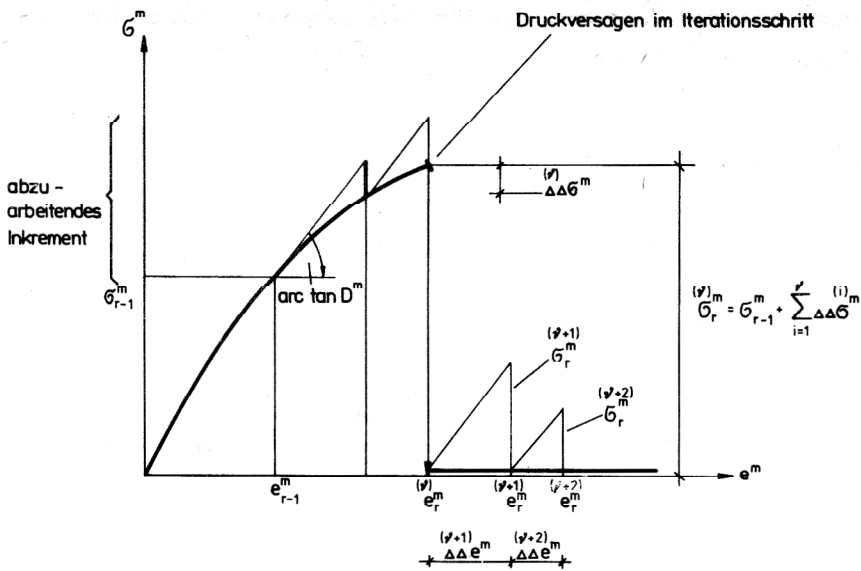
$$\frac{(\nu)_{\sigma_r}^m}{\sigma_{r,R}} = \bar{S}_{B,R}^m (\underline{\sigma}^m) \cdot \frac{(\nu)_{e_{r,R}}^m}{e_{r,R}} \quad (35)$$

wobei $\bar{S}_{B,R}^m$ die Sekanten-Materialsteifigkeitsmatrix und $\frac{(\nu)_{\sigma_r}^m}{\sigma_{r,R}}$ der Spannungsvektor im Rißkoordinatensystem sind. Um eine Iteration bei der Berechnung von $\frac{(\nu)_{\sigma_r}^m}{\sigma_{r,R}}$ aus der nichtlinearen Gleichung (35) zu umgehen, wird $\bar{S}_{B,R}^m$ mit einem geschätzten Argumentvektor $\underline{\sigma}^m$ für den erreichten gerissenen Zustand aufgestellt

$$\frac{(\nu)_{\sigma_r}^m}{\sigma_{r,R}} = \left\{ 0, \frac{(\nu)_{\sigma_{r,2}}^m}{\sigma_{r,2}} - \nu_0 \cdot \frac{(\nu)_{\sigma_{r,1}}^m}{\sigma_{r,1}}, 0 \right\} \quad (36)$$

wobei ν_0 die Anfangsquerdehnungszahl ist. Für die Abhängigkeit zwischen den Materialverzerrungen im geris-

Bild 10
Anfangsspannungen bei Betondruckversagen



senen Zustand und den Totalverzerrungen gilt Gl. (30) sinngemäß. $\frac{(\nu)}{\sigma_{r,R}}^m$ folgt nun aus Gl. (35). Aus den Spannungen $\frac{(\nu)}{\sigma_r}^m$ für nichtlineares Materialgesetz, aber ohne Ribbildung, vgl. Bild 6, können durch Einführen von Korrektorgößen $\frac{(\nu)}{\sigma_{r,K}}^m$ die bereits mit Gl. (35) berechneten Spannungen ebenfalls berechnet werden

$$\frac{(\nu)}{\sigma_{r,R}}^m = \frac{(\nu)}{\sigma_r}^m - \frac{(\nu)}{\sigma_{r,K}}^m \quad (37)$$

Aus diesen Korrekturspannungen folgen nun wiederum Anfangsspannungen $\Delta \Delta \frac{(\nu)}{\sigma_o}^m$ für Gl. (20):

$$\Delta \Delta \frac{(\nu)}{\sigma_o}^m = - \frac{(\nu)}{\sigma_{r,K}}^m \quad (38)$$

Eine Betonschicht versagt durch Druckbruch, wenn $\frac{(\nu)}{\sigma_r}^m$ außerhalb der Versagenskurve im Druck/Druck-Bereich liegt. Nach dem Druckversagen gilt

$$0 = \frac{(\nu)}{\sigma_r}^m - \frac{(\nu)}{\sigma_{r,K}}^m \quad (39)$$

Die aus Gl. (39) folgenden Korrekturspannungen $\frac{(\nu)}{\sigma_{r,K}}^m$ werden ebenso wie in Gl. (38) behandelt. Bild 10 zeigt die Veranschaulichung für den eindimensionalen Fall.

5.3. Beispiele zur Algorithmtestung

Bild 11 zeigt eine nichttreibende Betonscheibe zur Prüfung der richtigen Übertragung des nichtlinearen Beton-Stoffgesetzes auf die zugehörige Last-Verchiebungs-Abhängigkeit der Struktur.

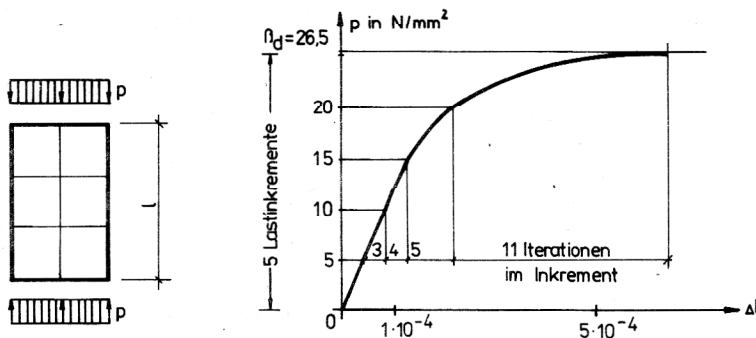
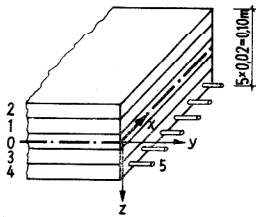
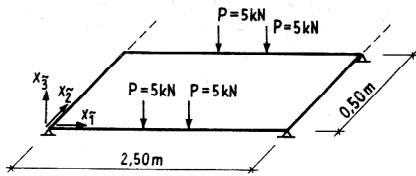


Bild 11
Gedrückte Betonscheibe, nichtlineares Materialgesetz

Bild 12
Stahlbeton-Balken-Platte und
Last-Verschiebungs-Diagramm

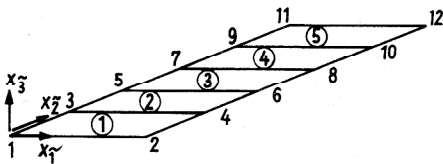
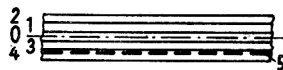
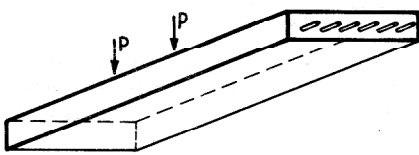
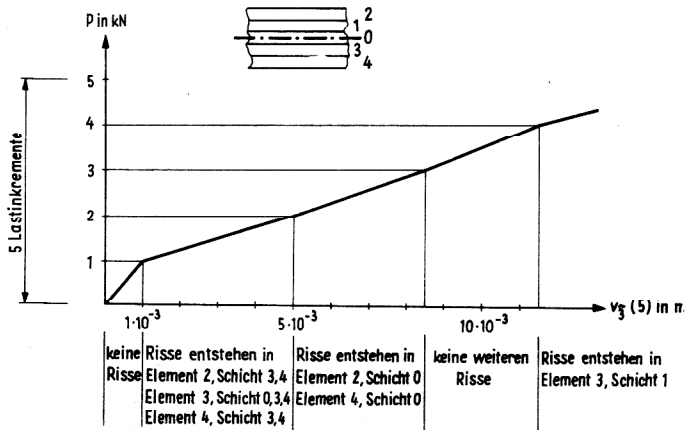


Beton: $E_0 = 2,4 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$
 $\nu_0 = 0,2$
 $\beta_d = 2,65 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2$

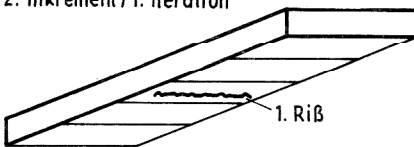
Betonstahl I: $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$
 $\sigma_F = 240 \text{ N/mm}^2$

Schichtung: Schichten 0, 1, 2, 3, 4 - Betonschichten
 Schicht 5 - Flächenbewehrung $6\phi 10, F_e = 4,71 \text{ cm}^2$

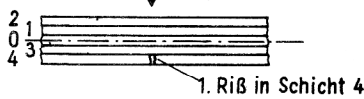
Betondeckung: 1,5 cm



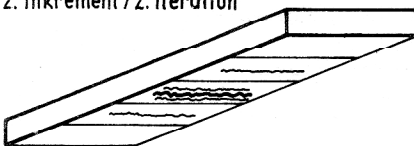
2. Inkrement / 1. Iteration



Rißentwicklung im Element ③



2. Inkrement / 2. Iteration



2. Inkrement / 5. Iteration

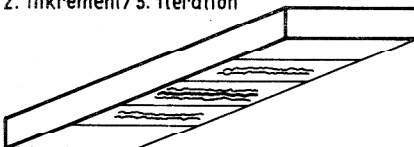
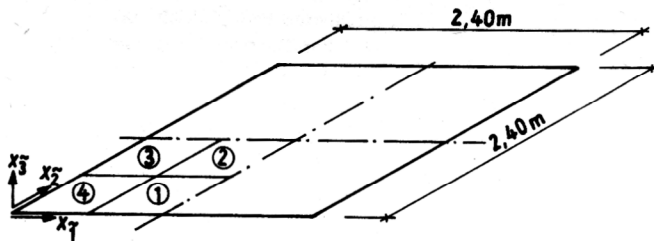


Bild 13
Rißentwicklung im 2. Inkrement

Bild 14
Stahlbeton-Quadratplatte



Belastung: Flächenlast $p = 250 \text{ kN/m}^2$

RB: allseitig gelenkig gelagert

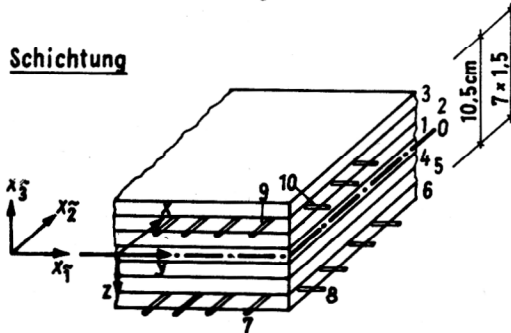
Beton: $E_0 = 30000 \text{ N/mm}^2$

Betonstahl: $E = 210000 \text{ N/mm}^2$

$\beta_d = 32,4 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_F = 240 \text{ N/mm}^2$

Betondeckung 1cm



Die einachsrig bewehrte Stahlbeton-Balken-Platte mit „starker“ Bewehrung gemäß Bild 12 wurde über die Dicke in 5 Betonschichten und 1 Bewehrungsschicht unterteilt. Dargestellt sind im Bild 13 die Rißentwicklung im 2. Inkrement und das Last-Verschiebungs-Diagramm. Letzteres zeigt deutlich den für Stahlbeton charakteristischen Steifigkeitsabfall nach Entstehen der ersten Risse. Die Ergebnisse „stehen“ erst nach Abschluß der Iteration des jeweiligen Inkrementes. Den Iterationsschritten zugeordnete Rißentwicklungsaussagen sind daher lediglich qualitative Interpretationen.

Ein drittes Beispiel, eine Quadratplatte unter Flächenlast, diente der Testung des Öffnens und Schließens allgemeinerer Rißformen als beim vorhergehenden Beispiel (Bild 14, 15).

LITERATUR

- [1] Müller, H.; Möller, B.: Ein finites hybrides mehrschichtiges Faltwerkelement. *Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden* 28 (1979) H. 5, S. 1241 – 1248.
- [2] Link, J.: Eine Formulierung des zweiaxialen Verformungs- und Bruchverhaltens von Beton und deren Anwendung auf die wirklichkeitsnahe Berechnung von Stahlbetonplatten. *Diss., TH Darmstadt*, 1975.
- [3] Schildberg, K.: Nichtlineare Ansätze zur Berechnung dynamisch beanspruchter Schalen aus Stahlbeton. *Mitteilung Nr. 80-2, April 1980, Ruhr-Univ. Bochum, Inst. f. Konstr. Ing.-Bau.*
- [4] Grünberg, J.: Berechnung von ebenen Stahlbetonflächen-tragwerken im gerissenen Zustand mit der Methode der finiten Elemente. *Werner-Verlag, Düsseldorf*, 1974.
- [5] Karpenko, N. I.: *Teorija deformirovanija železobetona s treščinami*. Strojizdat, Moskva, 1976
- [6] Ballesteros, P.: Nonlinear dynamics and creep buckling of elliptical paraboloidal shells. *Bulletin IASS, Madrid*, 1979, S. 39 – 60.

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr.-Ing. habil. H. Müller
Dr.-Ing. B. Möller
Technische Universität Dresden
Sektion Bauingenieurwesen
8027 Dresden
Mommssenstraße 13

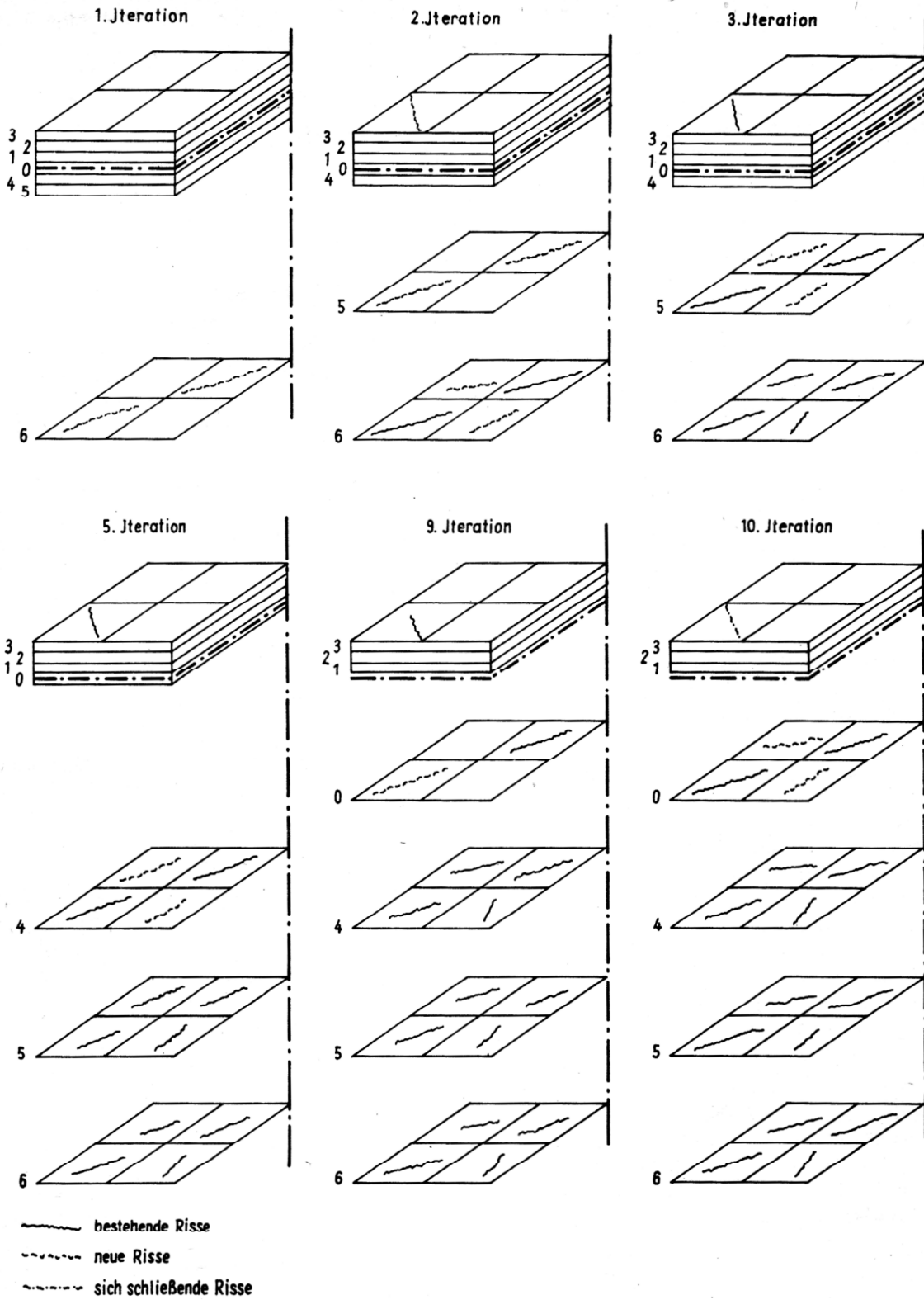


Bild 15
Rißentwicklung im 2. Inkrement