

Eigenschwingungsanalyse sektorsymmetrischer Strukturen

Udo Fischer, Joachim Grochla

1. Einleitung

Die Eigenschwingungsanalyse elastischer Strukturen mit komplizierter Struktur wird heute oft mit Hilfe einer Diskretisierung durch die Methode der finiten Elemente (FEM) vorgenommen. Dabei wird zur Verminderung des Aufwandes an Speicherplätzen und Rechenzeit in der Regel jede Möglichkeit zur Reduktion des Problems genutzt. Dazu gehört auch die Fourier-Entwicklung bei rotationssymmetrischen Strukturen. Weitere Möglichkeiten der Reduktion bestehen in der Zerlegung der Gesamtstruktur in Teilstrukturen, wobei die Näherung für die Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen der Gesamtstruktur nach bestimmten Regeln aus den Eigenschaften der Teilstrukturen zu bestimmen sind. Diese Methode verspricht insbesondere dann Erfolg, wenn die Gesamtstruktur aus vielen gleichartigen Teilen zusammengesetzt ist, wie das bei sektorsymmetrischen Bauteilen der Fall ist.

Im folgenden soll, einer Anregung von Lukin [1] folgend, ein Verfahren vorgestellt werden, das eine exakte Dekomposition von sektorsymmetrischen Strukturen mit Hilfe der Fourier-Entwicklung ermöglicht.

2. Grundbeziehungen

Bild 1 zeigt einen ebenen Schnitt durch eine im allgemeinen räumliche sektorsymmetrische Struktur. Der l -te Sektor ist durch Schraffur hervorgehoben. Die durch die ausgezogene Linie gekennzeichnete Trennfläche, die nicht eben sein muß, soll zum l -ten Sektor gehörig angesehen werden. Die durch die unterbrochene Linie gekennzeichnete Fläche an diesem Sektor gehört zum $(l+1)$ -ten Sektor. Die durch M gekennzeichnete Mittelachse stellt hinsichtlich ihrer Zugehörigkeit zu einem Sektor einen Sonderfall dar, auf den noch eingegangen werden soll. Das Netz der finiten Elemente wird so gelegt, daß die Grenzflächen der Sektoren gleichzeitig Grenzflächen von Elementen darstellen. Außerdem wird

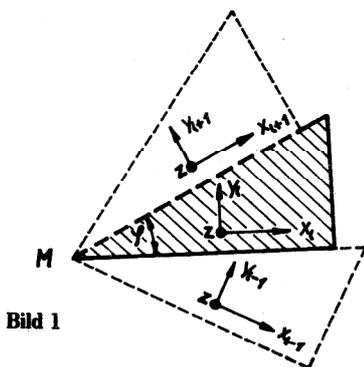


Bild 1

vorausgesetzt, daß die Freiwerte q_{il} , $l = 1, 2, \dots, n$ sämtlich durch Knotenverschiebungen u_{il} , v_{il} , w_{il} in den Richtungen x_1 , y_1 , z_1 des jedem Sektor eigenen Koordinatensystems dargestellt werden. Weil jeder Sektor nur mit 2 angrenzenden in Verbindung steht (von den Punkten der Achse abgesehen), läßt sich das Eigenwertproblem bei linearem Materialverhalten wie folgt darstellen:

$$B^T q_{l-1} + A q_l + B q_{l+1} - \omega^2 M q_l = 0 \quad (1)$$

$$l = 1, 2, \dots, n$$

Hierin umfaßt der Spaltenvektor q_l die Gesamtheit der m Knotenverschiebungen eines Sektors; A , B sind quadratische Matrizen, und M stellt die Sektormassenmatrix dar, die von vornherein als Diagonalmatrix (lumped matrix) angesehen werden soll.

Für die Knotenverschiebungen u_{il}^M , v_{il}^M , w_{il}^M der Punkte auf der Mittelachse gilt außerdem die folgende Beziehung:

$$u_{i,1+1}^M = u_{il}^M \cos \varphi + v_{il}^M \sin \varphi$$

$$v_{i,1+1}^M = -u_{il}^M \sin \varphi + v_{il}^M \cos \varphi \quad (2)$$

$$w_{i,1+1}^M = w_{il}^M$$

$$\varphi = 2\pi/n$$

Eine Entkopplung des Eigenwertproblems (1) ist durch folgende Fourier-Entwicklung möglich:

$$q_l = \sum_{k=0}^N (a_k \cos kl\varphi + b_k \sin kl\varphi)$$

$$N = n/2; b_0 = b_N = 0 \quad \text{für gerades } n \quad (3)$$

$$N = (n-1)/2; b_0 = 0 \quad \text{für ungerades } n$$

Durch Einsetzen dieser Summe in Gleichung (1) und Entwicklung nach $\cos k\varphi$ und $\sin k\varphi$ erhält man folgende Eigenwertprobleme:

1. für $k = 0$:

$$(A + B + B^T - \omega^2 M) a_0 = 0 \quad (4)$$

2. nur bei geradem n für $k = n/2 = N$:

$$(A - B - B^T - \omega^2 M) a_N = 0 \quad (5)$$

3. für $k \in (1, n/2)$:

$$\begin{Bmatrix} A + (B + B^T) \cos k\varphi & (B - B^T) \sin k\varphi \\ (B^T - B) \sin k\varphi & A + (B + B^T) \cos k\varphi \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Aus den Gleichungen (2) ergeben sich Nebenbedingungen für die Fourierkoeffizienten der Mittelachsverschiebung. Bezeichnet man mit a_k^{uM} , a_k^{vM} , a_k^{wM} , b_k^{uM} , b_k^{vM} , b_k^{wM} die Teilvektoren von a_k , b_k , die zu den u, v, w-Verschiebungen der Punkte der Mittelachse gehören, so ergeben sich aus den Gleichungen (2) folgende Restriktionen:

$$\begin{aligned} a_0^{uM} &= a_0^{vM} = b_0^{uM} = b_0^{vM} = 0 \\ a_1^{uM} &= -b_1^{vM}, \quad a_1^{vM} = b_1^{uM}, \quad a_1^{wM} = b_1^{wM} = 0 \\ a_k^{uM} &= a_k^{vM} = a_k^{wM} = b_k^{uM} = b_k^{vM} = b_k^{wM} = 0, \quad k \geq 2 \end{aligned} \quad (7)$$

3. Rechentechnische Realisierung der Eigenwertprobleme

Zur Aufstellung der Systemmatrizen A, B, M soll ein Algorithmus dienen, der sich, wie üblich, nur eines Koordinatensystems für eine Substruktur bedient. Es sei in q die Gesamtheit aller Knotenverschiebungskoordinaten eines Sektors enthalten, die, auf ein einheitliches Koordinatensystem x_1, y_1, z bezogen sind. Es gelte $q_s^T = [q_{L1}^T, q_{R1}^T]$. Darin enthält q_{L1} die Verschiebungen aller auf der Grenzfläche zum (l+1)-ten Sektor liegenden Knoten (jedoch ohne auf der Mittelachse liegende) und q_{R1} die Verschiebungen aller übrigen Knoten. Die Steifigkeitsmatrix und die Massenmatrix des einzelnen Sektors lassen folgenden Aufbau erkennen:

$$K_s = \begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LR} \\ K_{LR}^T & K_{RR} \end{bmatrix}, \quad M_s = \begin{bmatrix} M_L & 0 \\ 0 & M_R \end{bmatrix} \quad (8)$$

Wie bereits bemerkt, wird für M_s die Diagonalform vorausgesetzt. Zwischen den Knotenverschiebungen q_{L1} und den Verschiebungen $q'_{R,l+1}$ der gleichen Knoten im Koordinatensystem x_{l+1}, y_{l+1}, z besteht eine Transformationsbeziehung: $q'_{R,l+1} = T' q_{L1}$ (9)

T' ist eine orthogonale Matrix, die so aufgebaut ist, daß zwischen den unterschiedlichen Verschiebungskoordinaten eines Punktes folgende Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} u_{i,l+1} &= u_{il} \cos \varphi + v_{il} \sin \varphi \\ v_{i,l+1} &= -u_{il} \sin \varphi + v_{il} \cos \varphi \\ w_{i,l+1} &= w_{il} \end{aligned} \quad (10)$$

Mit Hilfe dieser Transformation läßt sich die einem Sektor zugeordnete mechanische Energie, $\dot{q} = \omega \sqrt{-1} q$ vorausgesetzt, wie folgt angeben:

$$E_s = \frac{1}{2} q_s^T K_s q_s - \frac{1}{2} \omega^2 q_s^T M_s q_s$$

$$= \frac{1}{2} [q'_{R,l+1}; q_{R1}] \left\{ \begin{bmatrix} T'^T K_{LL} T' & T'^T K_{LR} \\ K_{LR}^T T' & K_{RR} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} T'^T M_L T' & 0 \\ 0 & M_R \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} q'_{R,l+1} \\ q_{R1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jetzt wird $q'_{R,l+1}$ durch Nullelemente so ergänzt, daß das Format von $q_{R1} \equiv q_1$ erreicht wird. Die entsprechende Formaterweiterung wird mit T' vorgenommen. Das Ergebnis sei die Matrix T. Eine Summation der Energie über alle Sektoren liefert:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n q_l^T \left\{ T^T K_{LR} q_{l-1} + [K_{RR} + T^T K_{LL} T - \omega^2 (M_R + T^T M_L T)] q_l + K_{LR}^T T q_{l+1} \right\} = 0$$

Daraus folgt durch Vergleich mit Gleichung (1)

$$\begin{aligned} A &= K_{RR} + T^T K_{LL} T \\ B &= K_{LR}^T T \\ M &= M_R + T^T M_L T \end{aligned} \quad (11)$$

Man bildet A zweckmäßig aus K_{RR} durch Addition der Elemente von $T^T K_{LL} T$, die verschieden von Null sind. Wegen der Symmetrie von A genügt es, das „obere Dreieck“ einschließlich der Hauptdiagonalen zu berechnen. M bleibt Diagonalmatrix, wenn die Masse aller Knotenpunkte in jeder Verschiebungsrichtung gleich groß angesetzt wird, was nur natürlich ist. Natürlich genügt es, auch von der weiter benötigten symmetrischen Matrix $B + B^T$ und von der schiefsymmetrischen Matrix $B - B^T$ das obere Dreieck zu berechnen und zu speichern.

Enthält das Netz der finiten Elemente auch die Symmetrieachse als Kante oder liegt ein einzelner Punkt auf ihr, so sind die Nebenbedingungen (3) zu berücksichtigen.

Um ein Umspeichern zu vermeiden und die Symmetrie nicht zu zerstören, können diese Bedingungen simuliert werden. Es sei

$$(C - \omega^2 D) t = 0 \quad (12)$$

die symbolische Darstellung eines der Eigenwertprobleme (4), (5) oder (6). Dann ist die Bedingung $t_i = 0$ durch Addition einer genügend großen Zahl c zum Element C_{ii} zu simulieren, während zur Simulation der Nebenbedingung $t_i \pm t_j = 0$ eine genügend große Zahl c auf C_{ii} und C_{jj} und $\pm c$ auf C_{ij} und C_{ji} zu addieren ist. Die Zahl c sollte das größte Element von C um einige Zehnerpotenzen übersteigen; andererseits ist durch die Konditionszahl von C eine Grenze gesetzt.

Die Algorithmen zum Aufbau und zur Lösung sektorsymmetrischer Eigenwertprobleme nach (6) wurden in ein vorhandenes FEM-Programm zur Lösung von Eigenwertproblemen scheibenförmiger Bauteile eingebaut. Die Programmteile zum Aufbau der Steifigkeits- und Massenmatrix (Diagonalform) eines Sektors und zum Einarbeiten von Randbedingungen (Nullverschiebungen, diskrete Massen und Federn u. ä.) konnten dabei direkt genutzt werden.

Die Strukturierung der Steifigkeits- und Massenmatrix nach (8) ergibt sich automatisch, wenn bei der Einteilung des Sektors in finite Elemente den Knoten, die auf der linken Grenzfläche des Sektors liegen, die kleinsten und den Knoten, die auf der rechten Grenzfläche des Sektors liegen, die größten Knotennummern zugeordnet werden (Bild 2).

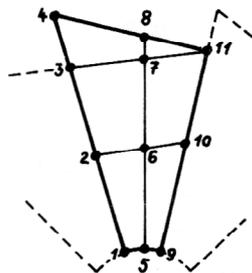


Bild 2

Beim Aufbau des Eigenwertproblems nach (6) muß beachtet werden, daß sich für die einzelnen Fourierreihen die Faktoren $\cos k\varphi$ und $\sin k\varphi$ der Sektorsteifigkeitsmatrix ändern und sich damit für jedes Fourierreihen ein Eigenwertproblem ergibt. Um den Aufwand für den Aufbau des Eigenwertproblems möglichst klein zu halten, wurde der Algorithmus so programmiert, daß die aufgebaute Matrix A auf einem Externspeicher aufbewahrt wird. Mit der Matrix B wird die unvollständige Sektorsteifigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} + \mathbf{B}^T & \mathbf{B} - \mathbf{B}^T \\ \text{sym.} & \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \end{bmatrix}$$

gebildet und ebenfalls auf einem externen Speichermedium aufbewahrt. Für jedes Fourierreihen wird diese Matrix vervollständigt, indem sie in den Hauptspeicher gebracht und mit den Faktoren $\cos k\varphi$ bzw. $\sin k\varphi$ multipliziert wird. Danach wird die Matrix A eingelesen und aufaddiert.

Der Aufbau der Sektormassenmatrix aus M ist unabhängig vom Fourierreihen und braucht nur einmal zu erfolgen.

Die Lösung des sektorsymmetrischen Eigenwertproblems liefert für jedes Fourierreihen die Eigenfrequenzen und die Fourierkoeffizienten a_k und b_k , die nach (3) zusammengefaßt die Eigenformen der einzelnen Sektoren ($1 \leq k \leq n$) bezogen auf das sektoreigene Koordinatensystem ergeben.

4. Berücksichtigung der Lagerung durch eine elastische Achse

Prinzipiell läßt sich eine in der Ebene senkrecht zu ihrer Mittelachse isotrope und isotrop gelagerte Achse ebenfalls in Sektoren unterteilen und an die oben beschriebene Struktur anschließen. Auch der Anschluß finiter Balkenelemente ist denkbar; die Beschreibung der Verknüpfung der Balkenelemente mit 3dimensionalen Strukturen ist dabei komplizierter als die Ausführung. Wichtig ist zu beachten, daß die Steifigkeiten und Massen der Balkenelemente jeweils nur zu einem n-tel in die Eigenschaften eines Sektors eingehen.

Am einfachsten ist die Modellierung einer elastischen Achse mit oder ohne Torsionssteifigkeit, wenn nur ebene Bewegungen untersucht werden, vgl. Bild 3a und b.

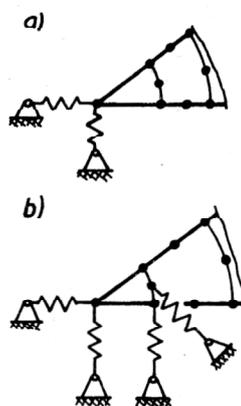


Bild 3

5. Berechnungsbeispiel

Bild 4 zeigt eine Lamelle, die mit Scheibenelementen modelliert wurde, und von der die kleinsten Eigenfrequenzen und die zugehörigen Eigenformen berechnet wurden. Dabei wurden das geschlossene und das in Sektoren eingeteilte Bauteil untersucht. Für beide Berechnungsmodelle wurde das gleiche Finite-Elemente-Netz (in Bild 4 für den bei der Behandlung des sektorsymmetrischen EWP's betrachteten Sektor eingezeichnet) verwendet. Die Lösung der Eigenwertprobleme erfolgte mit der inversen Vektoriteration nach Gram-Schmidt.

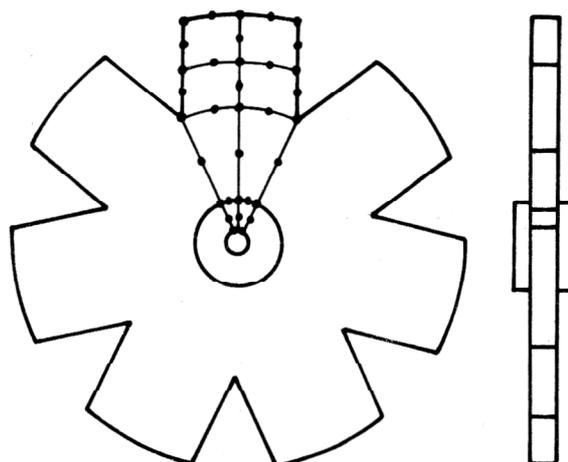


Bild 4

Tabelle 1 enthält eine Gegenüberstellung der mit den beiden Lösungsvarianten ermittelten Eigenkreisfrequenzen, wobei für die Vektoriteration eine relative Genauigkeit der Eigenwerte von 10^{-5} gefordert wurde.

Tabelle 1 enthält eine Gegenüberstellung der mit den beiden Lösungsvarianten ermittelten Eigenkreisfrequenzen, wobei für die Vektoriteration eine relative Genauigkeit der Eigenwerte von 10^{-5} gefordert wurde. Da mit der Fourier-Entwicklung des Eigenwertproblems eine exakte Dekomposition erfolgt, liefern beide Lösungsvarianten identische Eigenwerte; auch die Eigenvektoren, die das sektorsymmetrische Eigenwertproblem liefert (Bilder 5, 6, 7), sind nach Transformation auf ein globales Koordinatensystem identisch mit denen des Eigenwertproblems des geschlossenen Bauteils.

Mit der Fourier-Entwicklung entsteht für jedes Fourierreihen ein Eigenwertproblem, dessen Lösung die der Fourierordnung zugeordneten Eigenformen des Gesamtproblems beschreibt. Beispielsweise beschreibt das Fourierreihen 0. Ordnung alle Eigenformen ohne Knotenlinien

Tabelle 1

Lösungs- variante	Eigenkreisfrequenzen in 1/s					
	ω_1	ω_2, ω_3	ω_4, ω_5	ω_6	ω_7, ω_8	ω_9, ω_{10}
gesamtes Bauteil	7311,819	38101,392	61376,699	65897,365	77183,314	86870,328
sektorsym. Bauteil	7311,818	38101,385	61376,681	65897,354	77183,280	86870,291

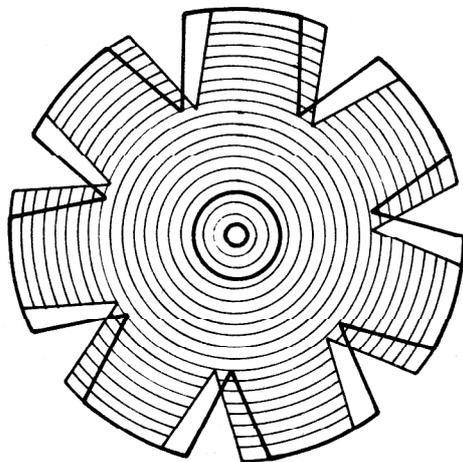


Bild 5

0. Fourierglied

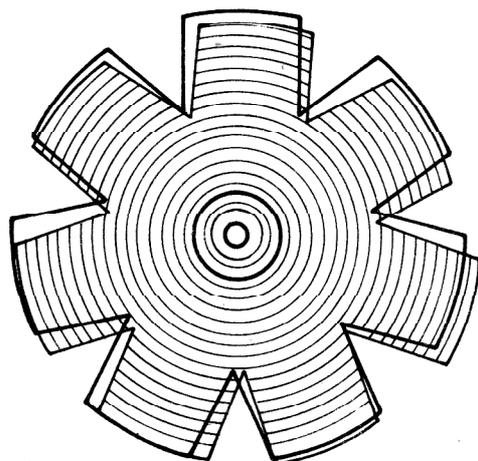
1. Eigenform ($\omega_1 = 7311.818$ 1/s)

Bild 6

1. Fourierglied

1. Eigenform ($\omega_2 = 38101.385$ 1/s)

Tabelle 2

	Ordnung des Fouriergliedes			
	0	1	2	3
Eigenkreisfre- quenzen in 1/s	7311,8	38101,3	61376,7	65097,4
	107700,5	38101,3	61376,7	126694,5
	130210,7	77183,3	86870,2	158837,7
	200242,6	77183,3	86870,2	252715,3

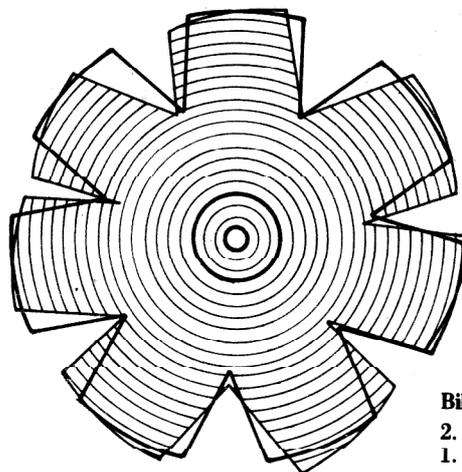


Bild 7

2. Fourierglied

1. Eigenform ($\omega_4 = 61376.681$ 1/s)

(Bild 5), das 1. Ordnung alle mit einer Knotenlinie (Bild 6), das 2. Ordnung die mit 2 Knotenlinien (Bild 7) usw. Damit ist verbunden, daß sich die Eigenwerte und -formen des Gesamtproblems nicht in aufsteigender Reihenfolge, sondern geordnet nach der Fourierordnung ergeben (Tabelle 2), so daß zur Ermittlung der kleinsten Eigenwerte alle Fourierglieder berücksichtigt werden müssen.

Das nach der Fourierordnung geordnete Entstehen der Eigenfrequenzen muß für praktische Belange nicht unbedingt von Nachteil sein. Da häufig bekannt ist, welche Eigenschwingungsformen für eine Konstruktion kritisch sind, reicht zur Ermittlung der kritischen Frequenzen die Analyse der entsprechenden Fourierglieder aus.

Für einen Aufwandsvergleich bei beiden Lösungsvarianten wurde die für die Berechnung der Eigenfrequenzen und -formen benötigte Liegezeit auf einer EDVA ES 1040 herangezogen. Trotz des Lösen von 4 sektorsymmetrischen Eigenwertproblemen konnte eine Zeitersparnis von rund 60 % gegenüber dem Lösen des Eigenwertproblems des geschlossenen Bauteils erzielt werden. Hauptursache dafür ist eine Reduzierung der Iterationsschritte bei der Gram-Schmidt-Orthogonalisierung.

Wie bereits erwähnt, erfolgt mit der Fourier-Entwicklung des Eigenwertproblems für jedes Fourierglied eine Selektion der Eigenformen nach der Anzahl der Knotenlinien. Damit ist innerhalb eines Fouriergliedes ein Auseinanderrücken der benachbarten Eigenwerte verbunden, wodurch die Anzahl der zur Trennung der Eigenwerte notwendigen Orthogonalisierungen reduziert wird. Für das Beispiel der Lamelle waren zur Lösung des Eigenwertproblems des geschlossenen Bauteils bei einer geforderten Genauigkeit von 10^{-5} für die Eigenwerte 115 Orthogonalisierungsschritte notwendig, während für die Lösung der sektorsymmetrischen Eigenwertprobleme durchschnittlich 12 Orthogonalisierungsschritte ausreichten.

Ein weiterer wesentlicher Vorteil der Fourier-Entwicklung des Eigenwertproblems sektorsymmetrischer Strukturen ist, daß zur Bestimmung der Eigenwerte des Gesamtproblems nur die Betrachtung eines Sektors erforderlich ist. Damit reduziert sich der Speicherplatzbedarf für die Systemmatrizen erheblich (z. B. von 17200 auf 8300 bei der berechneten Lamelle) und ermöglicht es, auch Eigenwertprobleme komplizierterer Strukturen vollständig im Hauptspeicher der EDVA zu behandeln. Gerade bei Iterationsverfahren ist dieser Aspekt zu berücksichtigen, da mit der Verwaltung der Systemmatrizen auf externen Speichermedien ein hoher Anteil an Datentransferoperationen zwischen Haupt- und Externspeicher anfällt, der die Abarbeitungsgeschwindigkeit stark reduziert.

LITERATUR

- [1] Б.С. Лукин: Об Исследовании колебаний циклически симметричных конструкций методом конечных элементов.
Динамика и прочность машин, вып. 31, изд-во при Харьк. ун-те, 1980г., с. 12 – 21

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr. sc. techn. Udo Fischer
Dipl.-Ing. Joachim Grochla
Technische Hochschule Otto von Guericke
Sektion Maschinenbau
3010 Magdeburg, Bierutplatz 5