TECHNISCHE MECHANIK 4 (1983) Heft 2
Manuskripteingang: 22. 7. 1982

Schwingungen und Stabilität einiger mechanischer Systeme mit einer Totzeit im Steuersystem

Sergej Komarow

1. Einleitung

In den letzten Jahren findet die automatische Regelung bei Antrieben eine große Anwendung, z. B. bei Kränen, Industrierobotern oder vielen anderen Systemen und Maschinen. Einfach gesagt, ein Regelsystem reguliert die Bewegung eines mechanischen Systems, z. B. bekommt ein Steuersystem ein Signal von dem Geschwindigkeitsmeßgeber und steuert die Energiezufuhr in das Antriebssystem. Für den elektrischen Antrieb kann das System den Strom oder die Spannung regulieren, für den hydraulischen Antrieb- den Druck oder Flüssigkeitsverbrauch usw.

Man hat gemerkt, daß jedes Steuersystem eine bestimmte Verspätung der Steuergröße aufweist. Diese Verspätung bedeutet das Folgende: das Steuersystem reagiert auf eine Signaländerung nicht sofort, sondern nach einer gewissen Zeit, die Totzeit genannt wird. In dem hydraulischen Antrieb wird die Totzeit durch die Trägheit der mechanischen Elemente und durch die begrenzte Geschwindigkeit der Druckausbreitung in der Flüssigkeit bedingt.

Wenn eine Totzeit viel kleiner als die Periodendauer der Eigenschwingungen ist, kann man sie außer Betracht lassen. Hier wird die Aufgabe formuliert, den Einfluß der Totzeit des Steuersystems auf die Schwingungen und die Stabilität des einfachen mechanischen Antriebssystems durch eine analytische Lösung zu bestimmen.

2. Betrachten wir den einfachsten Fall – ein mechanisches Antriebssystem mit zwei Freiheitsgraden (Bild 1)

Dabei bedeuten

$I_1 I_2$ – reduzierte Massenträgheitsmomente;

c – Drehfederkonstante;

M_a – Drehmoment des Antriebsmotors;

M_c – Moment äußerer Kräfte;

φ_1, φ_2 – Winkelkoordinaten;

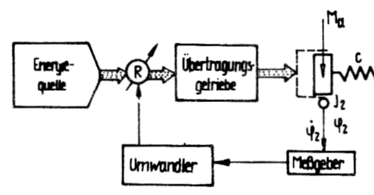


Bild 1:
Berechnungsmodell des geregelten Antriebssystems

Falls die Drehzahl-Drehmomentenkennlinie des Antriebsmotors linear ist, dann kann man die folgenden Differentialgleichungen für die Bewegung des Systems zusammensetzen:

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 + c(\varphi_1 - \varphi_2) = -M_c$$

$$I_2 \ddot{\varphi}_2 + c(\varphi_2 - \varphi_1) = M_0 \left[1 - \frac{1}{\omega_{max}} \dot{\varphi}_2 (t-\tau)\right] = M_a \quad (1)$$

ω_{max} ist die größte Winkelgeschwindigkeit, die das Steuersystem regulieren kann. Wenn die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_2$ des Antriebs gleich Null ist, dann ist das Antriebsmoment M_a am größten und gleich M_0.

τ ist die Totzeit oder die Verspätung. Wenn τ gleich Null ist, bekommt man die bekannte Lösung (z. B. [1]).

$\dot{\varphi}(t-\tau)$ ist die sogenannte Funktion des nacheilenden Arguments, und man nennt diese Gleichung eine Differentialgleichung mit nacheilendem Argument.

Die Lösung wird für die einfachsten Anfangsbedingungen und Anfangsfunktionen gesucht. Sie haben keinen Einfluß auf die Stabilität und die Schwingungsfrequenzen.

$$\varphi_1(0) = \frac{Mc}{c}; \; \dot{\varphi}(0) = 0; \; \varphi_2(t) = 0; \; \dot{\varphi}_2(t) = 0;$$
$$t \in (-\tau, 0)$$

Es gibt einige Wege, wie man die Gleichungen (1) lösen kann ([2], [3]). Wenden wir die Laplace-Transformation an, so ergibt sich für die Laplace-Transformierte des Antriebsmoments

$$\widetilde{M}_1(p) = \frac{(M_0 - M_c)\, c}{I_2 \left[p(p^2 + K_1^2) + \frac{Me^{-p\tau}}{I_2\, \omega_{max}} (p^2 + K_2^2)\right]} + \frac{M_c}{p} . \quad (2)$$

wobei $M_1 = c(\varphi_1 - \varphi_2)$ die dynamische Belastung in der Antriebswelle ist,

p – komplexe Veränderliche;

$K_1^2 = \dfrac{c(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}$ – Eigenkreisfrequenz des Zweimassensystems;

$K_2^2 = \dfrac{c}{I_1}$ – Eigenkreisfrequenz des Systems, falls der Antrieb gebremst wird;

Zur Abkürzung wird eingeführt:

$$Q(p) = p(p^2 + K_1^2) + \frac{M_0 e^{-p\tau}}{I_2 \omega_{max}} (p^2 + K_2^2) \qquad (3)$$

Um die Zeitfunktion $M_1(t)$ zu finden, wenden wir die Laplace-Rücktransformationen an:

$$M_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \widetilde{M}_1(p)\, e^{pt}\, dp \qquad (4)$$

Um das Integral (4) zu berechnen, muß man die Pole der Funktion $\widetilde{M}_1(p)$ wissen. Die Pole dieser Funktion sind Wurzeln des Quasipolynoms $Q(p)$ (3).

Das Quasipolynom hat eine unzählbare Menge von Wurzeln. Es wird angenommen, daß alle Wurzeln des Quasipolynoms die Bedingung $\operatorname{Re} p \leqslant \sigma_0$ erfüllen [3], [4]. Dann kann das Integral (4) mit Hilfe der Theorie der komplexen Veränderlichen berechnet werden:

$$M_1(t) = \sum_j \operatorname{Res}\left[\frac{(M_0 - M_c)\, c}{I_2\, Q(p)}\, e^{pt}; p_j\right] + M_c \qquad (5)$$

wobei p_j eine Wurzel des Quasipolynoms ist. Hat das Quasipolynom keine Doppelwurzeln, gibt es nur einfache Pole der Funktion. Nach einigen Manipulationen kann man schreiben:

$$M_1(t) = \frac{(M_0 - M_c)\, c}{I_2} \sum_{p_j} P(p_j)\, e^{p_j t} + M_c\,,$$

wobei (6)

$$P(p_j) = \frac{p_j^2 + K_2^2}{(p_j^2 + K_1^2)(p_j^2 + K_2^2)(p_j \tau + 1) + 2 p_j^2 (K_2^2 - K_1^2)}$$

Der interessanteste Fall ist, wenn alle Wurzeln konjugierte komplexe sind: $p_{2j} = r_j \pm s_j i$

Dann sieht die Lösung (6) so aus:

$$M(t) = \frac{2(M_0 - M_c)\, c}{I_2} \sum_{p_{2j}} [\operatorname{Re} P(p_j) \cos s_j t - \operatorname{Im} P(p_j) \sin s_j t]\, e^{p_j t} + M_c \qquad (7)$$

Das ist eine unendliche Reihe von gedämpften harmonischen Schwingungen. Wird die Totzeit τ verändert, dann entstehen verschiedene Wurzeln des Quasipolynoms, bzw. verschiedene Schwingungsformen. Es ist sehr schwer, per Hand die Wurzeln des Quasipolynoms zu berechnen. Zuerst kann man sogenannte asymptotische Wurzeln [3] finden, und dann mit Hilfe eines Iterationsprozesses die Wurzeln berechnen.

Numerische Lösungen mit Hilfe von EDV lassen sich verhältnismäßig leicht gewinnen.

Das Bild 2. zeigt einige Schwingungsvorgänge in dem System für verschiedene Werte der Totzeit τ.

Es ist möglich, daß die Amplitude der Schwingungen für einen bestimmten Wert von τ wächst, und das System sich in ein instabiles System verwandelt. In diesem Fall genügt es, daß der Realteil einer einzigen Wurzel größer als Null ist. Die Reihe (7) konvergiert sehr schnell, und

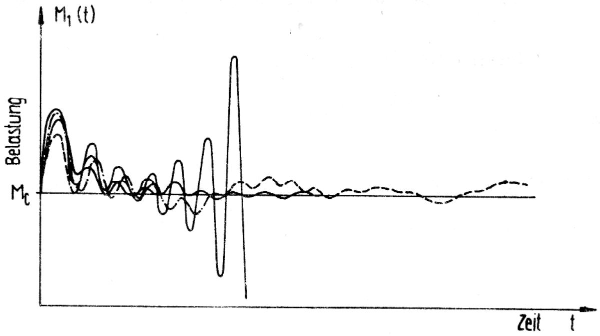


Bild 2:
Schwingungsprozeß bei unterschiedlichen Totzeiten

es genügt, nur 3 bis 4 Glieder zu berechnen, um die Kurve des Belastungsablaufs zu ziehen. Trotzdem gibt es die Möglichkeit, daß das 6., 7. oder höhere Wurzelpaar einen positiven Realteil hat. Deshalb muß man mindestens zehn Wurzelpaare ermitteln.

Für die Stabilitätsuntersuchung des Systems wird das analytische Pontrjagin-Kriterium angewendet. Das Kriterium erlaubt, die Stabilität ohne Kenntnis der Wurzeln zu bestimmen [5]. Dafür multiplizieren wir das Quasipolynom mit e^{pt} und erhalten:

$$p^3 e^{p\tau} + \gamma p^2 + p K_1^2 e^{p\tau} + \gamma K_2^2 = 0\,, \qquad (8)$$

wobei

$$\gamma = \frac{M_0}{I_2\, \omega_{max}}\,.$$

Nach Pontrjagin (1. Theorem) lautet die notwendige Bedingung der Stabilität, daß ein Quasipolynom nur ein einziges Glied einer höchsten Potenz haben soll. Die Bedingung ist erfüllt.

Nach dem 2. Theorem befinden sich alle Wurzeln des Quasipolynoms (8) links von der Imaginärachse, falls:

$$R(\omega) \cdot \frac{ds(\omega)}{d\omega} > 0, \qquad (9)$$

wobei $R(\omega)$ und $S(\omega)$ Real- und Imaginärteil des Quasipolynoms für einen reinen imaginären Wert sind.

$p = i\omega$:

$$R(\omega) = \omega(\omega^2 - K_1^2) \sin \omega\tau + \gamma(K_2^2 - \omega^2)$$

$$S(\omega) = \omega(K_1^2 - \omega^2) \cos \omega\tau\,.$$

Dabei sollen alle Wurzeln der Gleichung $S(\omega) = 0$ die reellen Wurzeln sein und die Beziehung (9) erfüllen. Die Wurzeln sind folgende:

$$\omega_1 = 0$$

$$\omega_{2,3} = \pm K_1$$

$$\omega_{m+3} = \frac{\pi}{\tau}(m + 0{,}5)\,, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Die Bedingung (9) für $\omega_1 = 0$ lautet $\gamma K_1^2 K_2^2 > 0$ und ist immer erfüllt. Für $\omega_{2,3}$ gilt:

$$2\gamma K_1^2 (K_1^2 - K_2^2) \cos K_1 \tau > 0 \qquad (10)$$

Weil $K_1^2 > K_2^2$ ist, bekommt man aus (10) die erste Bedingung der Stabilität: $\pi(2n - 0,5) < K_1 \tau < \pi(2n + 0,5)$ (11)

Für die anderen Wurzeln erhält man:

$$[\omega_m \sin\omega_m \tau(\omega_m^2 - K_1^2) - \gamma(\omega^2 - K_2^2)]\,\omega_m \tau \sin\omega_m \tau(\omega_m^2 - K_1^2) > 0$$

Ist m eine gerade Zahl, ist $\sin \omega_m \tau = 1$ und wenn m ungerade ist, gilt $\sin \omega_m \tau = -1$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi}{\tau}(2n+0,5)\,[\pi^2(2n+0,5)^2 - K_1^2\tau^2] - \\
&\quad - \gamma\,[\pi^2(2n+0,5)^2 - K_2^2\tau^2] > 0\,; \\
&\frac{\pi}{\tau}(2n-0,5)\,[\pi^2(2n-0,5)^2 - K_1^2\tau^2] + \\
&\quad + \gamma\,[\pi^2(2n-0,5)^2 - K_2^2\tau^2] < 0\,.
\end{aligned} \qquad (12)$$

Mit den neuen dimensionslosen Kenngrößen

$$\Theta = \frac{K_1\tau}{2\pi} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{\gamma}{K_1} = \frac{M_0}{I_2\,\omega_{max} K_1}$$

lauten die Bedingungen (12):

$$\begin{aligned}
&-8\eta\Theta^3\xi - 4\Theta^2(2n+0,5) - 2\eta\Theta(2n+0,5)^2 + \\
&\quad + (2n+0,5)^3 > 0\,; \\
&8\eta\Theta^3\xi - 4\Theta^2(2n-0,5) + 2\eta\Theta(2n-0,5)^2 + \\
&\quad + (2n-0,5)^3 < 0\,;
\end{aligned} \qquad (13)$$

wobei

$$\xi = \frac{K_2^2}{K_1^2} = \frac{1}{1 + \frac{I_1}{I_2}}\,; \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Gemäß den Bedingungen (13) kann man die Stabilitätskarte des Systems zeichnen.
Das Diagramm ist im Bild 3 zu sehen.

Das System ist stabil innerhalb der gestrichelten Gebiete. Aus dem Diagramm sieht man, daß die Stabilität des Systems von allen Eigenparametern abhängt:

Federkonstante, Trägheitsmomente, Totzeit, Antriebsdrehmoment usw.
Nun wird untersucht, wie das System auf eine harmonische Erregung reagiert. Das Moment der äußeren Kräfte M_c möge sich nach dem Sinusgesetz harmonisch verändern:

$$\begin{aligned}
&I_1\ddot{\varphi}_1 + c(\varphi_1 - \varphi_2) = -M_c \sin\lambda t \\
&I_2\ddot{\varphi}_2 + c(\varphi_2 - \varphi_1) = M_0\,[1 - \frac{1}{\omega_{max}}\,\dot{\varphi}_2(t-\tau)]\,.
\end{aligned} \qquad (14)$$

Die Anfangsbedingungen lauten:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(0) = 0\,; \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0\,; \\
&\varphi_2(t) = 0\,; \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0\,;
\end{aligned} \qquad t \in (-\tau, 0)\,.$$

Die Differentialgleichungen (14) wurden auch mit Hilfe der Laplace-Transformation gelöst:

$$M_1(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{\frac{M_c c}{I_1}\left(p + \frac{Me^{-p\tau}}{I_2\,\omega_{max}}\right) + \frac{Mc}{I_2}(p^2 + \lambda^2)}{(p^2+\lambda^2)\,Q(p)}\, e^{pt}\,dp.$$

Mit der Theorie einer komplexen Veränderlichen ergibt sich:

$$M_1(t) = \frac{2c}{I_1} M_c \left[\sum_{p_{2j}} [\mathrm{Re}\,P_\lambda(p_j)\cos s_j t - \mathrm{Im}\,P_\lambda(p_j)\sin s_j t]\, e^{r_j t} + \frac{[\lambda^2(K_1^2-\lambda^2) + \gamma^2(K_2^2-\lambda^2) - (K_1^2+K_2^2-2\lambda^2)\,\lambda\gamma\sin\lambda\tau]\sin\lambda t + \lambda\gamma(K_2^2-K_1^2)\cos\lambda\tau\cos\lambda t}{\lambda^2(K_1^2-\lambda^2)^2 + \gamma^2(K_2^2-\lambda^2)^2 - 2\lambda\gamma(K_1^2-\lambda^2)(K_2^2-\lambda^2)\sin\lambda\tau}\right] \qquad (15)$$

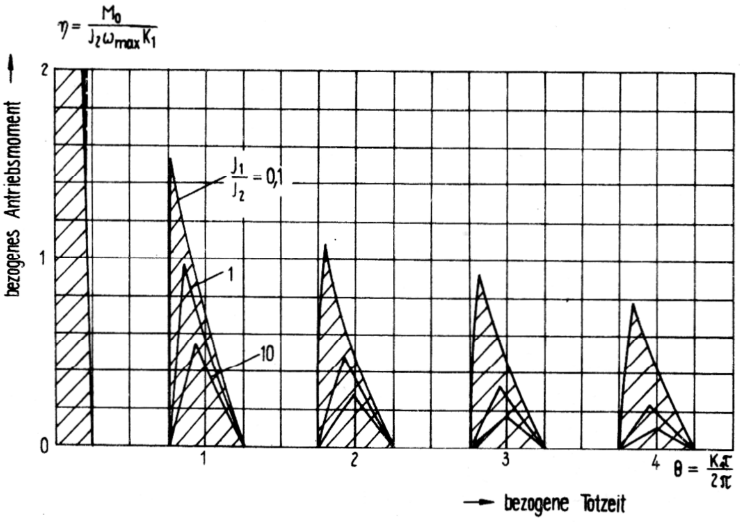


Bild 3:
Stabilitätskarte des Systems

wobei

$$P_\lambda(p_j) = \frac{\dfrac{M_0}{M_c}(p_j^2 + K_2^2) - K_2^2\,\dfrac{\lambda p_j}{p_j^2 + \lambda^2}}{(p_j^2 + K_1^2)(p_j^2 + K_2^2)(1 + p_j\tau) + 2p_j^2(K_2^2 - K_1^2)}$$

und

$p_j = r_j \pm s_i i$ ein konjugiertes komplexes Wurzelpaar des Quasipolynoms (3) ist.

Beziehung (15) ist die allgemeine Lösung der Gleichungen (14). Sie besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil beschreibt die Eigenschwingungen, die uns schon bekannt sind. Der zweite Teil beschreibt die erzwungenen Schwingungen mit der Erregerkreisfrequenz λ. Ist der Nenner gleich Null, ergibt sich die Resonanz. Die Existenzbedingungen einer Resonanz lauten:

$$1.\ \lambda = \frac{\pi}{\tau}(2n + 0{,}5), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$2.\ \lambda^3 - \lambda^2\gamma - K_1^2\lambda + \gamma K_2^2 = 0 \tag{16}$$

Falls λ gleich γ ist, entsteht eine Tilgung, weil eine Amplitude der erzwungenen Schwingungen gleich Null ist. Sind die beiden Bedingungen gleichzeitig erfüllt, dann ist die Amplitude unendlich groß. Das ist die starke Resonanz. Erfüllt λ nur eine Bedingung oder beide Bedingungen ungefähr, dann ergibt sich eine schwache Resonanz. Im Prinzip hat das System eine Menge von schwachen Resonanzen. Je größer γ ist, desto weiter von einer Eigenfrequenz existiert die Resonanz, und dann hängt sie nur von γ und von der Totzeit τ ab.

Bild 4 zeigt einige Resonanzkurven (Vergrößerungsfunktionen), die durch den Plotter des Tischrechners „Hewlett-Packard" gezeichnet wurden.

3. Zusammenfassung

1. Eine Totzeit in einem Steuersystem hat großen Einfluß auf alle dynamischen Eigenschaften des mechanischen Systems.
2. Das System mit Totzeit kann seine Stabilität leicht verlieren. Wenn man einen beliebigen Parameter des Systems verändert, dann kann das System von einem stabilen in einen instabilen übergehen.
3. Eine Resonanz in solchen Systemen ist sowohl von allen mechanischen Parametern (Federkonstante, Trägheitsmomente) als auch von den Steuersystemparametern (Totzeit τ, Geschwindigkeit ω_{max} und Faktor des Antriebsmoments M_0) abhängig, und sie kann weit von der Eigenfrequenz existieren.

LITERATUR

[1] Holzweißig, F., H. Dresig: Lehrbuch der Maschinendynamik. Leipzig: VEB Fachbuchverlag, 1979.

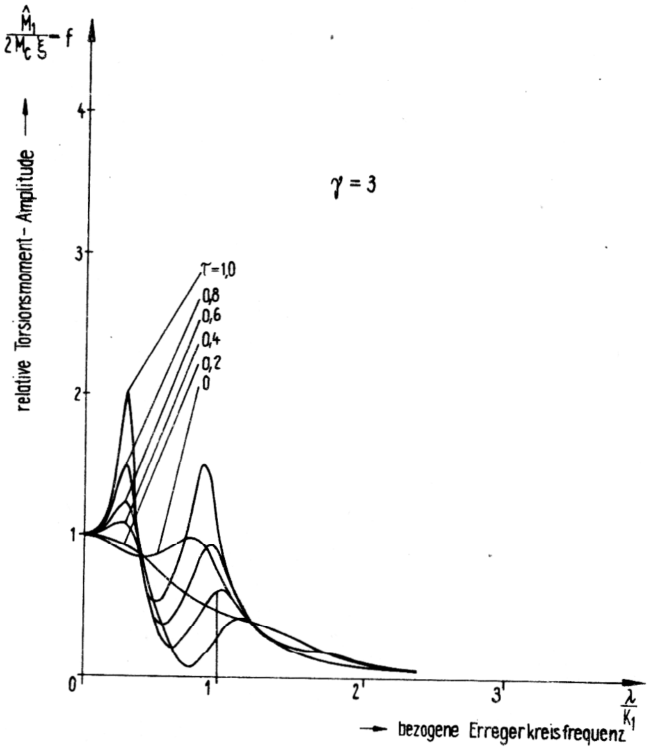
[2] Ditkin, V.A., A.P. Prudnikov: Operazionnoje iscislenije. Moskau: Nauka-Verlag, 1975.

[3] Myskis, A.D.: Lineinye differenzialnye uravnenija s sapasdavajuscim argumentom. Moskau: Nauka-Verlag, 1972.

[4] Elsgolz, L.E.: Vvedenije v teoriju differenzialnych uravnenij s otklonjajuscimsja argumentom. Moskau: Nauka-Verlag, 1971.

[5] Gorecki, M.: Analyza i Synteza system z opozneniem (Übersetzung aus dem poln.) Moskau: Verlag Masinostroenije, 1974.

Anschrift des Verfassers:
Dr.-Ing. S.M. Komarow
Ukrainisches Polygrafisches Institut
„I. Fedorow"
Lehrstuhl Detali masin
290006 Lwow–6
Ul. Podvalnaja 17



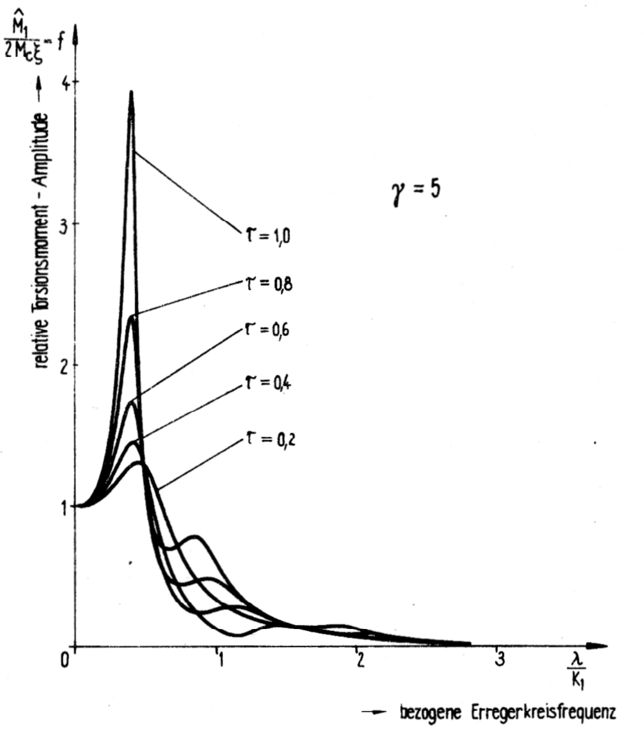


Bild 4:
Resonanzkurven bei speziellen Parameterwerten