

Über die durch Oszillationen in nicht-Newtonschen Fluiden hervorgerufene Durchsatzsteigerung als Modelleffekt

Chr. Friedrich, O. Wein, P. Mitschka

1. Einleitung

Es ist seit langem bekannt, daß eine durch eine Vibration oder Pulsation überlagerte Grundströmung einer pseudoplastischen Flüssigkeit einen im Vergleich zur Grundströmung höheren Durchsatz ergibt. Da die Fluidität der Flüssigkeit scheinbar zugenommen hat, bezeichnet man die Erscheinung als Verflüssigungseffekt. Dieser Effekt läßt sich z. B. an einer Rohrströmung, bei der der Druckgradient durch einen Oszillationsanteil überlagert wird [1] oder bei der das gesamte Rohr längs seiner Achse in Schwingung versetzt wird [2], aber auch an einer Filmablaufströmung, bei der die Unterlage in Strömungsrichtung schwingt [3], sehr deutlich demonstrieren.

Es werden in Abhängigkeit von den Fluideigenschaften und den Prozeßparametern (wie Frequenz, Schwingungsamplitude u. a. m.) relative Durchsatzsteigerungen von 1000 % und mehr erzielt [2]. Dieser überzeugende Effekt hat in den letzten 10 Jahren viele Forschergruppen veranlaßt, sich mit der theoretischen Beschreibung als auch mit der experimentellen Verifizierung zu beschäftigen. Ungeachtet der großen Anzahl theoretischer Arbeiten kann man heute noch nicht von einer Theorie zu diesem Effekt sprechen. Dazu sind die mathematischen Modelle oft in ihren Anwendungsbereichen zu begrenzt (das betrifft den Anwendungsbereich der rheologischen Zustandsgleichung als auch die angewendeten Lösungsmethoden – Methode des kleinen Parameters) und in ihren Vorhersagen, was die Abhängigkeit des Effektes von der Frequenz oder von der Relaxationszeit betrifft, zu widersprüchlich. Die relativ wenigen experimentellen Untersuchungen wurden hauptsächlich an Polymerlösungen [1], [2], [17] vorgenommen. Für Suspensionen [3], [4] und Polymerschmelzen [5] sind nur wenige Ergebnisse bekannt. Gerade die Tatsache, daß zu wenige experimentelle Untersuchungsergebnisse (besonders zur Strömungsstruktur einer Pulsations- oder Vibrationsströmung) vorliegen, führt dazu, daß die mathematische Modellbildung sophisticateden Charakter trägt.

Es wird im allgemeinen angenommen, daß dieser Effekt auf der Überlagerung der viskosen und elastischen Eigenschaften sowie der Trägheit des Fluids beruht. Dabei ist bekannt, daß für die Verflüssigung hauptsächlich die Eigenschaften eines Fluids, die sich in der Fließkurve ausdrücken, verantwortlich sind. Welche Rolle andere Materialfunktionen, wie zum Beispiel der Koeffizient der ersten Normalspannungsdifferenz, in solch einer Scherströmung spielen, ist noch unklar. Der Einfluß der Elastizität eines Mediums auf den Verflüssigungseffekt ist immer in Form der Variation der maximalen Relaxa-

tionszeit [6], [9] im Sinne von Maxwell oder der Relaxationsfunktion [7], [8], [10] untersucht worden. Es wurden dabei für die verschiedenen rheologischen Zustandsgleichungen unterschiedliche Ergebnisse erzielt. So führt zum Beispiel das von Phan-Thien [6], [7] verwendete verallgemeinerte Maxwellmodell zu einer Verstärkung des Verflüssigungseffektes bei wachsender Relaxationszeit. Dem entgegen berichten Davies u. a. [11] von einem negativen, den Verflüssigungskoeffizienten reduzierenden Einfluß der Elastizität. Wie aus [11] außerdem hervorgeht, ist die Tatsache, daß eine rheologische Zustandsgleichung, die die Viskosität und die Normalspannungen unter stationären Bedingungen sowie die dynamische Viskosität in der Oszillationsströmung mit kleiner Amplitude qualitativ ausreichend beschreibt, noch keine Garantie dafür, daß auch für die Strömung, die aus der Überlagerung beider hervorgeht, qualitativ und quantitativ richtige Ergebnisse erhalten werden.

In vielen Fällen [1], [10], [11], [15] wurde die Auswahl der zur Modellierung herangezogenen rheologischen Zustandsgleichung unter rein pragmatischen Gesichtspunkten vorgenommen und es gibt keine konkreten Vorstellungen, was die Auswahl einer rheologischen Zustandsgleichung zur Modellierung des Verflüssigungseffektes betrifft. Deshalb scheint es angebracht, die rheologischen Zustandsgleichungen in einer überlagerten Strömung auf den Verflüssigungseffekt hin als Modelleffekt zu untersuchen.

Ziel dieser Arbeit ist es somit, eine Beschreibung des Verflüssigungseffektes im Rahmen einer partiellen, d. h. nur mit der rheologischen Zustandsgleichung verbundenen Betrachtungsweise vorzunehmen und nicht wie in anderen Arbeiten (z. B. [1], [6], [7], [8], [11], [15]) das vollständige Feldproblem (Kopplung von rheologischer Zustandsgleichung mit der Impulsbilanz und Lösung der entsprechenden Randwertaufgabe) zu lösen. Um den spezifischen Einfluß der elastischen Materialeigenschaften auf den Verflüssigungseffekt klar darstellen zu können, wird für jede rheologische Zustandsgleichung deren viskoses Modell (Viskositätsansatz) und das vollständige (viskoelastische) Modell selbständig betrachtet. Der Vergleich zwischen beiden Verflüssigungsmodellen einer rheologischen Zustandsgleichung soll dann die notwendigen Bedingungen liefern, die eine Bewertung der Zustandsgleichung zulassen. Damit wird, wie von Jones und Walters [12] vorgeschlagen, dieser Effekt zu einem Auswahlkriterium für rheologische Zustandsgleichungen. Im Rahmen dieser Arbeit sollen nur solche benutzt werden, die explizit bezüglich des Spannungstensors darstellbar sind und die bei der Betrachtung der erwähnten Randwertaufgabe, d. h. bei der Berechnung der Durchsatz-

steigerung, in anderen Arbeiten eine Rolle gespielt haben.

2. Theorie

2.1. Allgemeine Betrachtung

Bei der Untersuchung des Feldproblems wurden entsprechend der realisierten Strömungssituation die dynamische [1], [10], [11], [12], [15] oder die kinematische Methode [4], [15], [17] angewendet. Das heißt, daß entweder eine Druckoszillation bzw. die entsprechende Scherspannungszosillation als Ausgangspunkt genommen wird, um die Deformationsgeschwindigkeitsverteilung zu berechnen (z. B. Rohrströmung bei oszillierendem Druckgradienten) oder kinematische Randbedingungen in Form der gegebenen Deformationsgeschwindigkeitsverteilung zur Berechnung der Scherspannungsverteilung herangezogen werden (z. B. überlagerte Oszillationsströmung in einer Kegel – Platte – Geometrie).

In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, daß sich die Deformationsgeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ in Abhängigkeit von der Zeit t entsprechend Gleichung (1) ändert.

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}_0 + \dot{\gamma}_p(t)$$

$$\dot{\gamma}_p(t) = \epsilon \dot{\gamma}_0 \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \right\} \quad (1)$$

Dabei stellt $\dot{\gamma}_0$ die Deformationsgeschwindigkeit der Grundströmung dar, die durch eine Oszillationskomponente mit der Amplitude $\epsilon \cdot \dot{\gamma}_0$ und einer Frequenz ω überlagert wird. In Gleichung (1) ist ϵ ein kleiner Parameter und es werden alle weiteren Betrachtungen auf der Basis von Störungsmethoden durchgeführt.

Die Scherspannungsantwort auf eine Erregung in Form der Gleichung (1) läßt sich bei Anwendung der oben genannten Methode des kleinen Parameters folgendermaßen darstellen:

$$\tau(t) = \tau_0 + \epsilon \operatorname{Re} \left\{ \tau_1 e^{i\omega t} \right\} + \epsilon^2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_{20} + \tau_2 e^{2i\omega t} \right\} + 0(\epsilon^3) \quad (2)$$

τ_0 ist die Scherspannung in der ungestörten Grundströmung. Erst die zeitliche Mittelung über eine Periode zeigt an, ob und inwieweit eine Beeinflussung der Grundströmung stattgefunden hat.

$$\bar{\tau} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \tau(t) dt = \tau_0 + \frac{\epsilon^2}{2} \tau_{20} \quad (3)$$

Jetzt kann man einen Verflüssigungskoeffizienten in folgender Form berechnen:

$$J = \frac{\tau_0 - \bar{\tau}}{\tau_0} = -\frac{\epsilon^2}{2} \frac{\tau_{20}}{\tau_0} \quad (4)$$

wobei von der Tatsache ausgegangen wurde, daß die Beeinflussung der Grundströmung zu einer Scherspannungsreduzierung führt. Das heißt, wenn ein in diesem

Sinne positiver Effekt erzielt werden soll, muß τ_{20} kleiner Null sein.

Im weiteren sollen nun für die verschiedenen rheologischen Zustandsgleichungen (die hochgestellten VE weisen auf das vollständige, viskoelastische Modell hin) und deren Viskositätsansätze (hochgestelltes V) die Größen τ_{20}^{VE} und τ_{20}^{V} berechnet werden. In Betrachtung kommen

1. die rheologische Zustandsgleichung 3. Ordnung [15], [18]

$$\tau^{\text{VE}} = \eta_0 \left(\dot{\gamma} - \lambda_{31} \frac{d\dot{\gamma}}{dt} + \lambda_{32}^2 \frac{d^2\dot{\gamma}}{dt^2} - \lambda_{33}^2 \dot{\gamma}^3 \right) \quad (5')$$

$$\tau^{\text{V}} = \eta_0 \dot{\gamma} (1 - \lambda_{33}^2 \dot{\gamma}^2) \quad (5'')$$

η_0 Newtonsche Anfangsviskosität;

λ_{3i} Zeitparameter, $i = 1, 2, 3$

2. die rheologische Zustandsgleichung von Leal und Hinch [13] für eine Suspension fastsphärischer Partikel

$$\tau^{\text{VE}} = \mu \dot{\gamma} \left[1 + \phi \left(\frac{5}{2} + \frac{26}{147} k^2 \right) \right] + \mu \phi \frac{12}{5}$$

$$\cdot k^2 D_B A_{12}(t)$$

$$A_{12}(t) = \frac{3}{2} \int_0^{\infty} \exp(-6D_B s) \cdot \dot{\gamma}(t-s) \cdot \cos[K(t, t-s)] ds$$

$$K(t, t-s) = \int_{t-s}^t \dot{\gamma}(t') dt' \quad (6)$$

$$\tau^{\text{V}} = \mu \dot{\gamma} \left[1 + \phi \left(\frac{5}{2} + \frac{26}{147} k^2 \right) \right] + \frac{3}{5} \mu \phi k^2 \frac{\dot{\gamma}}{1 + \left(\frac{\dot{\gamma}}{6D_B} \right)^2} \quad (6'')$$

μ Viskosität des Suspensionsmittels, D_B Diffusionskonstante der Brownschen Rotationsbewegung, ϕ Volumenkonzentration der suspendierten Partikel, k Formparameter ($k = 0$, Kugelform).

3. die Approximation der einfachen Flüssigkeit für eine Fastviskosimeterströmung nach Pipkin [14]

$$\tau^{\text{VE}} = \tau_0 + \int_0^{\infty} G_1(\dot{\gamma}_0, s) \cdot \dot{\gamma}_p(t-s) ds + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} G_2(\dot{\gamma}_0, s_1, s_2) \cdot \dot{\gamma}_p(t-s_1) \cdot \dot{\gamma}_p(t-s_2) ds_1 ds_2 + 0 \left[\left(\frac{\dot{\gamma}_p}{\omega} \right)^3 \right] \quad (7)$$

G_1, G_2 primäre bzw. sekundäre Relaxationsfunktion, s, s_1, s_2 Zeit.

4. das nichtaffine Netzwerkmodell nach Phan-Thien [10]

$$\tau^{VE} = \int_0^{\infty} G(s) \cdot \cos[\sigma \cdot K(t, t-s)] \cdot \dot{\gamma}(t-s) ds; \quad \sigma \geq 0 \quad (8')$$

Die Relaxationsfunktion $G(s)$ wird so bestimmt, daß für den stationären Fall die Gleichung (8'') bzw. die Gleichung (8''') erhalten werden.

$$\tau^V = m \cdot \dot{\gamma}^n \quad (8'')$$

$$\tau^V = \eta_{\infty} \dot{\gamma} + \dot{\gamma}(\eta_0 - \eta_{\infty}) \frac{\cos[(1-n) \arctan(\lambda_s \dot{\gamma})]}{[1 + (\lambda_s \dot{\gamma})^2]^{\frac{1-n}{2}}} \quad (8''')$$

m Konsistenzfaktor; n Fließindex; η_0, η_{∞} - Newtonsche Anfangs- bzw. Endviskosität; λ_s Zeitparameter

5. ein verallgemeinertes Maxwellmodell nach Phan-Thien [8]

$$\tau^{VE} = \int_0^{\infty} G(s) \cdot F[\dot{\gamma}^2(t-s)] \cdot \dot{\gamma}(t-s) ds \quad (9)$$

F beliebige, monoton fallende Funktion.

Für die Viskositätsansätze kommt man sehr schnell zu einem Ausdruck für τ_{20}^V , wenn man die Scherspannung $\tau^V(\dot{\gamma})$ an der Stelle $\dot{\gamma}_0$ in eine Taylorreihe entwickelt.

$$\tau^V(\dot{\gamma}) = \tau_0^V + \frac{d\tau^V}{d\dot{\gamma}} \Big|_{\dot{\gamma}=\dot{\gamma}_0} \cdot \epsilon \cdot \dot{\gamma}_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{1}{2} \frac{d^2\tau^V}{d\dot{\gamma}^2} \Big|_{\dot{\gamma}=\dot{\gamma}_0} \cdot \epsilon^2 \cdot \dot{\gamma}_0^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) + 0(\epsilon^3) \quad (10)$$

Die zeitliche Mittelung liefert dann für τ_{20}^V

$$\tau_{20}^V = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_0^2 \frac{d^2\tau^V}{d\dot{\gamma}^2} \Big|_{\dot{\gamma}=\dot{\gamma}_0} \quad (11)$$

die bekannte Abhängigkeit des Verflüssigungskoeffizienten von der zweiten Ableitung der Scherspannung nach der Deformationsgeschwindigkeit. Bei der Betrachtung der vollständigen Modelle läßt sich keine allgemeine Gleichung für τ_{20}^{VE} ableiten und jedes Modell muß einzeln betrachtet werden.

Durch den Vergleich von J_{ϵ}^V und J_{ϵ}^{VE} (der untere Index verweist, wenn er auftritt, auf die Größen, die bei der entsprechenden Betrachtung als konstant angesehen werden) kann auf den modellspezifischen Einfluß der Elastizität bezüglich des Verflüssigungseffektes geschlossen werden. Dabei ist es sinnvoll, folgende Funktion

$$\psi(\omega, \dot{\gamma}_0) = \frac{J^{VE}(\omega, \dot{\gamma}_0)}{J^V(\dot{\gamma}_0)} \quad (12)$$

einzuführen. Je nachdem, ob die Werte dieser Funktion für ein fixiertes $\dot{\gamma}_0$ größer oder kleiner Eins sind, ist der relative Einfluß der elastischen Eigenschaften als positiv oder negativ (relative Verstärkung oder Verringerung des Verflüssigungseffektes durch die Elastizität) zu bewerten. Weiterhin ist es interessant, die Betrachtung folgender Grenzwerte

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} J_{\epsilon}^{VE}; \quad \lim_{\dot{\gamma}_0 \rightarrow 0} J_{\epsilon}^{VE}$$

in die Beurteilung der Zustandsgleichungen einzubeziehen. Dabei ist zu erwarten, daß für physikalisch sinnvolle Modelle, die eine Anfangsviskosität η_0 aufweisen, die Beziehungen

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} J_{\epsilon}^{VE} = J_{\epsilon}^V \quad (13)$$

$$\lim_{\dot{\gamma}_0 \rightarrow 0} J_{\epsilon}^{VE} = \lim_{\dot{\gamma}_0 \rightarrow 0} J_{\epsilon}^V = 0 \quad (14)$$

gelten.

2.2. Modellvorhersagen

Es wird das Modellverhalten der Gleichungen (5) bis (9) sowie der diesen Modellen entsprechenden bzw. ausgewählten Viskositätsansätze untersucht.

1. Rheologische Zustandsgleichung 3. Ordnung, Gleichung (5)

Setzt man Gleichung (1) in (5') ein und führt die entsprechende zeitliche Mittelung aus, so erhält man für den Verflüssigungskoeffizienten

$$J^{VE} = \frac{3}{2} \epsilon^2 \frac{(\lambda_{33} \dot{\gamma}_0)^2}{1 - (\lambda_{33} \dot{\gamma}_0)^2} \quad (15)$$

Dasselbe Resultat erhält man für J^V , wenn man nur das Viskositätsgesetz dieses Modells (Gleichung (5'')) betrachtet. Die Funktion $\psi(\dot{\gamma}_0, \omega)$ ist somit Eins und hängt weder von $\dot{\gamma}_0$ noch von ω ab. Das dieser rheologischen Zustandsgleichung entsprechende Viskositätsgesetz weist selbst schon deutlich auf die engen Anwendungsgrenzen ($(\lambda_{33} \dot{\gamma})^2 \ll 1$) dieses Modells hin.

2. Suspensionsmodell von Leal und Hinch, Gleichung (6)

In [13] ist die entsprechende Größe für τ_{20}^{VE} (allerdings mit einem Fehler behaftet) dargestellt. Dividiert man die Größen $\dot{\gamma}_0$ und ω durch $6 D_B$, so erhält man für τ_{20}^{VE} mit den entsprechenden dimensionslosen Größen B und D Gleichung (16).

$$\tau_{20}^{VE} = -\tau_{2LH} B^3 \frac{3+D^2-B^2}{(1+B^2)[1+(B-D)^2][1+(B+D)^2]}$$

$$\tau_{2LH} = \frac{18}{5} \phi k^2 \mu D_B \quad (16)$$

Mit Gleichung (16) findet man für den Verflüssigungskoeffizienten J^{VE} folgenden Ausdruck:

$$J^{VE} = \frac{\epsilon^2}{2} \tau_{2LH} \frac{B^2(3+D^2-B^2)}{(1+B^2)[1+(B-D)^2][1+(B+D)^2][\tau_{1LH} + \tau_{2LH}(1+B^2)^{-1}]}$$

$$\tau_{1LH} = 6 D_B \mu \left[1 + \phi \left(\frac{5}{2} + k^2 \frac{26}{147} \right) \right] \quad (17)$$

Hierbei ist interessant, daß man in Abhängigkeit vom Größenverhältnis D und B positive und negative Verflüssigung („Verfestigung“) erzielen kann, wie das schon von Barnes und Mitautoren [1] für das Oldroydmodell erhalten wurde. Die entsprechende Größe des Verflüssigungskoeffizienten für den Fall, daß man nur mit dem Viskositätsgesetz dieses Modells arbeitet, ist in Gleichung (18) dargestellt.

$$J^V = \frac{\epsilon^2}{2} \tau_{2LH} \frac{B^2(3-B^2)}{(1+B^2)^2 [\tau_{1LH}(1+B^2) + \tau_{2LH}]} \quad (18)$$

Auch diese Gleichung zeigt einen Vorzeichenwechsel für das Verflüssigungsverhalten an. In beiden Fällen, dem vollständigen Modell und dem für das Viskositätsgesetz, wird ein richtiges Grenzwertverhalten für $\dot{\gamma}_0 \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow 0$ festgestellt und es gelten somit die Gleichungen (13) und (14). Die Funktion ψ für dieses Modell ist im Bild 2 dargestellt.

3. Pipkinmodell, Gleichung (7)

Für eine Deformationsgeschichte entsprechend Gleichung (1) stellt dieses Modell im Zusammenhang mit den Konsistenzbeziehungen

$$\frac{d\tau_0}{d\dot{\gamma}_0} = \int_0^\infty G_1(\dot{\gamma}_0, s) ds$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \tau_0}{d\dot{\gamma}_0^2} = \int_0^\infty \int_0^\infty G_2(\dot{\gamma}_0, s_1, s_2) ds_1 ds_2$$

die allgemeinste Formulierung einer rheologischen Zustandsgleichung dar. Die konkreten Eigenschaften werden von der Wahl der Funktionen G_1 und G_2 beeinflusst. Bei der Formulierung einer rheologischen Zustandsgleichung auf diese Art und Weise muß der Verflüssigungseffekt mit der sekundären Relaxationsfunktion $G_2 = G_2(\dot{\gamma}_0, s_1, s_2)$ verbunden sein.

Benutzt man entsprechend Gleichung (1) den Ansatz $\dot{\gamma}_p(t-s) = \epsilon \cdot \dot{\gamma}_0 \cdot \cos[\omega(t-s)]$ zur Berechnung des Integrals (7), so erhält man nach der zeitlichen Mittelung folgenden Ausdruck für J^{VE}

$$J^{VE} = -\frac{\epsilon^2}{2} \frac{\dot{\gamma}_0^2}{\tau_0} \int_0^\infty \int_0^\infty G_2(\dot{\gamma}_0, s_1, s_2) \cos[\omega(s_1 - s_2)] ds_1 ds_2 \quad (19)$$

Spaltet man die sekundäre Relaxationsfunktion G_2 , wie von Jones und Walters [12] vorgeschlagen, in einen deformationsgeschwindigkeitsabhängigen und zeitabhängigen Anteil auf, so erhält man mit der zweiten Konsistenzbeziehung folgenden Ausdruck für diese Funktion.

$$G_2(\dot{\gamma}_0, s_1, s_2) = \frac{1}{2 \cdot \lambda_{p2}^2} \frac{d^2 \tau_0}{d\dot{\gamma}_0^2} \exp\left(-\frac{s_1 + s_2}{\lambda_{p2}}\right) \quad (20)$$

λ_{p2} ist eine Zeitkonstante der Funktion G_2 . Mit Gleichung (20) erhält man dann für den Verflüssigungskoeffizienten

$$J^{VE} = -\frac{\epsilon^2}{4} \frac{1 + (\lambda_{p2} \omega)^2}{\tau_0} \frac{\dot{\gamma}_0^2}{d\dot{\gamma}_0^2} \frac{d^2 \tau_0}{d\dot{\gamma}_0^2}$$

Da für das Pipkinmodell der Viskositätsansatz frei gewählt werden kann, ergibt sich unter Berücksichtigung der Gleichungen (10) und (11) der Verflüssigungskoeffizient für ein beliebiges Viskositätsgesetz folgendermaßen

$$J^V = -\frac{\epsilon^2}{2} \frac{\dot{\gamma}_0^2}{\tau_0} \int_0^\infty \int_0^\infty G_2(\dot{\gamma}_0, s_1, s_2) ds_1 ds_2$$

$$= -\frac{\epsilon^2}{4} \frac{\dot{\gamma}_0^2}{\tau_0} \frac{d^2 \tau_0}{d\dot{\gamma}_0^2} \quad (22)$$

Entsprechend dieser Gleichungen erhält man für das Pipkinmodell im Zusammenhang mit den hier gewählten Relaxationsfunktionen einen einfachen Ausdruck für die Funktion ψ ,

$$\psi(\omega, \dot{\gamma}_0) = (1 + (\lambda_{p2} \omega)^2)^{-1} \quad (23)$$

die somit einen die Verflüssigung reduzierenden Einfluß der Elastizität (in Form von λ_{p2}) zum Ausdruck bringt.

4. Das nichtaffine Netzwerkmodell nach Phan-Thien, Gleichung (8)

Dieses Modell stellt eine rheologische Zustandsgleichung vom Integraltyp mit deformationsabhängiger Relaxationsfunktion dar, wobei diese Relaxationsfunktion aus dem Produkt eines deformationsabhängigen Teils mit der Relaxationsfunktion der linearen Viskoelastizitätstheorie besteht. Dieser zweite Teil der Funktion wird als Fourier-Cosinusrücktransformation bezüglich des eingesetzten Viskositätsmodells gefunden. Damit ist von

vorherin festgelegt, daß der Zeitparameter der Viskositätsfunktion als Relaxationszeit zu interpretieren ist. Die Größe σ ist ein Modellparameter [10], der das Verhältnis von dynamischer zur stationären Viskosität reguliert. Für den Fall $\sigma = 1$ erhält man das Goddard-Miller-Modell. Folgt man auch hier der auf die anderen Modelle angewendeten Vorgehensweise, so erhält man für dieses Modell folgende Gleichung für den Verflüssigungskoeffizienten:

$$J^{VE} = \frac{\kappa^2}{2} \sigma^2 \left(1 - \frac{H_c - \alpha^* H_s}{\eta}\right) \quad (24)$$

$$\alpha = \frac{\omega}{\dot{\gamma}_0}; \quad \alpha^* = \frac{\omega}{\sigma \cdot \dot{\gamma}_0}$$

Dabei bezeichnen η den Ausdruck für ein verwendetes Viskositätsmodell (Gleichung (8'')) oder (8''') und H_c sowie H_s sind folgendermaßen definiert:

$$H_c = \int_0^{\infty} G(s) \cos(\dot{\gamma}_0 s) \cdot \cos(\omega \cdot s) ds \quad (25)$$

$$H_s = \int_0^{\infty} G(s) \sin(\dot{\gamma}_0 s) \cdot \sin(\omega \cdot s) ds$$

G ist die Relaxationsfunktion des Modells von Phan-Thien. Es sei erwähnt, daß bei der Herleitung von Gleichung (24) nicht ϵ sondern $\sigma \cdot \kappa$ als kleiner Parameter gewählt werden muß. Die Größe κ stellt dabei die Deformationsamplitude der überlagerten Strömung dar, $\kappa = \epsilon \cdot \dot{\gamma}_0 \cdot \omega^{-1}$.

Auch für das nichtaffine Netzwerkmodell kann man, da es an keine spezielle Form des Viskositätsgesetzes gebunden ist, für den Verflüssigungskoeffizienten des viskosen Modells Gleichung (22) angeben.

Für das spezifische Modellverhalten lassen sich Schlüsse nur im Zusammenhang mit einem bestimmten, frei wählbaren Viskositätsansatz ziehen. Zieht man jedoch den Realteil der dynamischen Viskositätsfunktion für das nichtaffine Netzwerkmodell nach Phan-Thien bei einer in-line-Überlagerung $H'_{\parallel}(\omega, \dot{\gamma}_0)$ mit in die Betrachtung ein,

$$H'(\omega, \dot{\gamma}_0) = H_c - \alpha^{*-1} H_s$$

so gibt dieses Modell einen einfachen Zusammenhang zwischen Verflüssigungskoeffizient und diesem Realteil der dynamischen Viskosität. Man kann nämlich die Messergebnisse für die dynamische Viskosität unter der Übertragungsbedingung $\alpha^* = 1$ zur Berechnung von J^{VE} -Werten heranziehen.

$$J^{VE}_{\alpha^*=1} = \frac{\kappa^2}{2} \sigma^2 \left(1 - \frac{H'_{\parallel} \alpha^*=1}{\eta}\right)$$

Eine Berechnung des Verflüssigungskoeffizienten aus anderen Materialfunktionen läßt sich ohne Restriktionen (beliebiges α^*) z. B. für das Goddard-Miller-Modell dann durchführen, wenn man den Imaginärteil der dynamischen Normalspannungsviskosität

$$H'_{N\parallel}(\omega, \dot{\gamma}_0) = \frac{N_{1\parallel}}{\dot{\gamma}_0} = 2 \left(H_s - \frac{\eta - H_c}{\alpha}\right)$$

für diese überlagerte Strömung in die Betrachtung mit einbezieht, da dann in Gleichung (24) die Funktionen H_c und H_s durch die Funktionen H'_{\parallel} und $H''_{N\parallel}$ ersetzt werden können. $N_{1\parallel}$ ist die erste Normalspannungsdifferenz bei in-line-Überlagerung. Diese Beziehungen müssen sowohl am Experiment als auch für andere Zustandsgleichungen überprüft werden.

Im weiteren soll nun das spezifische Modellverhalten am Beispiel der Potenzgesetzapproximation und des Viskositätsgesetzes nach Segalman untersucht werden.

a) Das Potenzgesetz

Für das Potenzgesetz erhält man folgende Relaxationsfunktion:

$$G(s) = \frac{2}{\pi} \sigma \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \Gamma(n) \cdot (\sigma \cdot s)^{-n}; \quad n \neq 0$$

$\Gamma(\cdot)$ ist die Gammafunktion.

Berechnet man nun mit dieser Relaxationsfunktion die Integrale (25) und setzt diese in Gleichung (24) ein, so erhält man für den Verflüssigungskoeffizienten den Ausdruck

$$J^{VE} = \frac{\kappa^2}{2} \left[1 - \frac{|1 - \alpha^*|^n + (1 + \alpha^*)^n}{2}\right] \quad (26)$$

Betrachtet man nur das viskose Modell im Zusammenhang mit dem Potenzgesetz, so ergibt sich die Gleichung

$$J^V = \frac{\kappa^2}{4} \alpha^{*2} n(1-n) \quad (27)$$

Die Funktion $\psi(\omega, \dot{\gamma}_0)$

$$\psi = \frac{2}{\alpha^{*2} n(1-n)} \left[1 - \frac{|1 - \alpha^*|^n + (1 + \alpha^*)^n}{2}\right] \quad (28)$$

ist im Bild 4 graphisch dargestellt, wobei für kleine und große α^* folgende asymptotische Beziehungen gelten

$$\alpha^* \rightarrow 0: \psi \simeq 1 + \frac{(2-n)(3-n)}{12} \alpha^{*2}$$

$$\alpha^* \rightarrow \infty: \psi \simeq \frac{2}{\alpha^{*2} n(1-n)} (1 - n \alpha^{*n-1})$$

Bemerkenswert ist dabei, daß diese asymptotischen Beziehungen in einem großen α^* -Bereich das genaue Verhalten gemäß Gleichung (28) beschreiben. Bringt man Gleichung (26) und (27) auf eine Form, die sie mit den anderen Gleichungen vergleichbar macht (Einführung von ϵ), so kann man leicht sehen, daß auch für dieses Modell folgende Grenzwertbeziehung gilt:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} J^V_{\epsilon} = J^V_{\epsilon}$$

Ansonsten erhält man

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} J_k^{VE} = \lim_{\omega \rightarrow 0} J_k^V = 0$$

b) Das Viskositätsgesetz nach Segalman [11]

Dieses Viskositätsgesetz kann man in folgender Form darstellen

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \frac{\cos[(1-n) \arctan(\lambda_s \cdot \dot{\gamma})]}{[1 + (\lambda_s \dot{\gamma})^2]^{\frac{1-n}{2}}} \quad (29)$$

wobei zu bemerken ist, daß für n-Werte kleiner 0.3 dieses Modell unrealistisch wird, da lokale Maxima in der Funktion $\tau(\dot{\gamma})$ auftreten.

Die aus Gleichung (29) berechnete Relaxationsfunktion hat folgendes Aussehen [10]

$$G(s) = \frac{\sigma}{\Gamma(1-n)} (\sigma \cdot s)^{-n} \exp(-\sigma \cdot s) + E \delta(s)$$

und gibt bei der Berechnung der Integrale (25) folgende Ausdrücke

$$H_c = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos[(1-n) \arctan(B|1-\alpha^*|)]}{[1 + B^2(1-\alpha^*)^2]^{\frac{1-n}{2}}} + \frac{\cos[(1-n) \arctan(B(1+\alpha^*))]}{[1 + B^2(1+\alpha^*)^2]^{\frac{1-n}{2}}} \right\} + E$$

$$H_s = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos[(1-n) \arctan(B|1-\alpha^*|)]}{[1 + B^2(1-\alpha^*)^2]^{\frac{1-n}{2}}} - \frac{\cos[(1-n) \arctan(B(1+\alpha^*))]}{[1 + B^2(1+\alpha^*)^2]^{\frac{1-n}{2}}} \right\}$$

B ist das Produkt aus λ_s und $\dot{\gamma}_0$. $\delta(\cdot)$ stellt die Dirac'sche Deltafunktion dar und E ist die dimensionslose Endviskosität $E = \eta_\infty (\eta_0 - \eta_\infty)^{-1}$.

Setzt man die Relaxationsfunktion dieses Modells in den allgemeinen Ausdruck für den Verflüssigungskoeffizienten ein, so erhält man die spezifische Modellvorhersage für das Segalmanviskositätsgesetz, die hier formelmäßig nicht angegeben werden soll. Im Bild 4 ist ein Beispiel für den Verflüssigungskoeffizienten J^{VE} dieses Modells für den Fall $n = 0.5$ und $E = 0$ angegeben.

Für den nur auf der Fließkurve basierenden Verflüssigungskoeffizienten erhält man

$$J^V = \frac{\kappa^2}{2} (1-n) \frac{D^2}{B} \frac{(1-(1-n)B^2) \sin[(1-n) \arctan B]}{(1+B^2)^2 \left\{ E(1+B^2)^{\frac{1-n}{2}} + 0,5B(4-n(1-B^2)) \cos[(1-n) \arctan B] \right\} + \cos[(1-n) \arctan B]} \quad (30)$$

Die dimensionslose Frequenz D ist das Produkt aus λ_s und ω . Die zu diesem Modell gehörende Funktion $\psi(D, G_0)$ ist im Bild 4 für $n = 0.5$ und $E = 0$ graphisch dargestellt. Auch hier ist wie beim Potenzgesetz ein Verhalten zu beobachten, das maximale Verflüssigung in Abhängigkeit von α^* anzeigt. Auch dieses Modell erfüllt die Grenzwertbeziehungen (13) und (14).

5. Verallgemeinertes Maxwellmodell nach Phan-Thien, Gleichung (9)

Dieses Modell stellt im Prinzip eine rheologische Zustandsgleichung vom Integraltyp mit deformationsgeschwindigkeitsabhängiger Relaxationsfunktion dar, wobei auch hier die verallgemeinerte Relaxationsfunktion in einen deformationsgeschwindigkeitsabhängigen Teil F ($\dot{\gamma}^2$) und den Teil, der der linearen Viskoelastizitätstheorie entspricht, aufgespalten wird. Die Funktion F stellt im wesentlichen schon die Viskositätsfunktion dar, die, da F als monoton fallende Funktion nach Phan-Thien [7], [8] beliebig wählbar, von der Relaxationsfunktion abgekoppelt ist. Gegen die Formulierung einer rheologischen Zustandsgleichung auf diese Art und Weise sind viele begründete Einwände vorgebracht worden [16]. Dieser Gleichungstyp soll aber trotzdem betrachtet werden, da er in der Literatur bei der Berechnung überlagerter Strömungen viel eingesetzt wurde [6, 7, 8]. Die Funktion F ($\dot{\gamma}^2$) wird hier so gewählt, daß man für die Viskosität die Potenzgesetzapproximation erhält

$$F = [\dot{\gamma}^2]^{\frac{n-1}{2}} \quad (31)$$

Setzt man nun Gleichung (31) in Gleichung (9) ein, so erhält man nach zeitlicher Mittelung für den Verflüssigungskoeffizienten

$$J^{VE} = \frac{\epsilon^2}{4} n(1-n)$$

Damit ist offenbar, daß bei solch einer Darstellung der rheologischen Zustandsgleichung und bei Verwendung von ϵ als kleinem Parameter keine Abhängigkeit des Koeffizienten J^{VE} von der dimensionslosen Frequenz oder Deformationsgeschwindigkeit der Grundströmung auftritt und $J^{VE} = J^V$ ist. Daraus folgt, daß die Funktion $\psi(\omega, \dot{\gamma}_0)$ im gesamten ω und $\dot{\gamma}_0$ -Bereich gleich Eins ist. Das gleiche Bild ergibt sich, wenn für F andere, monoton fallende Funktionen (z. B.: $(1 + \dot{\gamma}^2)^{-n}$) ausgewählt werden.

3. Diskussion der Ergebnisse

Die rheologische Zustandsgleichung 3. Ordnung beschreibt die Materialfunktionen der stationären Scherströmung wie die Viskositätsfunktion und die Funktion der ersten Normalspannungsdifferenz nur in einem Bereich sehr kleiner Deformationsgeschwindigkeiten qualitativ richtig ($(\lambda_{33} \cdot \dot{\gamma})^2 \ll 1$). Deshalb kann die Abhän-

gigkeit der Verflüssigungskoeffizienten von $\dot{\gamma}_0$ und ω auch nur in diesem Wertebereich betrachtet werden. Es liegt eine quadratische Abhängigkeit der Koeffizienten J^V und J^{VE} von $\dot{\gamma}_0$ vor, die sich für den hier angezeigten Bereich im qualitativen Übereinklang mit anderen theoretischen Untersuchungen [11] und den experimentellen Ergebnissen befindet [1], [4]. Die Materialkonstanten λ_{31} und λ_{32} , die die Normalspannungen unter stationären Bedingungen bzw. die dynamische Viskosität bestimmen, gehen im Rahmen der 3.-Ordnung-Approximation nicht in den Ausdruck für J^{VE} ein und es kommt somit zu keinem Einfluß des „Gedächtnisses“ auf das Verflüssigungsverhalten. Dieser Einfluß kann erst im Rahmen der 4.-Ordnungs-Approximation dargestellt werden [18]. Gleiches trifft auch auf die Frequenzabhängigkeit des Verflüssigungskoeffizienten J^{VE} zu. Damit beschreibt das 3. Ordnungsmodell nur das viskose Verflüssigungsverhalten. Eine rheologische Zustandsgleichung dieses Typs und dieser Ordnung wird erwartungsgemäß den qualitativen und quantitativen Anforderungen einer überlagerten Strömung nur unzureichend gerecht.

Das Modell von Leal und Hinch zeigt, was die Materialfunktionen der stationären Scherströmung betrifft, ein ähnliches Verhalten wie das 3-Konstanten-Oldroyd-Modell. Es ist im Rahmen bestimmter Parameterbereiche (Verhältnis von Anfangs- zur Endviskosität) über einen großen $\dot{\gamma}_0$ -Wertebereich einsetzbar.

Demzufolge werden für dieses Modell, wenn man den Verflüssigungseffekt nur mit der Fließkurve beschreibt (J^V vgl. Bild 1a), die selben Ergebnisse erhalten wie für das Oldroydmodell [1]. Betrachtet man den Verflüssigungskoeffizienten für das vollständige (viskoelastische) Modell, so wird auch hier ein Vorzeichenwechsel in Abhängigkeit von B und D angezeigt. Die Frequenzabhängigkeit des Verflüssigungskoeffizienten ist im Bild 1b dargestellt. Wie man aus Bild 1 generell erkennt, ist der absolute Effekt sehr gering (≈ 1 prozentige Durchsatzsteigerung).

Das ist charakteristisch für diese Zustandsgleichung, da der Viskositätsansatz dieses Modells nur einen schwachen Viskositätsabfall modelliert ($\tau_{1LH} = 9$ Pa, $\tau_{2LH} = 1$ Pa). Die Frequenzabhängigkeit von J^{VE} kann, je nach-

dem in welchem B -Bereich man sich befindet, monoton fallend sein, aber auch ein Maximumverhalten aufweisen.

Die Funktion ψ ist für diese rheologische Zustandsgleichung im Bild 2 dargestellt. Sie spiegelt ebenfalls die unterschiedliche Frequenzabhängigkeit wider. Es kann also in Abhängigkeit vom B -Wert zu einem Abfall oder Anwachsen des Verflüssigungskoeffizienten bei Vergrößerung von D kommen.

Damit läßt dieses Modell ein breites Verhaltensspektrum für den Einfluß der Elastizität und der Frequenz auf den Verflüssigungskoeffizienten zu und erweist sich zur Berechnung des Verflüssigungseffektes geeignet.

Das Pipkinmodell, das auf Grund seiner mathematischen Struktur an keine spezielle Viskositätsfunktion gebunden ist, erweist sich bei der Betrachtung von J^V als flexibel einsetzbar. Das vollständige Modell liefert bei Auswahl der primären und sekundären Relaxationsfunktionen in der dargestellten Art und Weise einen Ausdruck für J^{VE} , der nicht von charakteristischen Größen der primären Relaxationsfunktion abhängt.

Das ist nicht verwunderlich, da der Verflüssigungseffekt als ein Effekt zweiter Ordnung betrachtet wird ($J^{VE} \sim \epsilon^2 \sim \dot{\gamma}_p^2$). Dementgegen erweist sich die auf der Grundlage der Ergebnisse von Barnes u. a. [1] gebildete Funktion ψ von beiden Relaxationsfunktionen abhängig. Die Abhängigkeit von nur der sekundären Relaxationsfunktion führt dazu, daß die Funktion $\psi(\omega, \dot{\gamma}_0)$ für variable λ_{p2} einen über ω monoton fallenden Verlauf aufweist.

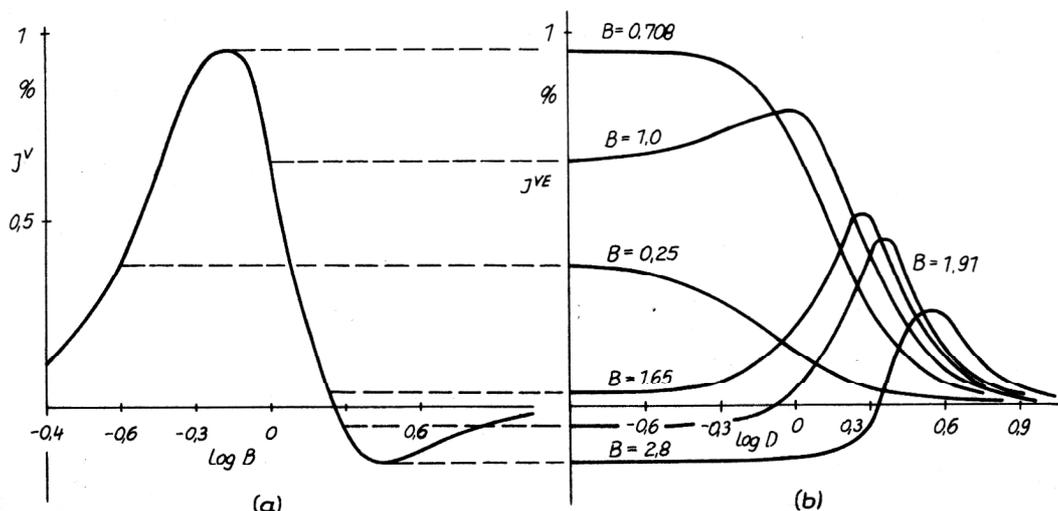
Damit ist dieses Modell durch die hier ausgewählten Relaxationsfunktionen in seinen Variationsmöglichkeiten

Bild 1

(a): Abhängigkeit des Verflüssigungskoeffizienten J^V von der dimensionslosen Deformationsgeschwindigkeit der Grundströmung $B = \frac{\dot{\gamma}_0}{6 D_B}$ für das Modell von Leal und Hinch.

(b): Abhängigkeit des Verflüssigungskoeffizienten J^{VE} von der dimensionslosen Frequenz $D = \frac{\omega}{6 D_B}$.

Die Fließkurvenparameter τ_{1LH} und τ_{2LH} sind in beiden Fällen ((a) und (b)) 9 Pa bzw. 1 Pa. $\epsilon^2 = 0.71$



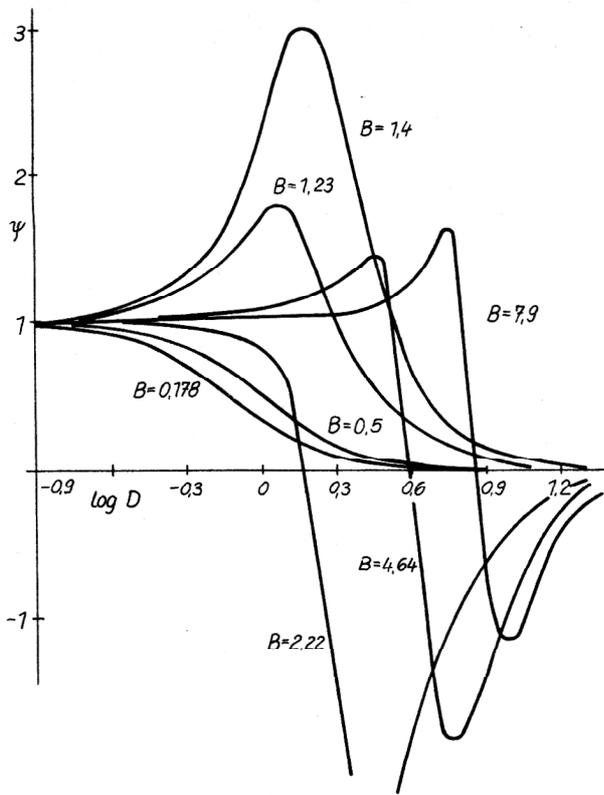


Bild 2
 Abhängigkeit der Funktion ψ des Modells von Leal und Hinch von der dimensionslosen Frequenz $D = \frac{\omega}{6 D_B}$ für verschiedene dimensionslose Deformationsgeschwindigkeiten der Grundströmung $B = \frac{\dot{\gamma}_0}{6 D_B} \cdot \tau_{1LH}$ und τ_{2LH} wie in Bild 1

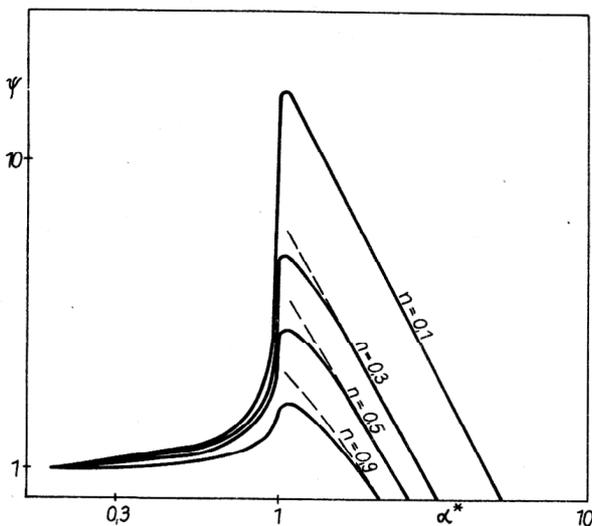


Bild 3
 Abhängigkeit der Funktion ψ des nichtaffinen Netzwerkmodells nach Phan-Thien von $\alpha^* = \frac{\omega}{\sigma \dot{\gamma}_c}$ für das Potenzgesetz bei verschiedenen Fließindizes n (Volllinien). Die gestrichelten Linien stellen die asymptotische Entwicklung der Funktion ψ für große α^* dar.

stark eingengt und wenig geeignet, den Verflüssigungseffekt qualitativ gut zu beschreiben. Alles deutet darauf hin, daß die Aufspaltung von G_2 in einen deformations- und zeitabhängigen Teil das Relaxationsverhalten nicht annähernd adäquat beschreibt und somit zum Versagen des Modells führt.

Das nichtaffine Netzwerkmodell nach Phan-Thien ist wie das Pipkinmodell nicht an einen bestimmten Viskositätsansatz gebunden. Da jedoch die Relaxationsfunktion als Cosinus-Rücktransformation des Viskositätsgesetzes bestimmt wird [10], ist der Zeitparameter eines solchen Gesetzes mit der Relaxationszeit identisch. Wie jedoch die Bilder 3 und 4 zeigen, ist das nichtaffine Netzwerkmodell flexibler und realistischer als das vorher betrachtete Modell bei der Darstellung der Frequenz- und Elastizitätsabhängigkeit des Verflüssigungskoeffizienten J^{VE}

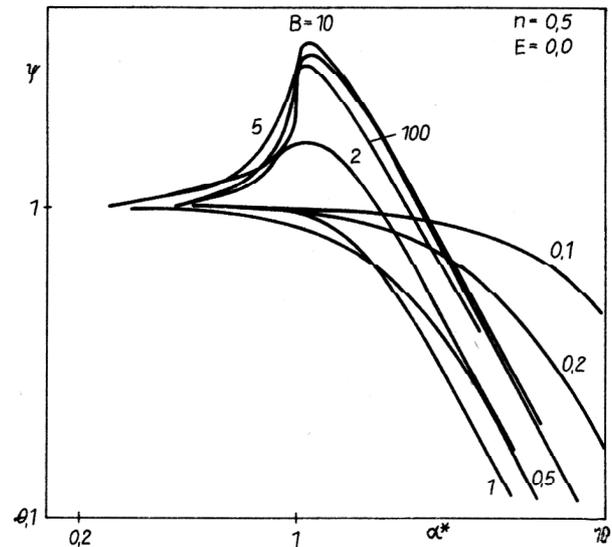


Bild 4
 Abhängigkeit der Funktion ψ des nichtaffinen Netzwerkmodells nach Phan-Thien mit dem Segalmanviskositätsansatz (enthält die Zeitkonstante λ_s) von der Größe $\alpha^* = \frac{\omega}{\sigma \dot{\gamma}_0}$ für verschiedene dimensionslose Deformationsgeschwindigkeiten der Grundströmung $B = \lambda_s \cdot \dot{\gamma}_0$

Beide benutzten Viskositätsansätze (das Potenzgesetz und das Segalmanmodell) liefern für die Frequenzabhängigkeit des Verflüssigungskoeffizienten J^{VE} ein Maximumverhalten. Während für die Potenzgesetzapproximation für alle $\dot{\gamma}_0$ -Werte ein solcher ω -Wert existiert, für den ψ maximal wird, erhält man für das Segalmanmodell bei einem gegebenen n nur für $\lambda_s \cdot \dot{\gamma}$ -Werte größer Eins ein Maximum. Hierin liegt möglicherweise die Erklärung für das Versagen des Goddard-Miller-Modells in der Arbeit [11], da man sich mit den realisierten Grundströmungsparametern auf den monoton fallenden Ästen der Funktion ψ befand. Das Grenzwertverhalten von J^{VE} ist für $\omega \rightarrow 0$ richtig und zeigt unter der Bedingung $\epsilon = \text{const}$ die Identität zwischen den Verflüssigungskoeffizienten für das viskose und viskoelastische Modell. Die Integralgleichung mit deformationsgeschwindigkeitsabhängiger Relaxationsfunktion nach Phan-Thien zeigt

entgegen den Ergebnissen bei der Berechnung des Verflüssigungseffektes als Randwertaufgabe [7], [8] ein unbefriedigendes Modellverhalten. Diese Aussage ist mit der Tatsache verbunden, daß der Verflüssigungskoeffizient für das viskoelastische Modell nicht von der Frequenz ω abhängt und somit die Funktion ψ gleich Eins ist. Die Ursachen für dieses anormale Verhalten sind, wie schon erwähnt, in der Formulierung der rheologischen Zustandsgleichung in der entkoppelten Form der Relaxationsfunktion zu suchen.

Abschließend sollen die Ergebnisse noch einmal kurz zusammengefaßt werden:

1. Es sind nur solche rheologischen Zustandsgleichungen in der Lage, den Verflüssigungseffekt über einen großen Parameterbereich qualitativ gut zu beschreiben, die auch für die Materialfunktionen der stationären Scherströmung und für eine Oszillationsströmung mit kleinen Amplituden qualitativ gute Ergebnisse liefern (z. B. die Gleichungen (6) und (8)).

2. Die der Berechnung von überlagerten Strömungen vorangehende Auswahl von rheologischen Zustandsgleichungen, die nur auf den Materialfunktionen der stationären und oszillierenden Scherströmung aufbaut, ist, da sie keinen Einblick in die Wechselwirkung beider Teilströmungen zuläßt, unvollständig und kann, wie es in [11] vermutet wird, falsch sein.

3. Bei der Auswahl von rheologischen Zustandsgleichungen für die Berechnung überlagerter Strömungen ist das qualitative Verhalten des Verflüssigungskoeffizienten ein zusätzliches Auswahlkriterium.

4. Der Einfluß der Elastizität auf den Verflüssigungseffekt kann mit Hilfe der Funktion $\psi(\omega, \dot{\gamma}_0) = \frac{J^{VE}}{J^V}$

bewertet werden. Die Veränderung der Relaxationszeit führt in Abhängigkeit von den kinematischen Parametern ω und $\dot{\gamma}_0$ zu einer relativen (bezüglich der viskosen Komponente J^V) Verstärkung oder Abschwächung des Verflüssigungskoeffizienten J^{VE} . Einige Modelle sagen eine Art „elastischer Resonanz“ vorher (z. B. Gleichung (8) mit dem Potenzgesetz und für das Segalmanmodell in einem bestimmten B-Bereich).

5. Das Grenzwertverhalten des Koeffizienten J^{VE} stellt für $\omega \rightarrow 0$ ein weiteres mögliches Auswahlkriterium für die rheologische Zustandsgleichung dar und liefert eine Beziehung zwischen beiden Betrachtungsweisen (viskoses Modell, viskoelastisches Modell).

4. Zusammenfassung

Ausgehend von einer Betrachtung der Verflüssigung als Effekt zur Beschreibung von vibrations- oder pulsationsinduzierten Durchsatzsteigerungen wird die Notwendigkeit einer Analyse rheologischer Zustandsgleichungen bezüglich dieses Effektes formuliert. Für verschiedene, bei der Lösung der entsprechenden Randwertaufgaben schon benutzte Zustandsgleichungen, die explizit nach dem Spannungstensor aufgelöst sind, wird diese Analyse

durchgeführt. Dabei werden Kriterien dargestellt, die über die qualitative Leistungsfähigkeit der verwendeten rheologischen Zustandsgleichungen Auskunft geben.

LITERATUR

- [1] Barnes, H.A., Townsend, P., Walters, K.: On pulsatile flow of non-Newtonian liquids. *Rheol. Acta* 10 (1971), S. 517 – 527.
- [2] Mena, B. u. a.: Complex flow of viscoelastic fluids through oscillating pipes. *J. Non-Newt. Fluid Mech.* 5 (1979), S. 427 – 448.
- [3] Sobolik, V., Wein, O., Mitschka, P.: Filmströmung nicht-newtonscher Flüssigkeiten an einer senkrechten oszillierenden Wand. *Rheol. Acta* 16 (1977), S. 394 – 399.
- [4] Eastwood, A.R., Barnes, H.A.: The superposition of oscillatory on steady shear. *Rheol. Acta* 14 (1975), S. 795 – 800.
- [5] Basov, N.I., Ljubartoric, S.A., Ljubartovic, V.A.: Vibroformovanie polimerov, Chimija, Leningradskoje otdelenic, Leningrad 1979.
- [6] Phan-Thien, N.: On pulsating flow of polymeric fluids. *J. Non-Newt. Fluid Mech.* 4 (1978), S. 167 – 176.
- [7] Phan-Thien, N.: Flow enhancement mechanism of a pulsating flow of non-Newtonian liquids. *Rheol. Acta* 19 (1980), S. 285 – 290.
- [8] Phan-Thien, N.: The effect of random longitudinal vibration on pipe flow of a non-Newtonian fluid. *Rheol. Acta* 19 (1980), S. 539 – 547.
- [9] Manero, O., Walters, K.: On elastic effects in unsteady pipe flows. *Rheol. Acta* 19 (1980), S. 277 – 284.
- [10] Phan-Thien, N.: On a pulsating flow of Polymeric liquids: Strain dependent memory kernels. *J. Rheol.* 25: 3 (1981), S. 293 – 314.
- [11] Davies, J.M., Bhumiratana, S., Bird, R.B.: Elastic and inertial effects in pulsatile flow . . . *J. Non-Newt. Fluid Mech.* 3 (1977/1978), S. 237 – 259.
- [12] Jones, T.E.R., Walters, K.: The behaviour of materials under combined steady and oscillatory shear. *J. Phys. A: Gen. Phys.* 4 (1971), S. 85 – 100.
- [13] Leal, L.G., Hinch, E.J.: The rheology of a suspension of nearly spherical particles subject to Brownian rotations. *J. Fluid Mech.* 55 (1972) part. 4, S. 745 – 765.
- [14] Pipkin, A.C.: *Modern Developments in the Mechanics of Continua.* Academic Press London 1966, S. 89 ff.
- [15] Kazakia, J.Y., Rivlin, R.S.: The influence of vibration on Poiseuille flow of a non-Newtonian fluid. *Rheol. Acta* 17 (1978), S. 210 ff.
- [16] Astarita, G., Marrucci, G.: *Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics.* Mc Graw-Hill London 1974.
- [17] Powell, R.L., Schwarz, W.H.: Non linear Dynamic Viscoelasticity. *J. Rheol.* 23: 3 (1979), S. 323 – 352.
- [18] Böhme, G., Nonn, G.: Instationäre Rohrströmung viskoelastischer Flüssigkeiten – Maßnahmen zur Durchsatzsteigerung. *Ingenieur-Archiv* 48 (1979), S. 35 – 49.

Anschriften der Verfasser:

Dr.-Ing. Christian Friedrich
Akademie der Wissenschaften der DDR,
Institut für Mechanik,
Institutsteil Karl-Marx-Stadt,
9010 Karl-Marx-Stadt, PSF 408 *

Ing. Ondra Wein CSc.
Ing. Pavel Mitschka CSc.-
CSAV

Institut für theoretische Grundlagen der
chemischen Technik
16502 Prag 6 – Suchbát, Rozvojova 135