

Besonderheiten der Spannungsberechnung bei degenerierten dreidimensionalen finiten Verschiebungselementen

Harald Berger, Ulrich Gabbert, Johannes Altenbach

1. Einleitung

Bei der Bewertung des Festigkeitsverhaltens eines Bauteils sowie bei der Dimensionierung stellen die Spannungen in den meisten Fällen das entscheidende Kriterium dar. Mit Hilfe der Methode der finiten Elemente (FEM) gelingt es, auch bei komplizierten Konstruktionen unter beliebiger Belastung und Lagerung Spannungs- und Verformungszustände zu ermitteln. Häufig lassen sich allerdings erst durch eine echt räumliche Analyse hinreichend genaue Aussagen über den Beanspruchungszustand machen. Das an der TH Magdeburg im Wissenschaftsbereich Festkörpermechanik entwickelte Finite-Elemente-Programmsystem COSAR/E80 ermöglicht eine solche dreidimensionale elastostatische Festigkeitsberechnung beliebiger Bauteile [1].

Die Einsatzmöglichkeiten eines FEM-Programms hängen wesentlich von den zur Verfügung stehenden finiten Elementen ab. Da COSAR/E80 vordergründig für eine räumliche Analyse vorgesehen ist, umfaßt der Elementkatalog eine Reihe von Vollkörperelementen. Die Besonderheit des Elementkataloges besteht darin, daß als Basiselement das Hexaeder mit 20 Knoten verwendet wird und alle weiteren Elemente auf der Grundlage des Degenerationsprinzips (Zusammenfallen mehrerer Knoten; vgl. Bild 1) aus diesem zentralen Element abgeleitet wurden [2], [3]. Diese Vorgehensweise gestattet zwar eine durchgängig einheitliche Behandlung aller Elemente, es ergeben sich jedoch einige Konsequenzen, die insbesondere bei der Spannungsberechnung zum Tragen kommen.

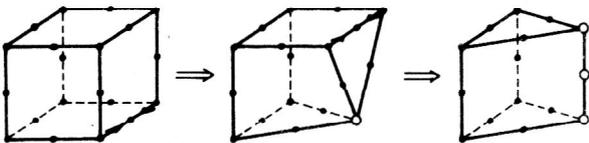


Bild 1
Entwicklung von Sonderelementen durch Degenerieren eines Hexaederelementes (o degenerierte Knoten)

Im vorliegenden Beitrag wird diese Problematik näher untersucht und es werden Aussagen zur Eignung derartiger degenerierter Elemente für eine dreidimensionale Spannungsanalyse abgeleitet.

2. Der Elementkatalog von COSAR/E80

Für die dreidimensionale Festigkeitsberechnung steht im Programmsystem COSAR/E80 eine Familie von isoparametrischen Verschiebungselementen zur Verfügung, die

an jedem Knotenpunkt drei Verschiebungsfreiheitsgrade als Unbekannte aufweisen und deren Knotenpunkte in den Elementecken und auf den Seitenmitten liegen (vgl. Bild 2). Die Ansatzfunktionen des zur Serendipity-Gruppe gehörenden Basis-Hexaederelementes HK60 lassen sich mittels Lagrangescher Interpolationspolynome herleiten und enthalten einen vollständigen quadratischen Ansatz sowie weitere Polynomanteile höheren Grades. Indem man Knoten dieses Basishexaeders zusammenfallen läßt (das Hexaeder degeneriert), ergeben sich alle übrigen in Bild 2 angegebenen Elemente der 3D-Elementfamilie von COSAR/E80. Die dabei automatisch entstehenden Ansatzfunktionen der degenerierten Elementen

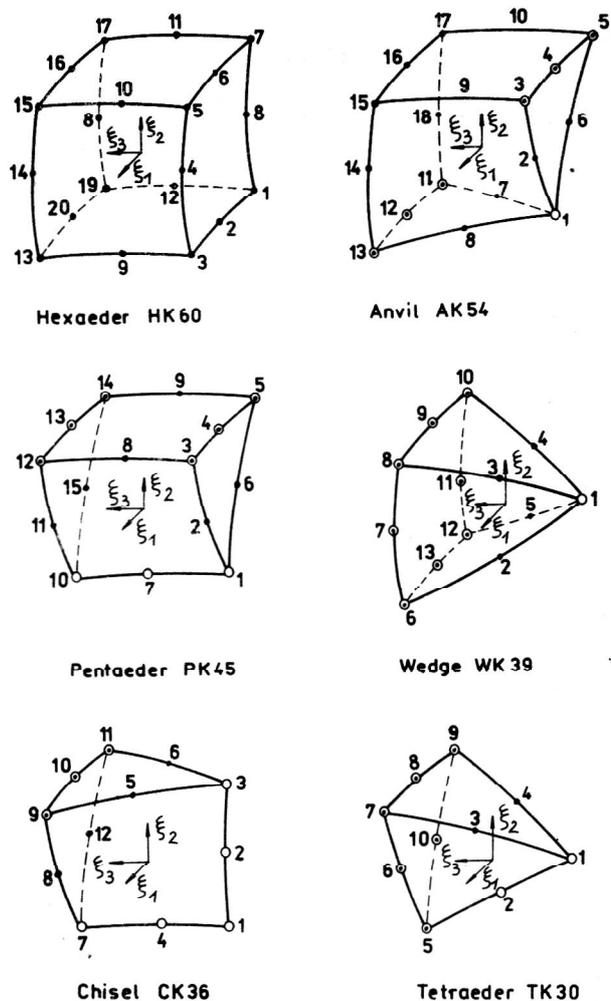


Bild 2
Vollkörperelemente des Programmsystems COSAR/E80 mit Basisnumerierung und der Lage des elementlokalen, natürlichen Koordinatensystems

- degenerierte Knoten
- ⊙ Knoten, deren Ansatzfunktionen nicht aus dem Basiselement übernommen werden können, sondern durch Zusatzterme modifiziert werden müssen

te sind auf den Dreiecksflächen unsymmetrisch und verletzen daher bei beliebig zusammenstoßenden Dreiecksflächen die Kompatibilitätsbedingung. Durch entsprechende Korrekturen der Ansatzfunktionen in Form von Zusatztermen an bestimmten Knoten (vgl. Bild 2) wird dieser Mangel überwunden. Die sich so ergebenden Ansatzfunktionen der 3D-Elementfamilie von COSAR/E80 sowie deren erste Ableitungen sind nachfolgend zusammengestellt [4]. Die Beschreibung der Elemente erfolgt in einem elementlokalen krummlinigen Koordinatensystem $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in [-1, 1]$, durch das ein krummliniges Hexaederelement auf einen Würfel der Kantenlänge 2 abgebildet wird.

Hexaeder-Element HK60:

Eckknoten

$$G_L = \frac{1}{8} (1 + \xi_{1L} \xi_1) (1 + \xi_{2L} \xi_2) (1 + \xi_{3L} \xi_3) \cdot (\xi_{1L} \xi_1 + \xi_{2L} \xi_2 + \xi_{3L} \xi_3 - 2) \quad (L = 1, 3, 5, 7, 13, 15, 17, 19)$$

Seitenmittenknoten

$$G_L = \frac{1}{4} (1 + \xi_{1L} \xi_1) (1 + \xi_{2L} \xi_2) (1 + \xi_{3L} \xi_3) \cdot [1 - (\xi_1 \xi_{2L} \xi_{3L})^2 - (\xi_{1L} \xi_2 \xi_{3L})^2 - (\xi_{1L} \xi_{2L} \xi_3)^2] \quad (L = 2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 20)$$

ξ_{iL} – lokale Koordinaten am Knoten L

Die in den Ansatzfunktionen für die degenerierten Elemente auftretenden Zusatzterme $\Delta G_{i\alpha}$ ergeben sich aus

$$\Delta G_{i\alpha} = \frac{1}{16} [1 + (-1)^\alpha \xi_i] (1 - \xi_j^2) (1 - \xi_k^2)$$

$$\alpha = 1, 2; \quad i, j, k = 1, 2, 3; \quad i \neq j \neq k$$

Anvil-Element AK54:

$$G_1^A = G_1 + G_2 + G_3$$

$$G_3^A = G_5 + \Delta G_{31}; \quad G_4^A = G_6 - 2\Delta G_{31}$$

$$G_5^A = G_7 + \Delta G_{31}; \quad G_{11}^A = G_{13} + \Delta G_{21}$$

$$G_{12}^A = G_{14} - 2\Delta G_{21}; \quad G_{13}^A = G_{15} + \Delta G_{21}$$

$$G_L^A = G_{L+2} \quad (L = 2, 6, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 16, 17, 18)$$

Pentaeder-Element PK45:

$$G_1^P = G_1 + G_2 + G_3; \quad G_{10}^P = G_{13} + G_{14} + G_{15}$$

$$G_3^P = G_5 + \Delta G_{31}; \quad G_4^P = G_6 - 2\Delta G_{31}$$

$$G_5^P = G_7 + \Delta G_{31}; \quad G_{12}^P = G_{17} + \Delta G_{32}$$

$$G_{13}^P = G_{18} - 2\Delta G_{32}; \quad G_{14}^P = G_{19} + \Delta G_{32}$$

$$G_7^P = G_9 + G_{10}; \quad G_L^P = G_{L+2} \quad (L = 2, 6)$$

$$G_L^P = G_{L+3} \quad (L = 8, 9); \quad G_L^P = G_{L+5} \quad (L = 11, 15)$$

Wedge-Element WK39:

$$G_1^W = \sum_{L=1}^8 G_L; \quad G_L^W = G_{L+7} \quad (L = 2, 3, 4, 5)$$

$$G_6^W = G_{13} + \Delta G_{11} + \Delta G_{21}; \quad G_7^W = G_{14} - 2\Delta G_{21}$$

$$G_8^W = G_{15} + \Delta G_{21} + \Delta G_{12}; \quad G_9^W = G_{16} - 2\Delta G_{12}$$

$$G_{10}^W = G_{17} + \Delta G_{12} + \Delta G_{22}; \quad G_{11}^W = G_{18} - 2\Delta G_{22}$$

$$G_{12}^W = G_{19} + \Delta G_{22} + \Delta G_{11}; \quad G_{13}^W = G_{20} - 2\Delta G_{11}$$

Chisel-Element CK36:

$$G_1^C = G_1 + G_2 + G_3; \quad G_2^C = G_4 + G_8$$

$$G_3^C = G_5 + G_6 + G_7; \quad G_4^C = G_9 + G_{10}$$

$$G_7^C = G_{13} + G_{14} + G_{15}; \quad G_L^C = G_{L+6} \quad (L = 5, 6)$$

$$G_L^C = G_{L+8} \quad (L = 8, 12); \quad G_9^C = G_{17} + \Delta G_{22} + \Delta G_{32}$$

$$G_{10}^C = G_{18} - 2(\Delta G_{22} + \Delta G_{32}); \quad G_{11}^C = G_{19} + \Delta G_{22} + \Delta G_{32}$$

Tetraeder-Element TK30:

$$G_1^T = \sum_{L=1}^8 G_L; \quad G_L^T = G_{L+8} \quad (L = 3, 4)$$

$$G_2^T = G_9 + G_{10}; \quad G_5^T = G_{13} + G_{14} + G_{15} + \Delta G_{12} + \Delta G_{11}$$

$$G_6^T = G_{16} - 2\Delta G_{12}; \quad G_{10}^T = G_{20} - 2\Delta G_{11}$$

$$G_7^T = G_{17} + \Delta G_{12} + \Delta G_{22} + 0,5(1 + \xi_3) \Delta G_{32}$$

$$G_8^T = G_{18} - 2\Delta G_{22} - (1 + \xi_3) \Delta G_{32}$$

$$G_9^T = G_{19} + \Delta G_{22} + \Delta G_{11} + 0,5(1 + \xi_3) \Delta G_{32}$$

Die ersten Ableitungen lassen sich für die Ansatzfunktionen des Hexaeder-Elementes HK60 in folgender Form darstellen:

Eckknoten

$$\frac{\partial G_L}{\partial \xi_i} = \frac{1}{8} \xi_{iL} (1 + \xi_{jL} \xi_j) (1 + \xi_{kL} \xi_k)$$

$$\cdot (2\xi_{iL} \xi_i + \xi_{jL} \xi_j + \xi_{kL} \xi_k - 1)$$

Seitenmittenknoten

$$\frac{\partial G_L}{\partial \xi_i} = \frac{1}{4} (1 + \xi_{jL} \xi_j) (1 + \xi_{kL} \xi_k)$$

$$\cdot \left\{ \xi_{iL} [1 - (\xi_j \xi_{kL})^2 - (\xi_{jL} \xi_k)^2] - 2\xi_i (\xi_{jL} \xi_{kL})^2 \right\}$$

$$i, j, k = 1, 2, 3; \quad i \neq j \neq k$$

Die ersten Ableitungen der Zusatzterme $\Delta G_{i\alpha}$ ergeben sich aus:

$$\frac{\partial(\Delta G_{i\alpha})}{\partial \xi_i} = \frac{1}{16} (-1)^\alpha (1 - \xi_j^2) (1 - \xi_k^2)$$

$$\frac{\partial(\Delta G_{i\alpha})}{\partial \xi_j} = -\frac{1}{8} [1 + (-1)^\alpha \xi_i] \xi_j (1 - \xi_k^2)$$

$$\frac{\partial(\Delta G_{i\alpha})}{\partial \xi_k} = -\frac{1}{8} [1 + (-1)^\alpha \xi_i] (1 - \xi_j^2) \xi_k$$

$$\alpha = 1, 2; \quad i, j, k = 1, 2, 3; \quad i \neq j \neq k$$

Die Anwendung des Degenerationsprinzips ermöglicht eine völlig einheitliche Behandlung aller Elemente der Familie. Es gibt z. B. nur ein Unterprogramm, das die Steifigkeitsmatrizen für alle Elemente aufbaut, wobei in Abhängigkeit vom Elementtyp unterschiedliche Ansatzfunktionen angesteuert werden. Für ein neues Element dieser Familie braucht daher lediglich die Ansatzfunktion programmiert zu werden.

Bei der Durchführung praktischer Rechnungen wird die Vernetzung weitgehendst unter Verwendung des HK60-Elementes erfolgen. Die übrigen Elemente der Familie haben insofern ihre Berechtigung, als sie das Erfassen beliebiger Randkonturen und die Realisierung von Netzverfeinerungen auf einfache Weise ermöglichen, ohne daß stark verzerrte Elemente im Netz auftreten.

3. Berechnung der Knotenspannungen für degenerierte Elemente

Der Verschiebungszustand in einem der angegebenen Elemente wird durch

$$u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = G_L(\xi_1, \xi_2, \xi_3) u_{iL} \quad (1)$$

$$i = 1, 2, 3; \quad L = 1 \dots N$$

approximiert (es gelte die Summationsvereinbarung), N ist die Anzahl der Elementknoten, u_{iL} bezeichnet die Knotenverschiebungen. Entsprechend dem isoparametrischen Konzept wird die Transformation zwischen den globalen kartesischen Koordinaten x_i und den lokalen Koordinaten ξ_i ebenfalls mit den Ansatzfunktionen G_L durchgeführt

$$x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = G_L(\xi_1, \xi_2, \xi_3) x_{iL} \quad (2)$$

$$i = 1, 2, 3; \quad L = 1 \dots N$$

Die FEM auf der Grundlage der Deformationsmethode liefert als primäre Ergebnisse einer elastostatischen Analyse die Verschiebungen für jeden Knoten des Gesamtsystems, mit denen auf Elementebene die Ermittlung der Spannungen erfolgt. Die Elementspannungen σ_{ij} ergeben sich aus

$$\sigma_{ij} = E_{ijrs} \frac{1}{2} (u_{r,s} + u_{s,r})$$

$$= E_{ijrs} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_L}{\partial x_s} u_{rL} + \frac{\partial G_L}{\partial x_r} u_{sL} \right) \quad (3)$$

$$i, j, r, s = 1, 2, 3; \quad L = 1 \dots N$$

E_{ijrs} enthält dabei das Materialgesetz (Hookesches Gesetz). Da der Zusammenhang zwischen den globalen und den lokalen Koordinaten (2) bei beliebig verzerrten und krummlinigen Elementen nichtlinear ist, müssen die Ableitungen der Ansatzfunktionen in (3) mit Hilfe der Jacobischen Matrix ermittelt werden

$$\frac{\partial G_L}{\partial \xi_i} = \frac{\partial G_L}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial \xi_i} = J_{is}^{-1} \frac{\partial G_L}{\partial x_s}$$

$$\frac{\partial G_L}{\partial x_s} = J_{si}^{-1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \frac{\partial G_L(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial \xi_i} \quad (4)$$

Dabei bezeichnet J_{si}^{-1} symbolisch die Elemente der inversen Jacobischen Matrix. Die Elemente J_{si}^{-1} lassen sich mit der Determinante $\det J$ der Jacobischen Matrix in der Form

$$J_{si}^{-1} = \frac{\bar{J}_{si}^{-1}}{\det J} \quad (5)$$

schreiben. Damit können die Spannungen für jeden beliebigen Punkt P im Element berechnet werden, wenn man in (3) unter Beachtung von (4) die lokalen Koordinaten ξ_{iP} des Punktes einsetzt.

Das ergibt jedoch Schwierigkeiten bei der Spannungsermittlung in den degenerierten Knotenpunkten, da in diesen Punkten die Jacobische Determinante Null wird (bei der Ermittlung der Elementsteifigkeitsmatrix tritt dieses Problem nicht auf, da für die numerische Integration die im Elementinneren liegenden Gauß-Punkte benutzt werden). Die übliche Spannungsberechnung wie sie standardmäßig in Finite-Elemente-Programmen realisiert ist, versagt an den durch Degeneration entstandenen Knoten, da während der Rechnung eine Division durch Null auftritt. Genauer entsteht bei der Ermittlung von

$$\frac{\partial G_L}{\partial x_s} \quad \text{an diesen Knoten ein unbestimmter Ausdruck}$$

$$\text{der Form } \frac{0}{0}, \text{ der durch eine Grenzwertbetrachtung be-$$

stimmt werden kann [5]:

$$C_s = \lim_{\xi_k \rightarrow \xi_{kD}} \frac{\partial G_L(\xi_i)}{\partial x_s} \quad (6)$$

Dabei bezeichnet ξ_k die Koordinate, die in einer zum degenerierten Knoten D gehörenden Dreiecksfläche veränderlich und orthogonal zu der am Knoten D nicht eindeutig definierten Koordinate ist (vgl. dazu Bild 3). Einsetzen von (4) und (5) in (6) liefert

$$C_s = \lim_{\xi_k \rightarrow \xi_{kD}} \frac{\bar{J}_{si}^{-1} \frac{\partial G_L}{\partial \xi_i}}{\det J} \quad (7)$$

Wertet man Zähler und Nenner von (7) aus, ergibt sich der unbestimmte Ausdruck $\frac{0}{0}$; die Anwendung der L'Hospitalischen Regel liefert als Grenzwert für C_s folgende Formel

$$C_s = \left(\frac{\frac{\partial}{\partial \xi_k} \left[\bar{J}^{-1} \frac{\partial G_L}{\partial \xi_i} \right]}{\frac{\partial}{\partial \xi_k} [\det J]} \right) \Bigg|_{\xi_{iD}} \quad (8)$$

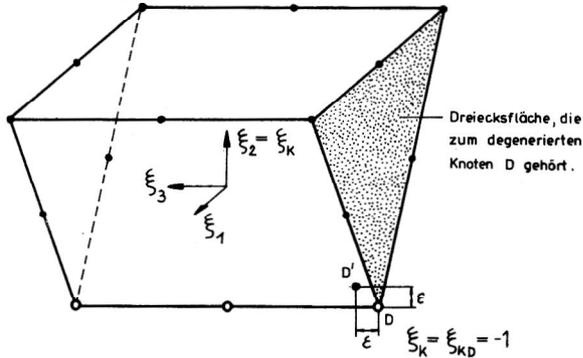


Bild 3

Erläuterung der benötigten Größen bei der Spannungsberechnung in einem degenerierten Knoten am Beispiel des PK45-Elementes

- D – betrachteter degenerierter Knoten
- ξ_1 – am Knoten D nicht eindeutig definierte Koordinate (Infolge der Summenbildung bei der Degeneration hebt sich diese Koordinate aus der zum Knoten D gehörenden Ansatzfunktion heraus.)
- ξ_2 – Koordinate, die in der gekennzeichneten Dreiecksfläche veränderlich und orthogonal zu ξ_1 ist
- D' – Punkt, der gegenüber dem degenerierten Knoten D um einen kleinen Betrag ϵ ins Elementinnere gerückt ist

Für die Ermittlung von C_s nach (8) werden die zweiten Ableitungen der Ansatzfunktionen G_L benötigt und zwar bezüglich der jeweiligen Koordinate ξ_k für alle degenerierten Knoten jeden Elementes. Für jedes Element muß also ein gesonderter Algorithmus programmiert werden, wodurch die einheitliche Behandlung der Elemente verloren geht und ein Mehraufwand entsteht. Um dieses Problem zu umgehen, wurde untersucht, ob nicht ausreichend genaue Ergebnisse erhalten werden, wenn man die Spannungen nicht unmittelbar an den degenerierten Knoten D ermittelt, sondern an Punkten D', die um einen kleinen Betrag ϵ ins Elementinnere gerückt sind, wodurch der oben angegebene Algorithmus entfällt. Die lokalen Koordinaten von D' ergeben sich, indem die am degenerierten Knoten nicht eindeutig definierte Koordinate Null gesetzt und die übrigen Koordinaten um ϵ verändert werden. Für den im Bild 3 dargestellten Fall hat D' somit die Koordinaten $D'(0, \xi_{2D} + \epsilon, \xi_{3D} + \epsilon)$. Eine Vielzahl von Testrechnungen unter Einbeziehung aller degenerierten Elemente hat ergeben, daß die Abweichungen gegenüber der „genauen“ Lösung bei einer geeigneten Wahl von ϵ sehr gering sind; als ein geeigneter Wert hat sich $\epsilon = 0,001$ erwiesen.

Neben dieser Problematik ergibt sich ein weiterer Aspekt bei der Verwendung degenerierter Elemente. Während mit unverzerrten HK60-Elementen (Form eines Parallelepipedes) ein quadratischer Verschiebungs- und damit ein linearer Spannungszustand exakt wiedergegeben werden kann, erfüllen verzerrte HK60-Elemente und

degenerierte Elemente infolge der Nichtlinearität in der Abbildung (veränderliche Jacobische Determinante) nur noch die Bedingung eines konstanten Dehnungszustandes.

Zur Einschätzung des auftretenden Genauigkeitsverlustes bei degenerierten Elementen wurden eine Reihe numerischer Tests durchgeführt. Die wesentlichsten Ergebnisse dazu werden im nächsten Abschnitt mitgeteilt.

4. Numerische Tests

Untersucht wird der im Bild 4 dargestellte räumliche Balken mit Momentenbelastung. Die Einspannung ist so realisiert, daß sich die Querkontraktion frei ausbilden

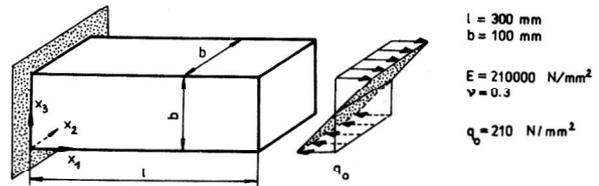


Bild 4

Eingespannter räumlicher Balken unter Momentenbelastung

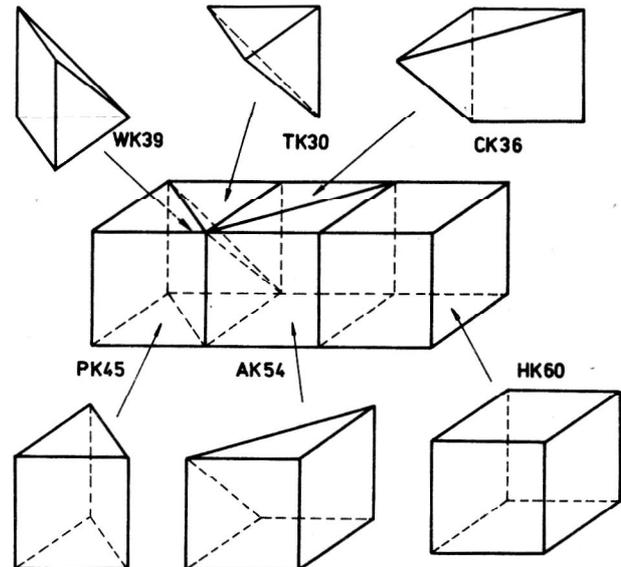


Bild 5

Vernetzung des Balkens mit 1 HK60-Element und 5 verschiedenen degenerierten Elementen

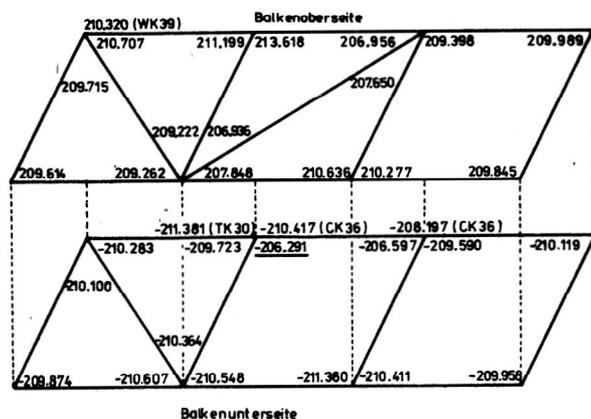


Bild 6

Biegespannungen σ_{11} in N/mm^2 für die Eckknoten aller Elemente bei einer Vernetzung entsprechend Bild 5

kann. Für den gewählten Belastungsfall ergibt sich eine quadratische Verschiebungs- und eine lineare Spannungsverteilung, die vom FEM-Modell bei Verwendung unverzerrter HK60-Elemente auch exakt wiedergegeben wird. Zur Abschätzung des Genauigkeitsverlustes beim Einsatz degenerierter Elemente wurde der Balken unter Verwendung aller im Elementkatalog von COSAR/E80 verfügbaren Vollkörperelemente vernetzt (Bild 5). Im Bild 6 sind die berechneten Biegespannungen σ_{11} an der Balkenober- und -unterseite für die Eckknoten aller Elemente angegeben. Die Ergebnisse lassen deutlich die Abwei-

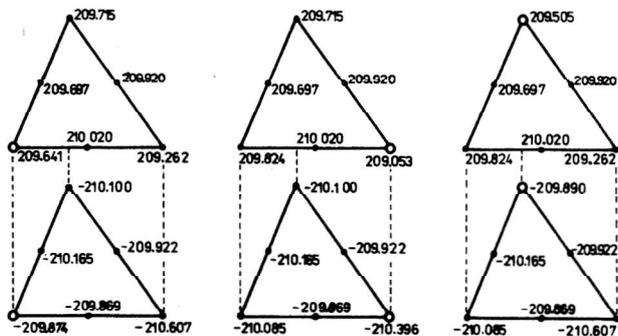


Bild 7
Biegespannungen σ_{11} für das Element PK 45 bei unterschiedlicher Lage der degenerierten Knoten

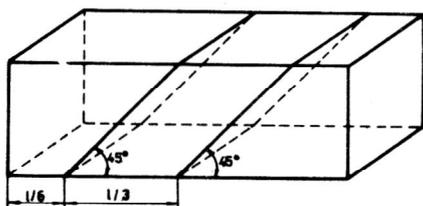


Bild 8
Vernetzung des Balkens mit 3 verzerrten HK60-Elementen

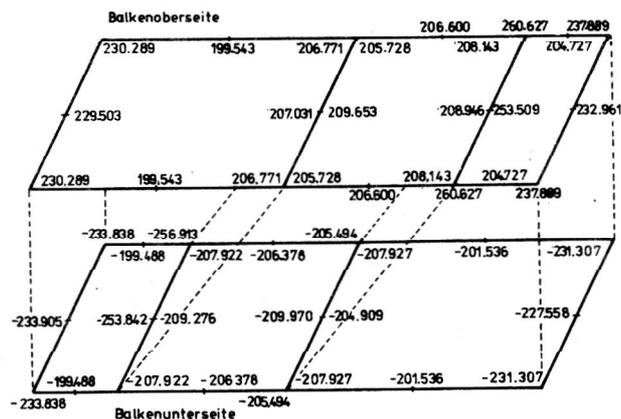


Bild 9
Biegespannungen σ_{11} bei einer Vernetzung mit verzerrten HK60-Elementen

chungen gegenüber den exakten Werten ($\sigma_{11 \text{ exakt}} = \pm 210 \text{ N/mm}^2$) erkennen. Die größte auftretende Differenz zur exakten Lösung beträgt jedoch nur $3,709 \text{ N/mm}^2$ (siehe unterstrichener Wert in Bild 6), was einem prozentualen Fehler von 1,77 % entspricht.

Ergänzend dazu sei der Fehler für die maximale Absenkung am Balkenende bezogen auf die analytische Lösung [6] angegeben; dieser liegt bei 0,084 %.

Um die Abweichungen zu verdeutlichen, die sich ergeben, wenn die Spannungen nicht direkt in den degenerierten Knotenpunkten, sondern in eingerückten Punkten berechnet werden, wurde das PK45-Element (vgl. Bild 5) in drei unterschiedlichen Lagen bezüglich der Anordnung der degenerierten Knoten eingebaut. Im Bild 7 sind die erhaltenen Ergebnisse dargestellt. Durch vergleichende Betrachtungen lassen sich die Differenzen zwischen den Spannungswerten in den Knotenpunkten und den eingerückten Punkten ermitteln. Die Abweichungen liegen unter 0,5 %, so daß die in Abschnitt 3 beschriebene Vorgehensweise gerechtfertigt ist.

Degenerierte Elemente sollten vornehmlich dort eingesetzt werden, wo die Verwendung von HK60-Elementen zu stark verzerrten Elementformen führt. Eine Vernetzung des Balkens mit stark verzerrten HK60-Elementen (Bild 8) untermauert diese Aussage. Es ergeben sich erhebliche Abweichungen von der exakten Lösung (siehe Bild 9). Der maximale Fehler in den Spannungen beträgt hier 28,87 %. Auch bei der maximalen Absenkung ergibt sich bereits ein Fehler von 1,63 %.

5. Abschließende Bemerkungen

Mit der Ergänzung des Elementkataloges durch die beschriebenen degenerierten Elemente wird eine dreidimensionale Spannungs- und Verformungsanalyse beliebig gestalteter Bauteile möglich. Die Verwendung degenerierter Elemente ist besonders dort gerechtfertigt, wo die ausschließliche Vernetzung mit HK60-Elementen zu unvermeidbaren Elementverzerrungen führt. Gerade bei komplizierten Maschinenbaukonstruktionen, für deren Berechnung das Programmsystem COSAR/E80 vordergründig vorgesehen ist, kann ohne den Einsatz zusätzlicher Elemente kaum eine sinnvolle Vernetzung realisiert werden. Trotz des Genauigkeitsverlustes, der sich bei den degenerierten Elementen infolge der nichtlinearen Abbildung ergibt, liefern diese in geometrisch kritischen Bereichen noch weitaus bessere Ergebnisse als stark verzerrte HK60-Elemente. Wie in Abschnitt 3 ausgeführt, lassen sich auch die Schwierigkeiten, die bei der Berechnung der Spannungen in den degenerierten Knotenpunkten entstehen, durch Verwendung eingerückter Punkte auf relativ einfache Weise umgehen, ohne daß die Ergebnisse wesentlich verfälscht werden. Insgesamt zeigt sich, daß die mit dem Einsatz von degenerierten Elementen verbundenen Genauigkeitsverluste weit unterhalb der Fehlergrenze liegen, die für praktische Rechnungen eine Rolle spielt.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß sich eine Genauigkeitssteigerung bezüglich der Spannungswerte erreichen läßt, wenn diese in inneren Elementpunkten berechnet werden, wobei den Gauß-Integrationspunkten eine besondere Bedeutung zukommt [5], [7]. Dadurch entfällt automatisch auch das Problem der Spannungsermittlung in den degenerierten Knotenpunkten. Es ist dann allerdings sinnvoll, über geeignete Algorithmen wieder repräsentative Knotenspannungen zu erzeugen [5].

Fortsetzung auf Seite 80

LITERATUR

- [1] Autorenkollektiv: Finite Elemente in der Festkörpermechanik. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1982.
- [2] Newton, R.E.: Degeneration of brick-type isoparametric elements. Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 7 (1973), 579 – 581
- [3] Irons, B.M.: A technique for degenerating brick type isoparametric elements using hierarchical midside nodes. Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 8 (1974), 203 – 209.
- [4] Gabbert, U.: Die Verwendung isoparametrischer Elemente im 3D Finite Element Programmsystem COSAR. Zvornik Vedeckych Prag, Strojnický Fakulty, SVST Bratislava, Zväzotz 16, 1976, S. 309 – 322.
- [5] Berger, H.: Beitrag zur Spannungsberechnung mit Hilfe der Methode der finiten Elemente auf der Grundlage von dreidimensionalen Verschiebungselementen. Als Dissertation A eingereicht, TH Magdeburg 1982.
- [6] Vocke, W.: Räumliche Probleme der linearen Elastizität. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1968.
- [7] Barlow, J.: Optimal stress locations in finite element models. Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 10 (1976).

Anschrift der Verfasser:
Dipl.-Ing. Harald Berger
Dr.-Ing. Ulrich Gabbert
Prof. Dr. sc. techn. Johannes Altenbach
Technische Hochschule Otto von Guericke
Sektion Maschinenbau
3010 Magdeburg, PSF 124