TECHNISCHE MECHANIK 4 (1983) Heft 2
Manuskripteingang: 1. 10. 1982

Berücksichtigung von Zwangsbedingungen in der FEM mittels der Penalty-Funktion-Methode

Ulrich Gabbert

1. Problemstellung

Universelle Finite-Elemente-Programmsysteme müssen die Möglichkeit vorsehen, daß Nutzer spezielle Rand- und Zwangsbedingungen in das System einbringen können. Im Programmsystem COSAR [1], [2], [10], daß im Wissenschaftsbereich Festkörpermechanik der TH Magdeburg entwickelt wurde, erfolgt die Einarbeitung der Randbedingungen im Prozessor BOUCO, der nach dem Aufbau der System- (SYSMAT) und der Kraftmatrizen (FORCE) aktiviert wird (vgl. [1], [10]).

In der gegenwärtig für Nutzrechnungen zum Einsatz kommenden Version COSAR/E80 [3] sind als Standardvarianten folgende Rand- bzw. Zwangsbedingungen enthalten:

- vorgeschriebene Knotenverschiebungen (Sonderfall: Nullverschiebungen)
- elastische Abstützung von Knoten
- elastische Verbindung von Knoten
- Gleichheit der Verschiebungen zweier Knoten (Symmetriebedingung)

Für Erweiterungen sind im Prozessor BOUCO Schnittstellen vorhanden; der Nutzer muß ein Unterprogramm erstellen, das die Einarbeitung der gewünschten Randbedingung realisiert. Weitere Eingriffe in das Programmsystem sind bei der Datengenerierung erforderlich, da benötigte Eingabedaten in geeigneter Form im rechnerinternen Modell bereitgestellt werden müssen (vgl. Abschnitt „Rechnerinternes Berechnungsmodell" im Entwicklerhandbuch [3]) und gegebenenfalls vor der Ergebnisauswertung.

Für die Berücksichtigung allgemeiner Zwangsbedingungen sind die folgenden drei Methoden weit verbreitet (vgl. z. B. [5]):

- direkte Einarbeitung in das Gleichungssystem (durch Manipulationen an den Zeilen und Spalten, z. B. Transformationen, Additionen, Streichungen von Zeilen und Spalten)
- Anwendung der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren
- Anwendung der Penalty-Funktion-Methode

Die direkte Einarbeitung ist sicher die am häufigsten angewandte Methode in FEM-Programmen der Elastostatik und -dynamik. Sie ist allerdings auf lineare Zwangsbedingungen beschränkt und erfordert bei komplexen Zwangsbedingungen (z. B. Abhängigkeit eines Freiheitsgrades von mehreren anderen Freiheitsgraden) infolge der erforderlichen Zeilen- und Spaltenmanipulationen einen erheblichen rechentechnischen Aufwand.

Die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren eignet sich für die Erfassung komplexer linearer und nichtlinearer Zwangsbedingungen. Allerdings werden dabei zusätzliche Unbekannte (die Lagrangeschen Multiplikatoren) eingeführt; eine vorher positiv definite Koeffizientenmatrix verliert dadurch diese Eigenschaft (Nullelemente auf den zu den Lagrangeschen Multiplikatoren gehörenden Hauptdiagonalelementen).

Mittels der Penalty-Funktion-Methode (vgl. z. B. [4] bis [7]) gelingt es ebenfalls, allgemeine Zwangsbedingungen näherungsweise zu erfüllen; dazu werden keine zusätzlichen Unbekannten benötigt. Problematisch ist hier jedoch die Wahl der Penalty-Zahl. Je größer diese gewählt wird, desto besser werden die Zwangsbedingungen erfüllt; bei zu großen Werten ergeben sich allerdings numerische Schwierigkeiten (Verschlechterung der Kondition des Gleichungssystems, im Extremfall wird die Koeffizientenmatrix singulär). Dennoch ist die Penalty-Funktion-Methode sehr gut geeignet, um komplexe Zwangsbedingungen zu realisieren. Sie läßt sich problemlos und mit verhältnismäßig geringem Aufwand nachträglich in vorhandene FEM-Programme implementieren. Im Programmsystem COSAR wird diese Methode unter anderem benutzt, um kompatible Verbindungen von nicht korrekt verknüpften finiten Elementen (und Substrukturen) zu erreichen. Damit lassen sich z. B. ohne die Verwendung spezieller Elemente nur mit Hexaederelementen örtliche Netzverfeinerungen realisieren. Eine andere Anwendung ist die Berücksichtigung von stabförmigen Versteifungen (z. B. Bewehrungen im Beton), die beliebig durch eine mit 3D-Elementen vernetzte Struktur verlaufen.

2. Penalty-Funktion-Methode

Es seien Probleme betrachtet, deren Lösungen dem Funktional π (z. B. dem elastischen Potential) bezüglich der eingeführten Freiheitsgrade $\mathbf{v}$ (Vektor der Gesamtfreiheitsgrade der vernetzten Struktur) unter Beachtung von Zwangsbedingungen der Form

$$\mathbf{z}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \qquad \text{in } V \tag{1}$$

einen minimalen Wert erteilen. Das Produkt $\mathbf{z}^T\mathbf{z}$ ist stets größer oder gleich Null und nimmt seinen minimalen Wert an, wenn (1) erfüllt ist. Das Minimum von π unter Wirkung der Zwangsbedingungen kann durch Minimierung des zusammengesetzten Funktionals

$$\chi = \pi + \frac{1}{2}\,\alpha \int_V \mathbf{z}^T(\mathbf{v})\,\mathbf{z}(\mathbf{v})\,dV \longrightarrow \text{Min.} \tag{2}$$

erreicht werden; α ist die sogenannte Penalty-Zahl. Die Zwangsbedingungen (1) werden näherungsweise erfüllt und zwar mit wachsendem α immer besser. Eine interessante Anwendung von (2) ist die Entwicklung spezieller Plattenelemente, bei denen getrennte Ansatzfunktionen für die Durchbiegung und den Biegewinkel eingeführt werden und der Zusammenhang zwischen Durchbiegung und Biegewinkel durch Zwangsbedingungen realisiert wird.

Sind die Zwangsbedingungen punktweise zu erfüllen (z. B. bei Zwangsbedingungen zwischen einzelnen Knotenfreiheitsgraden), entfällt die Integration in (2). Diese Form der Zwangsbedingungen wird im weiteren betrachtet und angenommen, daß es sich um lineare Zwangsbedingungen handelt, die sich folgendermaßen darstellen lassen:

$$\mathbf{z}(\mathbf{v}) = \mathbf{z}_0 + \mathbf{Z}\mathbf{v} \tag{3}$$

Wenn weiterhin angenommen wird, daß sich π durch

$$\pi = \frac{1}{2}\,\mathbf{v}^T \mathbf{K}\,\mathbf{v} - \mathbf{v}^T\,\mathbf{f} \tag{4}$$

ausdrücken läßt, ergibt sich für χ:

$$\chi = \frac{1}{2}\,\mathbf{v}^T \mathbf{K}\,\mathbf{v} - \mathbf{v}^T\mathbf{f} + \frac{1}{2}\,\alpha\,(\mathbf{z}_0 + \mathbf{Z}\mathbf{v})^T\,(\mathbf{z}_0 + \mathbf{Z}\mathbf{v}) \tag{5}$$

Die Minimierung von χ bezüglich $\mathbf{v}$ liefert:

$$\frac{\partial\chi}{\partial\mathbf{v}} = (\mathbf{K} + \alpha\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})\,\mathbf{v} - (\mathbf{f} - \alpha\mathbf{Z}^T\mathbf{z}_0) = 0 \tag{6}$$

Das Gleichungssystem mit Berücksichtigung der Zwangsbedingungen lautet dann:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_z)\,\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{f}_z \tag{7}$$

$$\mathbf{K}_z = \alpha\,\mathbf{Z}^T\mathbf{Z} \tag{8}$$

$$\mathbf{f}_z = \alpha\,\mathbf{Z}^T\mathbf{z}_0 \tag{9}$$

Nachfolgend werden praktische Anwendungen dieser Methode diskutiert.

3. Kompatible Koppelung von nicht korrekt verknüpften Elementen

Das Bild 1 zeigt verschiedene Möglichkeiten, Netzverfeinerungen im Bereich einer Lasteinleitungsstelle zu erreichen. Im Bild 1a) zieht sich die Netzverfeinerung über das ganze Gebiet, bei der Variante 1b) werden zusätzlich Dreieckelemente benötigt. Mit der geringsten Zahl von Elementen kommt man bei der Variante 1c) aus. Dieses Netz erfordert entweder spezielle Elemente mit unterschiedlichen Knotenanordnungen auf den Seiten (vgl. dazu z. B. [5], [8], [9]), oder es werden die Standardrechteckelemente beibehalten und Zwangsbedingungen formuliert, die die Kompatibilität zwischen den Elementen gewährleisten. Die Einarbeitung der Zwangsbedingungen in die Systemsteifigkeitsbeziehung erfolgt am einfachsten mittels der Penalty-Funktion-Methode. An dem im Bild 1c) benutzten Rechteckelement wird die Ableitung der entsprechenden Zwangsbedingungsmatrix $\mathbf{K}_z$ nachfolgend demonstriert.

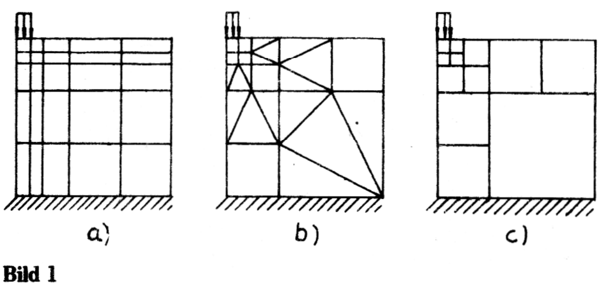


Bild 1
Verschiedene Varianten von Netzverfeinerungen für ein ebenes Gebiet
a) Rechteckelemente
b) Rechteck- und Dreieckelemente
c) Rechteckelemente mit Zwangsbedingungen

Isoparametrisches Viereckelement mit 4 Knoten

Wir betrachten dazu die in Bild 2 skizzierte Koppelung von drei Rechteckelementen. Im ungekoppelten Fall tritt bei einer Belastung ein Klaffen zwischen den Elementen am Knoten 5 auf. Durch eine entsprechende Zwangsbedingung wird erreicht, daß der Knoten 5 auf der Seitenkante $\overline{46}$ des Elementes 3 bleibt. Zur Ableitung der Koppelbedingung wird das in Bild 3 dargestellte Rechteckelement betrachtet. Die Verschiebung des zusätzlichen Knotens 2 ergibt sich aus dem Verschiebungsansatz (Ansatzfunktionen G_L siehe [10] Seite 58)

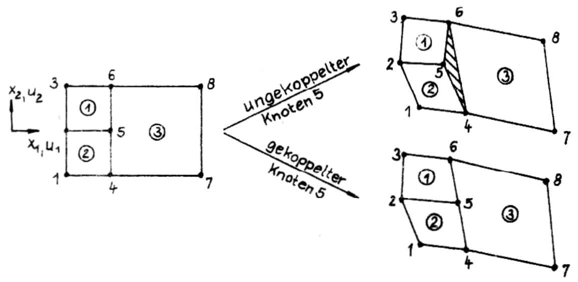
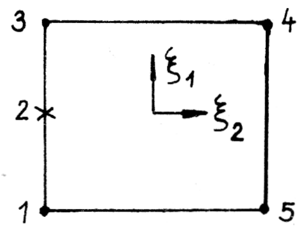


Bild 2
Koppelung nicht korrekt verknüpfter Elemente



$$\xi_{12} = 0 \qquad \xi_{22} = -1$$

Bild 3
Viereckelement mit 4 Knoten

$$u_{i2} = u_i(\xi_{12}, \xi_{22}) = \sum_{L=1,3}^{5} G_L(\xi_{12}, \xi_{22})\, u_{iL} \qquad i = 1,2$$

$$u_{i2} = 0{,}5\, u_{i1} + 0{,}5\, u_{i3}$$

Damit lautet die Zwangsbedingung

$$\mathbf{z} = [0{,}5 \;\; -1 \;\; 0{,}5] \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ u_{i3} \end{bmatrix} = 0 \tag{10}$$

und die Matrix $\mathbf{K}_z$ ergibt sich entsprechend Gleichung (8)

$$K_z = \alpha \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ & 4 & -2 \\ \text{symm.} & & 1 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

Die Matrix erzwingt die zwischen den Verschiebungen u_{i1}, u_{i2} und u_{i3} $(i = 1,2)$ bestehende Zwangsbedingung. Wenn für das in Bild 2 angegebene Netz angenommen wird, daß alle u_2-Verschiebungen Null sind und $u_{11} = u_{12} = u_{13} = 0$, $u_{17} = u_{18} = 10$ gilt, ergibt sich nach direkter Einarbeitung dieser Randbedingungen folgende Systemsteifigkeitsbeziehung:

$$\begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 \\ & 8 & -1 \\ \text{symm.} & & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{14} \\ u_{15} \\ u_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Die Zwangsbedingung zwischen den Knoten 4, 5 und 6 wird mit der Penalty-Funktion-Methode berücksichtigt; das modifizierte Gleichungssystem lautet dann:

$$\begin{bmatrix} 8+\alpha & -1-2\alpha & -1+\alpha \\ & 8+4\alpha & -1-2\alpha \\ \text{symm.} & & 8+\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{14} \\ u_{15} \\ u_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Als Lösungen für verschiedene Werte von α erhält man:

	exakt	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 10$	$\alpha = 100$	$\alpha = 1\,000$	$\alpha = 10\,000$
u_{14}	3,333~	4,444~	4,0	3,47826	3,34926	3,335	3,3335
u_{15}	3,333~	1,111~	2,0	3,04348	3,30148	3,330	3,3330
u_{16}	3,333~	4,444~	4,0	3,47826	3,34926	3,335	3,3335

Deutlich ist zu erkennen, daß mit größer werdendem α die Zwangsbedingung besser erfüllt wird. Entsprechend lassen sich Zwangsbedingungsmatrizen für beliebige andere finite Elemente ableiten.

Isoparametrisches Viereckelement mit 8 Knoten

Wenn die in Bild 4 zusätzlich eingetragenen Punkte 2 und 4 auf der durch die Knoten 1, 3 und 5 verlaufenden Elementkante liegen sollen (quadratischer Verschiebungsverlauf längs der Seite), gelten folgende Zwangsbedingungen (Ansatzfunktionen G_L vgl. [10], Seite 58)

$$u_2 = u(\xi_{12}, \xi_{22}) = \sum_{L=1,3,5}^{10} G_L(\xi_{12}, \xi_{22})\, u_L$$

$$u_2 = \frac{3}{8} u_1 + \frac{6}{8} u_3 - \frac{1}{8} u_5$$

$$u_4 = u(\xi_{14}, \xi_{24}) = \sum_{L=1,3,5}^{10} G_L(\xi_{14}, \xi_{24})\, u_L$$

$$u_4 = -\frac{1}{8} u_1 + \frac{6}{8} u_3 + \frac{3}{8} u_5$$

Die Matrix Z lautet dann:

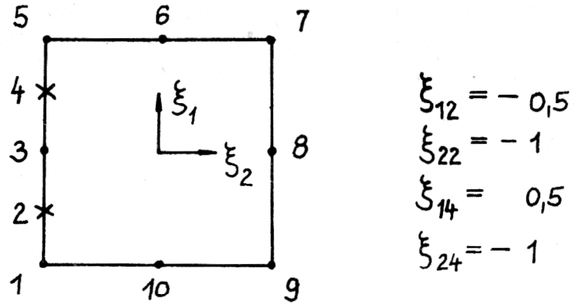


Bild 4
Viereckelement mit 8 Knoten

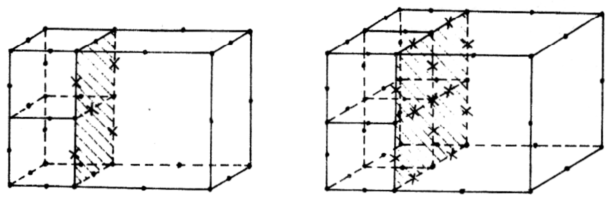


Bild 5
Koppelvarianten für das Hexaederelement HK 60
• Knotenpunkte
x Knotenpunkte mit Zwangsbedingungen

$$Zv = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 6 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 6 & -8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = 0 \qquad (12)$$

Damit erhält man für die Zwangsbedingungsmatrix (für eine Verschiebungsrichtung):

$$K_z = \alpha \begin{bmatrix} 10 & -24 & 12 & 8 & -6 \\ & 64 & -48 & 0 & 8 \\ & & 72 & -48 & 12 \\ & & & 64 & -24 \\ \text{symm.} & & & & 10 \end{bmatrix} \qquad (13)$$

Isoparametrisches Hexaederelement mit 20 Knoten (HK 60)

Für das Element HK 60 wurden die Zwangsbedingungsmatrizen für die in Bild 5 skizzierten Koppelfälle abgeleitet und die Elementkoppelung in das Programmsystem COSAR/E80 eingearbeitet. Als zusätzliche Eingabedaten müssen die Knotennummern der auf der Kontaktfläche liegenden Knoten bereitgestellt werden. Die Funktionsfähigkeit der Elementkoppelung wurde an einer Reihe von Beispielen getestet. Da die Elemente in der Lage sind, quadratische Verschiebungsverteilungen exakt zu erfassen, ergeben sich in diesen Fällen auch bei den in Bild 5 skizzierten Koppelfällen exakte Lösungen, wenn die Penalty-Zahl ausreichend groß gewählt wird.

Es hat sich gezeigt, daß ein praktisch sinnvoller Wert für die Penalty-Zahl $\alpha = \max k_{ii} \cdot 10^4$ ist. Im Programmsystem COSAR E80 wird standardmäßig mit $\alpha = 10^{10}$ gearbeitet. Anhand der Erfüllung der Zwangsbedingungen kann überprüft werden, ob die Penalty-Zahl hinreichend groß gewählt wurde. Ausführliche Fehlerbetrachtungen und Empfehlungen für die Wahl der Penalty-Zahl finden sich in [6].

Als ein extremes Beispiel für die Anwendung der Elementkoppelung mit HK 60-Elementen wurde das Boussinesq-Problem mit verschieden feinen Vernetzungen gelöst (vgl. Bild 6). Aus Symmetriegründen braucht nur ein Viertel des Halbraumes betrachtet zu werden; an den

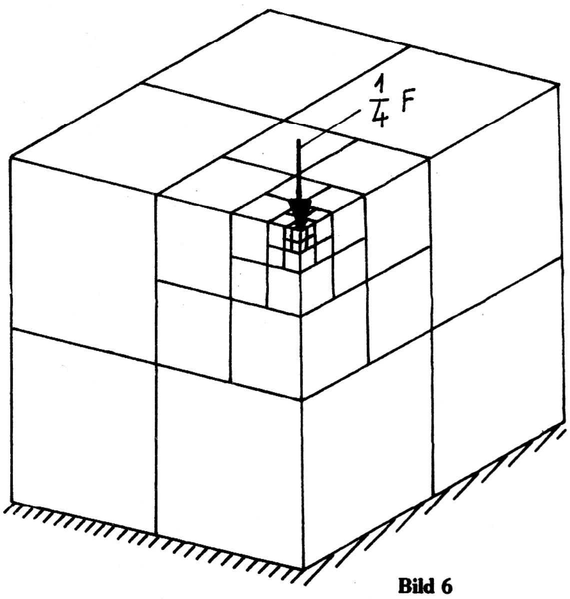


Bild 6
Boussinesq-Problem

äußeren Rändern werden die Verschiebungen der exakten Lösung vorgeschrieben. Die Testrechnungen haben ergeben, daß in der unmittelbaren Umgebung der Lasteinleitung, in der ein starker Spannungsgradient (Singularität unter der Kraft) vorhanden ist, infolge der Zwangsbedingungen ein großer Spannungssprung zwischen den gekoppelten Elementen auftritt. In diesem Bereich, der mit den herkömmlichen Verschiebungselementen ohnehin nicht genau erfaßt werden kann, ergibt die Zwangskoppelung, die wie eine zusätzliche Versteifung wirkt, eine weitere Verfälschung der Ergebnisse. In den nachfolgenden Koppelebenen ist dieser Effekt jedoch nicht mehr vorhanden und die Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung mit den exakten Lösungen. Es sollte daher vermieden werden, die Netzverfeinerungen mittels der angegebenen Zwangskoppelung unmittelbar im Bereich extremer Spannungsgradienten vorzunehmen.

4. Weitere Zwangsbedingungen

Mittels der Penalty-Funktion-Methode lassen sich eine Vielzahl weiterer praktisch wichtiger Zwangsbedingungen auf programmtechnisch einfach zu realisierende Weise erfassen. Die Berücksichtigung von verhinderten bzw. vorgeschriebenen Knotenverschiebungen durch Setzen einer großen Zahl auf das entsprechende Hauptdiagonalelement der Steifigkeitsmatrix wird in den meisten FEM-Programmen dem zeitaufwendigen Zeilen- und Spaltenstreichen vorgezogen und ist nichts anderes als eine Anwendung der Penalty-Funktion-Methode.

Vorgeschriebene Verschiebung

Am Knoten L sei eine Verschiebung der Größe Δu_L vorgeschrieben. Die Zwangsbedingung lautet

$$z = -\Delta u_L + [1]\, u_L = 0 \tag{14}$$

Damit ergibt sich

$$K_z = \alpha\, [1]\, u_L \tag{15}$$

$$f_z = -\alpha \cdot \Delta u_L \tag{16}$$

Wenn die vorgeschriebene Verschiebung eine beliebige Richtung im Raum hat, die durch die drei Richtungskosinus $c_i = \cos\alpha_i$ $(i = 1, 2, 3)$ festgelegt wird (α_i-Winkel zwischen der Koordinatenachse x_i und der Richtung der vorgeschriebenen Verschiebung), gilt:

$$z = -\Delta u_L + [c_1\ c_2\ c_3] \begin{bmatrix} u_{1L} \\ u_{2L} \\ u_{3L} \end{bmatrix} = 0 \tag{17}$$

Dann erhält man für K_z und f_z entsprechend der Gleichungen (8) und (9):

$$K_z = \alpha \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ & c_2^2 & c_2 c_3 \\ \text{symm.} & & c_3^2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$f_z = -\alpha \cdot \Delta u_L \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Vorgeschriebene Verschiebungsrichtung

Soll ein Knoten L gezwungen werden, sich längs einer vorgeschriebenen Richtung (festgelegt durch die Richtungskosinus c_1, c_2, c_3) zu bewegen, gelten folgende Zwangsbedingungen:

$$z = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} & -\frac{1}{c_2} & 0 \\ \frac{1}{c_1} & 0 & -\frac{1}{c_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1L} \\ u_{2L} \\ u_{3L} \end{bmatrix} = 0 \tag{20}$$

Damit ergibt sich für die Zwangsbedingungsmatrix:

$$K_z = \alpha \begin{bmatrix} \frac{2}{c_1^2} & -\frac{1}{c_1 c_2} & -\frac{1}{c_1 c_3} \\ & \frac{1}{c_2^2} & 0 \\ \text{symm.} & & \frac{1}{c_3^2} \end{bmatrix} \tag{21}$$

Sektorsymmetrie

Bei sektorsymmetrischen Bauteilen gelten für Knoten auf dem Sektorrand mit gleichem Radius die Zwangsbedingungen (vgl. Bild 7)

$$u_{1A} = \bar{u}_{1B} = u_{1B} \cos\alpha - u_{2B} \sin\alpha$$

$$u_{2A} = \bar{u}_{2B} = u_{1B} \sin\alpha + u_{2B} \cos\alpha$$

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 1 & -\sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1A} \\ u_{2A} \\ u_{1B} \\ u_{2B} \end{bmatrix} = 0 \qquad (22)$$

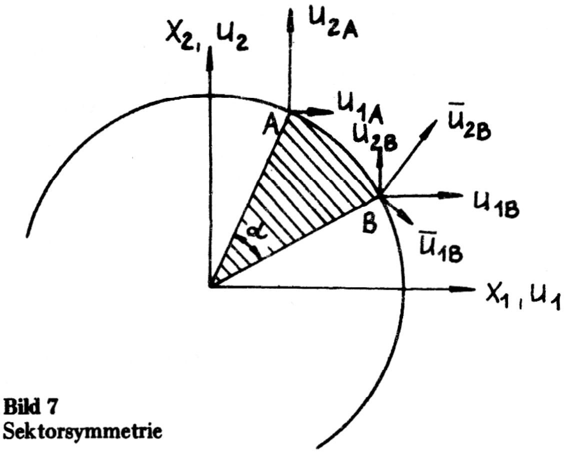


Bild 7
Sektorsymmetrie

Damit erhält man für die Zwangsbedingungsmatrix:

$$K_z = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos\alpha & \sin\alpha \\ & 1 & -\sin\alpha & -\cos\alpha \\ & & 1 & 0 \\ \text{symm.} & & & 1 \end{bmatrix} \qquad (23)$$

Starre Koppelung zweier Knoten

Für jede Verschiebungskomponente der beiden Knoten A und B gilt:

$$u_{iB} = u_{iA} + \Delta u_i \qquad i = 1, 2, 3$$

wobei Δu_i ein vorgeschriebenes Übermaß ist (z. B. bei Schrumpfverbindungen und anderen Kontaktproblemen)

$$z = \Delta u_i + [1 \; -1] \begin{bmatrix} u_{iA} \\ u_{iB} \end{bmatrix} = 0 \qquad (24)$$

Es ergibt sich dann für K_z und f_z:

$$K_z = \alpha \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (25)$$

$$f_z = \alpha \Delta u_i \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} . \qquad (26)$$

5. Koppelung verschiedener Elementtypen

Das im Abschnitt 3 beschriebene Vorgehen zur kompatiblen Verknüpfung nicht korrekt angeschlossener Elemente kann auch für die Koppelung unterschiedlicher Elementtypen eingesetzt werden. Ein wichtiger Anwendungsfall ist die Versteifung dreidimensionaler Strukturen durch stabförmige Elemente (z. B. Bewehrungsstäbe im Beton). Für den im Bild 8 dargestellten Fall, bei dem ein Versteifungsstab durch ein isoparametrisches 20-Knoten-Hexaederelement verläuft, gilt als Zwangsbedingung für einen Knoten A des Stabelementes

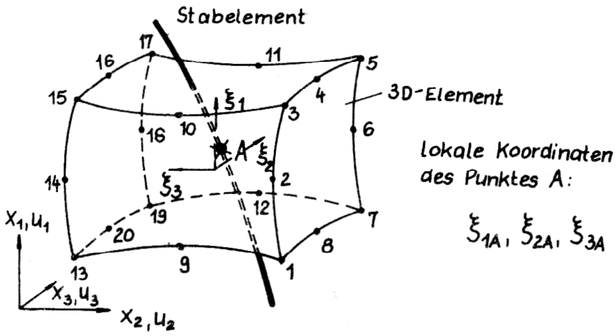


Bild 8
Stabförmige Versteifung in einem HK60-Element

$$u_{iA} = \sum_{L=1}^{20} G_L^A u_{iL} \; ; \quad G_L^A = G_L (\xi_{1A}, \xi_{2A}, \xi_{3A})$$

Die Zwangsbedingung lautet somit

$$z = [I_3 G_1^A, I_3 G_2^A, \ldots, I_3 G_{20}^A, -I_3] \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ \vdots \\ u_{120} \\ u_{220} \\ u_{320} \\ u_{1A} \\ u_{2A} \\ u_{3A} \end{bmatrix} . \qquad (27)$$

I_3 ist eine 3 x 3 Einheitsmatrix.

Die Zwangsbedingungsmatrix hat dann folgende Form:

$$K_z = \alpha \begin{bmatrix} I_3 G_1^A G_1^A & I_3 G_1^A G_2^A & \ldots & I_3 G_1^A G_{20}^A & -I_3 G_1^A \\ & I_3 G_2^A G_2^A & \ldots & I_3 G_2^A G_{20}^A & -I_3 G_2^A \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & I_3 G_{20}^A G_{20}^A & -I_3 G_{20}^A \\ \text{symm.} & & & & I_3 \end{bmatrix}$$

(28)

Damit können die Knoten der Stabelemente mit den dreidimensionalen Elementen verknüpft werden.
Um die Zwangsbedingungsmatrizen berechnen zu können, werden die lokalen Koordinaten ξ_{iA} benötigt. Falls diese nicht sofort angegeben werden können, müssen sie mit Hilfe der globalen kartesischen Koordinaten der Knotenpunkte x_{iL} berechnet werden. Das erfordert jedoch die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\underline{f}(\underline{\xi}) = \begin{bmatrix} f_1(\xi_{1A}, \xi_{2A}, \xi_{3A}) \\ f_2(\xi_{1A}, \xi_{2A}, \xi_{3A}) \\ f_3(\xi_{1A}, \xi_{2A}, \xi_{3A}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1A} - \Sigma G_L^A x_{1L} \\ x_{2A} - \Sigma G_L^A x_{2L} \\ x_{3A} - \Sigma G_L^A x_{3L} \end{bmatrix} = 0 \tag{29}$$

unter der Bedingung $\xi_{iA} \in [-1, 1]$.

Wenn man als Anfangsnäherung Koordinaten $\underline{\xi}_A$ wählt, gilt zunächst $\underline{f}(\underline{\xi}_A) \neq 0$. Die exakte Lösung sei $\underline{\xi}_A + \Delta\underline{\xi}_A$; entwickelt man die Funktion $\underline{f}(\underline{\xi}_A + \Delta\underline{\xi}_A)$ in eine Taylor-Reihe und bricht nach der ersten Ableitung ab, erhält man

$$J(\underline{\xi}_A)\,\Delta\underline{\xi}_A = -\underline{f}(\underline{\xi}_A) \tag{30}$$

mit der 3 x 3 Jacobischen Matrix $J_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial \xi_j}$, $i,j = 1,2,3$.

Setzt man $\Delta\underline{\xi}_A = \underline{\xi}_{A+1} - \underline{\xi}_A$, ergibt sich folgende Iterationsvorschrift zur Ermittlung der lokalen Koordinaten:

$$J(\underline{\xi}_A)\,\underline{\xi}_{A+1} = J(\underline{\xi}_A)\,\underline{\xi}_A - \underline{f}(\underline{\xi}_A) \tag{31}$$

Diese unter dem Namen Newton-Raphson bekannte Iteration wird bei Erreichen einer ausreichenden Genauigkeit abgebrochen; in [7] wird $|\Delta\underline{\xi}| \leqslant 0{,}001$ empfohlen.
Mit Hilfe der Penalty-Funktion-Methode ist eine einfache Möglichkeit vorhanden, dreidimensionale Verschiebungselemente z. B. mit Balken-, Platten- und Schalenelementen zu verküpfen. Allerdings kann wegen der Verschiedenartigkeit der Ansatzfunktionen keine Kompatibilität längs der Elementränder erreicht werden. Es bleibt abzuwarten, ob diese Strategie zu praktisch brauchbaren Ergebnissen führt; eigene Erfahrungen liegen dazu noch nicht vor.
Für die Koppelung des Biegewinkels bei einem Plattenelement mit den Verschiebungen eines einfachen 3D Elementes (siehe Bild 9) kann z. B. folgende einfache Zwangsbedingung formuliert werden:

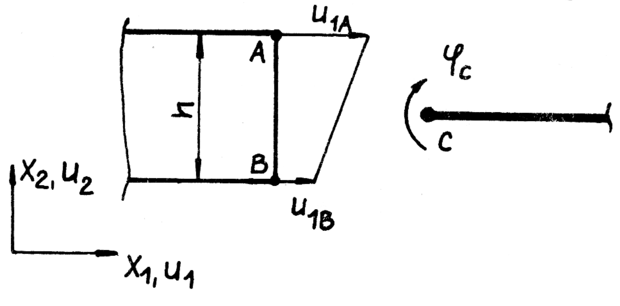


Bild 9
Verknüpfung eines Plattenelementes mit einem 3D-Element

$$\varphi_c = \frac{u_{1A} - u_{1B}}{h}$$

$$z = [1 - 1 - h] \begin{bmatrix} u_{1A} \\ u_{1B} \\ \varphi_c \end{bmatrix} \tag{32}$$

Die Zwangsbedingungsmatrix lautet dann:

$$K_z = \alpha \begin{bmatrix} 1 & -1 & -h \\ & 1 & h \\ \text{symm.} & & h^2 \end{bmatrix} \tag{33}$$

Entsprechend ist die Verküpfung anderer Freiheitsgrade möglich.

6. Zusammenfassung

Mit der Penalty-Funktion-Methode lassen sich viele bei der Anwendung der FEM auftretende Zwangsbedingungen näherungsweise erfüllen. Die Vorteile dieser Methode bestehen darin, daß keine zusätzlichen Unbekannten in die Rechnung eingeführt werden müssen, die Implementierung in vorhandene FEM-Programme unproblematisch ist und die Rechenzeit nahezu unverändert bleibt. So konnten mit geringem Programmieraufwand an dafür vorgesehenen Schnittstellen des Prozessors BOUCO verschiedene Möglichkeiten der Elementkoppelung bei nicht korrekt verknüpften 3D-Elementen in das Programmsystem COSAR aufgenommen und erfolgreich bei Netzverfeinerungen getestet werden. Der Aufbau der Zwangsbedingungsmatrizen für ganz allgemeine Koppelfälle läßt sich programmintern automatisieren, so daß damit eine Möglichkeit gegeben ist, nicht paßfähige Substrukturen zu verknüpfen.

Die Penalty-Funktion-Methode eignet sich weiter zur Realisierung von verschiedenen Randbedingungen, Kontaktproblemen und zur Verknüpfung unterschiedlicher Elementtypen (z. B. 3D-Verschiebungselemente mit Stab-, Balken-, Platten- und Schalenelementen). Zu diesen Elementverknüpfungen liegen noch keine praktischen Erfahrungen vor, so daß zur Zeit keine Aussagen zur Genauigkeit und damit zur Anwendbarkeit dieser Koppelstrategie gemacht werden können. Die Penalty-Funktion-Methode dürfte jedoch eine Alternative zur Entwicklung spezieller Übergangselemente sein, insbesondere, wenn es um Aussagen zum Gesamtverhalten einer komplexen Struktur geht; die Übergangsbereiche erfordern in jedem Fall eine spezielle Analyse.

LITERATUR

[1] Dankert, J., Gabbert, U.: Universelles Finite-Elemente-Programmsystem COSAR. Maschinenbautechnik 28 (1979), Heft 8, 352 – 358.

[2] Baumgarten, H., Berger, H., Gabbert, U., Grochla, J., Horeschi, H., Limpert, H.: Das Finite-Elemente-Programmsystem COSAR/E80 zur elastostatischen Berechnung dreidimensionaler Bauteile. Berichte der Tagung Festkörpermechanik Band A. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1981.

[3] Nutzerhandbuch COSAR/E80; Entwicklerhandbuch COSAR. TH Magdeburg, Sektion Maschinenbau, WB Festkörpermechanik 1980.

[4] Campbell, J.S.: A penalty function approach to the minimization of quadratic functionals in finite element analysis. In: „Finite Element Method in Engineering". Proc. of the Uni. of New South Wales 1974.

[5] Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method. Mc Graw Hill Book Company, London 1977.

[6] Felippa, C.A.: Error analysis of penalty function techniques for constrained definition in linear algebraic systems. Int. J. for Num. Meth. in Eng. Vol. 11, 709 – 728 (1977).

[7] Dallmann, W.; Hartl, H., Pittr, J.: Kompatible Verbindung von nicht korrekt angeschlossenen finiten Elementen.
4. Seminar Finite-Elemente-Methode und Variationsmethoden, Plzen 1981, Bd. 1, 57 – 59.

[8] Cavendish, J.C., Gordon, W.J., Hall, C.H.: Substructured macro elements based on locally blended interpolation. Int. J. for Num. Meth. Eng., Vol. 11, 1405 – 1421 (1977).

[9] Gupta, A.K.: A finite element for transition from a fine to a coarse grid. Int. J. for Num. Meth. in Eng. Vol. 12, 35 – 45 (1978).

[10] Autorenkollektiv: Die Methode der finiten Elemente in der Festkörpermechanik. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1982.

Anschrift des Verfassers:
Dr.-Ing. Ulrich Gabbert
Technische Hochschule Otto von Guericke
Sektion Maschinenbau
3010 Magdeburg
Bierutplatz 5