

Die Lösung ausgewählter Randwertaufgaben der Kontinuumsmechanik mit einer Finite-Element-Methode auf der Grundlage der Methode der kleinsten Quadrate

István Páczelt, Friques Nándori

1. Einleitung

Die Finite-Element-Methode (FEM) ist eine spezifische Form der direkten Lösungsmethoden der mathematischen Physik. Die Feldgrößen werden auf der Grundlage lokaler Approximationen berechnet, d. h., das Definitionsgebiet der Koordinatenfunktionen für die Entwicklung der approximierten Felder ist wesentlich kleiner als das gesamte Gebiet. Damit erhält man die unbekannten Größen als Werte der gesuchten Felder und ihrer Ableitungen in gewissen Punkten (Knoten), die auf den Rändern der Elemente liegen [1], [2]. Eine besonders weite Verbreitung fanden solche Methoden, die auf verschiedenen Variationsprinzipien beruhen [3]. Nur wenige Arbeiten verwenden auch die Methode der kleinsten Quadrate (MKQ) oder die Methode der gewichteten Residuen (MWR) zur Formulierung eines entsprechenden FEM-Modells [4].

In dieser Arbeit wird ein FEM-Modell auf der Grundlage der Methode der kleinsten Quadrate formuliert, wobei von den Koordinatenfunktionen die Erfüllung der Feldgleichungen gefordert wird, d. h. sie sollen „a priori“ die Differentialgleichungen der betrachteten Randwertaufgabe befriedigen. Einfache Beispiele der Kontinuumsmechanik sind:

1. Neumannsche Randwertaufgabe der Laplacegleichung für die Torsion des elastischen Stabes [5]

$$\nabla^2 \varphi = 0 \text{ in } A, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -(\underline{R} \cdot \underline{x} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{k} \text{ auf } \Gamma.$$

Hier sind ∇^2 der Laplaceoperator in der Ebene, A die Querschnittsfläche des Stabes, Γ der Rand des Gebietes A , \underline{n} der äußere Normalenvektor zum Rand, \underline{R} der Radiusvektor für einen Punkt der Ebene, φ die gesuchte Funktion, $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ die Ableitung in Richtung der Normalen.

2. Ermittlung der Torsionsfunktion Φ als Lösung der Poissonschen Aufgabe

$$\nabla^2 \Phi = -2 \text{ in } A, \quad \Phi = 0 \text{ auf } \Gamma.$$

3. Bestimmung des hydrodynamischen Druckes

$$\nabla^2 p = 0 \text{ in } V, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = -\rho a_n \text{ auf } \Gamma_n,$$

wobei ρ die Dichte der Flüssigkeit und a_n die normalgerichtete Komponente der Beschleunigung des Randes ist. Auf den freien Flächen ist $p = 0$.

4. Biegung eines Stabes mit konstantem Querschnitt

$$\nabla^2 \chi = 0 \text{ in } A, \quad \frac{\partial \chi}{\partial n} = x^2 n_x + 2\nu x y n_y \text{ auf } \Gamma$$

mit n_x, n_y als Karthesische Koordinaten des Vektors \underline{n} , ν als Poissonschen Koeffizienten.

5. Aufgaben der ebenen Elastizitätstheorie, die Ermittlung des Spannungszustandes von Rotationskörpern unter Verwendung Lovescher Funktionen [5] usw.

2. Formulierung des Funktionals für die Näherungslösung der Randwertaufgabe

Es sei die Lösung folgender partieller Differentialgleichung gesucht

$$L(\varphi) = 0 \text{ in } V \tag{2.1}$$

$$g_1(\varphi) = \psi_1 \text{ auf } A_1 \tag{2.2}$$

$$g_2(\varphi) = \psi_2 \text{ auf } A_2$$

mit L als Differentialoperator, φ als gesuchte Funktion, ψ_1 und ψ_2 als gegebene Werte auf den Rändern von A_1 und A_2 , wobei $A = A_1 + A_2$ die gesamte Berandung ist, g_1 und g_2 sind algebraische oder Differentialoperatoren. Die Lösung des Problems (2.1) bis (2.3) wird in folgender Form ermittelt. Das Gebiet V untergliedert man in Untergebiete (Elemente) V^e ($e = 1, \dots, N$) und für jedes Element wird das unbekannte Feld φ mit Hilfe einer approximierenden endlichen Reihe gesucht

$$\varphi^e = \varphi^e(\underline{x}) \approx \underline{F}^{eT}(\underline{x}) \underline{a}^e \quad \underline{x} \in V^e \tag{2.4}$$

wobei

$$\underline{F}^{eT}(\underline{x}) = [F_1(\underline{x}), F_2(\underline{x}), \dots, F_k(\underline{x})]^e$$

die Matrix der Approximationsfunktionen $F_i(\underline{x})$ ($i = 1, \dots, k$) ist, die der Gleichung (2.1) genügt,

$$\underline{a}^{eT} = [a_1, \dots, a_k]^e$$

ist der Vektor der unbekanntenen Konstanten auf das Element e bezogen, $\underline{x} \in V^e$ ist ein Punkt mit den Koordinaten (x_1, x_2, x_3) . Auf der Grundlage von Gl. (2.4) ist die Approximation für φ nur bereichsweise stetig. Die Gleichheit der Konstanten für φ die einzelnen Elemente darf nicht gefordert werden, da dann die lokale Approximation des gesuchten Feldes φ nicht garantiert werden kann. Für die Koordinatenfunktionen, welche den Gln. (2.1) genügen, sind die Elemente nicht gekoppelt wie bei traditionellen FEM-Methoden [1]. Die Stetig-

keit der Funktionen φ selbst und ihrer Ableitungen auf dem gemeinsamen Rand zwischen Elementen sowie die Randbedingungen kann nur im integralen Sinne erfüllt werden, z. B. mit der Methode der kleinsten Quadrate. Dabei beträgt die Anzahl der Unbekannten¹⁾ kN . Auf der Grundlage der vorgeschlagenen Methode werden sie aus der Minimalbedingung für folgendes Funktional bestimmt:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N-1} \sum_{j=e+1}^N \left\{ \int_{A_c^{ej}} (\varphi^e - \varphi^j)^2 dA + \sum_{i=1}^I \beta_i \int_{A_c^{ej}} [\underline{d}_i(\varphi^e) - \underline{d}_i(\varphi^j)]^2 dA \right\} + \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \sum_{\alpha=1}^2 \gamma_\alpha \int_{A_\alpha^e} [\xi_\alpha(\varphi^e) - \psi_\alpha]^2 dA. \quad (2.5)$$

A_c^{ej} ist die gemeinsame Grenze der Elemente e und j ,

A_α^e ist der Teil der Fläche A^e , der mit der Grenze A_α gemeinsam ist,

\underline{d}_i ($i = 1, \dots, I$) ist ein Differentialoperator,

β_i ($i = 1, \dots, I$), γ_1, γ_2 sind Gewichtskoeffizienten.

Beispielsweise ergeben sich bei der Lösung der Laplacegl. die Differentialoperatoren \underline{d}_i aus $\text{grad } \varphi$ und den Operatoren, die voneinander unabhängige 2. partielle Ableitungen enthalten. Bei der Lösung der Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie mit Hilfe der Spannungsfunktion φ ist die Kopplung der Funktion φ (im integralen Sinne) nicht notwendig. Es reicht aus, wenn die mechanischen Kopplungsbedingungen beachtet werden

$$\underline{p}_n^e = \underline{p}_n^j, \quad \underline{u}^e - \underline{u}^j + \underline{h}^{ej} = \underline{0} \quad \underline{x} \in A_c^{ej}, \quad (2.6 \text{ a,b})$$

dabei sind \underline{u} das Verschiebungsfeld, \underline{p}_n die auf der Fläche A_c^{ej} entstehende Spannung, \underline{h}^{ej} ein gegebener Verschiebungssprung. Dabei ist es sehr wichtig, daß die Matrix $\underline{F}(\underline{x})$ die Starrkörperverschiebungen enthält.

Im ersten Glied der Gl. (2.5) wird die Integration einmal über jede Fläche zwischen den Elementen ausgeführt. Dabei läßt sich die Matrix des Lösungssystems der algebraischen Gln.

$$\frac{\partial S}{\partial \underline{a}} = \underline{0} \quad (2.7)$$

leicht bei Beachtung der Regel $e < j$ für die zweifache Summation aufbauen. Wenn die Operatoren g_1, g_2 linear sind, so ist das System der algebraischen Gln. ebenfalls linear bezüglich \underline{a} .

1) Es wird vorausgesetzt, daß die Anzahl der Koordinatenfunktionen für jedes Element gleich k ist.

Unter Beachtung der Gl. (2.4) kann man schreiben

$$\int_{A_c^{ej}} (\varphi^e - \varphi^j)^2 dA = \int_{A_c^{ej}} (\underline{a}^{eT} \underline{F}^e(\underline{x}) - \underline{a}^{jT} \underline{F}^j(\underline{x})) (\underline{F}^{eT}(\underline{x}) \underline{a}^e - \underline{F}^{jT}(\underline{x}) \underline{a}^j) dA = [\underline{a}^{eT} \underline{a}^{jT}] \begin{bmatrix} \underline{K}_{(ej)}^{ee} & -\underline{K}^{ej} \\ -\underline{K}^{je} & \underline{K}_{(ij)}^{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a}^e \\ \underline{a}^j \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

mit²⁾

$$\underline{K}^{ej} = \int_{A_c^{ej}} \underline{F}^e(\underline{x}) \underline{F}^{jT}(\underline{x}) dA; \quad (j \leftrightarrow e)$$

$$\underline{K}_{(ej)}^{ee} = \int_{A_c^{ej}} \underline{F}^e(\underline{x}) \underline{F}^{eT}(\underline{x}) dA.$$

Es wird vorausgesetzt, daß man den i -ten Differentialoperator folgendermaßen darstellen kann

$$\underline{d}_i(\varphi^e) = \underline{D}_i^{eT}(\underline{x}) \underline{a}^e \quad (2.9)$$

Im Falle von $\underline{d}_i(\varphi^e) = \nabla \varphi^e$ folgt

$$\underline{D}_i^e(\underline{x}) = \left[\frac{\partial \underline{F}^e(\underline{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial \underline{F}^e(\underline{x})}{\partial x_2}, \frac{\partial \underline{F}^e(\underline{x})}{\partial x_3} \right], \quad \text{d. h.}$$

$$\int_{A_c^{ej}} (\underline{d}_i(\varphi^e) - \underline{d}_i(\varphi^j))^2 dA = \int_{A_c^{ej}} (\underline{D}_i^{eT}(\underline{x}) \underline{a}^e - \underline{D}_i^{jT}(\underline{x}) \underline{a}^j)^2 dA = [\underline{a}^{eT} \underline{a}^{jT}] \begin{bmatrix} \underline{p}_{(ej)}^{ee} & -\underline{p}^{ej} \\ -\underline{p}^{je} & \underline{p}_{(je)}^{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a}^e \\ \underline{a}^j \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

mit

$$\underline{p}_{(ej)}^{ej} = \int_{A_c^{ej}} \underline{D}_i^e(\underline{x}) \underline{D}_i^{jT}(\underline{x}) dA,$$

$$\underline{p}_{(ej)ji}^{ee} = \int_{A_c^{ej}} \underline{D}_i^e(\underline{x}) \underline{D}_i^{eT}(\underline{x}) dA.$$

Analog erhält man, wenn man eine Matrix $G_\alpha(\underline{x})$ ($\alpha = 1, 2$) für die Operatoren g_1, g_2 einführt

$$\xi_\alpha(\varphi^e) = \underline{G}_\alpha^{eT}(\underline{x}) \underline{a}^e \quad (\alpha = 1, 2) \quad (2.11)$$

$$\int_{A_\alpha^e} (\xi_\alpha(\varphi^e) - \psi_\alpha)^2 dA = \underline{a}^{eT} \underline{L}_\alpha^e \underline{a}^e - 2 \underline{q}_\alpha^{eT} \underline{a}^e + c^e \quad (2.12)$$

$$\underline{L}_\alpha^e = \int_{A_\alpha^e} \underline{G}_\alpha^e(\underline{x}) \underline{G}_\alpha^{eT}(\underline{x}) dA$$

2) Offensichtlich ist im Falle

$$\underline{F}^e = \underline{F}^j, \quad \underline{K}_{(ej)}^{ee} = \underline{K}^{ej}.$$

$$\underline{q}_\alpha^{eT} = \int_{A_\alpha^e} \psi_\alpha \underline{G}_\alpha^{eT}(\underline{x}) dA$$

$$c^e = \int_{A_\alpha^e} \psi_\alpha^2 dA \quad (\alpha = 1, 2).$$

Mit den Bezeichnungen

$$\underline{Q}_{(ej)}^{ee} = \underline{K}_{(ej)}^{ee} + \sum_i \beta_i \underline{P}_{(ej)i}^{ee}$$

$$\underline{Q}^{ej} = \underline{K}^{ej} + \sum_i \beta_i \underline{P}_{i-1}^{ej}, \quad (\underline{Q}^{ej})^T = \underline{Q}^{je}$$

$$\underline{L}^e = \sum_\alpha \gamma_\alpha \underline{L}_\alpha^e, \quad \underline{q}^e = \sum_\alpha \gamma_\alpha \underline{q}_\alpha^e$$

erhält man für den Anteil der Elemente e und j (j > e) am Funktional S nach der Integration über A_c^{ej} , A_α^e ($\alpha = 1, 2$)

$$S^{ej} = \frac{1}{2} [\underline{a}^{eT} \quad \underline{a}^{jT}] \begin{bmatrix} \underline{Q}_{(ej)}^{ee} & -\underline{Q}^{ej} \\ -\underline{Q}^{je} & \underline{Q}_{(je)}^{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a}^e \\ \underline{a}^j \end{bmatrix}$$

$$S_\alpha^e = -\underline{a}^{eT} \underline{q}^e + c^e + \frac{1}{2} \underline{a}^{eT} \underline{L}^e \underline{a}^e.$$

Das Funktional selbst läßt sich durch

$$S = \sum_{e=1}^{N-1} \sum_{j>e}^N S^{ej} + \sum_{e=1}^N S_\alpha^e$$

ausdrücken. Unter der Annahme von

$$\underline{Q}^{et} = \underline{0}$$

für ein beliebiges Element t, welches nicht mit dem Element e benachbart ist, und unter Beachtung der Gleichung

$$\begin{aligned} \underline{Q}^{ee} &= \sum_{s \in e} \underline{Q}_{(es)}^{ee} + \underline{L}^e = \int_{A_c^e} \underline{F}^e(\underline{x}) \underline{F}^{eT}(\underline{x}) dA + \underline{L}^e + \\ &+ \sum_{s \in e} \sum_i \beta_i \underline{P}_{i-(es)i}^{ee}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

wobei das Zeichen $s \in e$ unter dem Summationszeichen bedeutet, daß das Element s ein benachbartes Element von e ist, folgt der Ausdruck

$$S = \frac{1}{2} \underline{a}^T \underline{Q} \underline{a} - \underline{a}^T \underline{q} + c. \quad (2.14)$$

Hier sind

$\underline{a}^T = [\underline{a}^{1T}, \underline{a}^{2T}, \dots, \underline{a}^{NT}]$ der Vektor der Unbekannten,
 $\underline{q}^T = [\underline{q}^{1T}, \underline{q}^{2T}, \dots, \underline{q}^{NT}]$ der bekannte Vektor „Belastung“,

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} \underline{Q}^{11} & -\underline{Q}^{12} & \dots & -\underline{Q}^{1e} & \dots & -\underline{Q}^{1N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\underline{Q}^{e1} & -\underline{Q}^{e2} & \dots & \underline{Q}^{ee} & \dots & -\underline{Q}^{eN} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\underline{Q}^{N1} & -\underline{Q}^{N2} & \dots & -\underline{Q}^{Ne} & \dots & \underline{Q}^{NN} \end{bmatrix};$$

$$c = \sum_{e=1}^N c^e.$$

Ein beliebiges Element hat im allgemeinen keine gemeinsame Grenze mit allen anderen Elementen. Daher ist die Matrix \underline{Q} der Gl. (2.15) zur Berechnung der Unbekannten \underline{a} quasisdiagonal:

$$\frac{\partial S}{\partial \underline{a}} = \underline{Q} \underline{a} - \underline{q} = \underline{0}. \quad (2.15)$$

Die Lösung erfolgt unter Beachtung der Bandstruktur der Matrix \underline{Q} [6].

1. Bemerkung:

Die Koeffizienten β_i sind so zu wählen, daß die Elemente $\beta_i \underline{P}_{(ej)i}^{ee}$ annähernd die gleiche Größenordnung mit den Elementen der Matrix $\underline{K}_{(ej)}^{ee}$ haben. Somit hängen β_i von der Elementgröße und der Anzahl der freien Parameter des Elementes „e“ ab.

2. Bemerkung:

Zur Erreichung einer guten Kondition der Matrix $\underline{K}_{(ej)}^{ee}$ ist es günstig, die Unbekannten \underline{a}^e mit Gewichten zur versehen, d. h. z. B. die ersten Koordinatenfunktionen a^e mit 10^{-2} zu multiplizieren. Wenn der Vektor \underline{a}^e aus zwei Teilen $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ besteht und die Matrix $\underline{K}_{(ej)}^{ee}$ aus den entsprechenden Blöcken aufgebaut ist, so sind die Koeffizienten der Matrix $\underline{K}_{(ej)}^{ee}$ entsprechend mit 10^2 bzw. 10^4 zu multiplizieren

$$\begin{bmatrix} \underline{a}_1^T & \underline{a}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{12} \\ \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{bmatrix} = [10^{-2} \underline{a}_1^T \quad \underline{a}_2^T] \begin{bmatrix} 10^4 \underline{K}_{11} & 10^2 \underline{K}_{12} \\ 10^2 \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10^{-2} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{bmatrix}$$

3. Bemerkung:

Die Auswahl der Koeffizienten γ_α wird nach (2.13) so realisiert, so daß die Elementordnung der Matrix $Q_{(es)}^{ee}$ und L^e annähernd gleich sei.

4. Bemerkung:

Bekanntlich können sich die Lösungen der Neumannschen Randwertaufgabe für die Laplacegleichung nur um eine Konstante unterscheiden. Um singuläres Verhalten der Matrix Q in (2.15) zu vermeiden, muß das Funktional (2.5) durch Einführung einer „Punktbedingung“ erweitert werden. Diese wird für den Wert φ in einem Punkt geschrieben, d. h., daß das zu minimierende Funktional zu

$$S_{MOD} = S + \frac{1}{2} \alpha (\varphi^e(\underline{x}_t) - \varphi_t)^2 \quad (2.16)$$

wird, wobei α eine Gewichtskonstante ist, φ_t ein beliebiger vorgegebener Wert von φ im Punkt $\underline{x} = \underline{x}_t$ ist. Dabei wurde vorausgesetzt, daß der Punkt mit den Koordinaten \underline{x}_t zum Gebiet $\underline{x} \in V^e$ gehört.

5. Bemerkung:

Im Falle der Lösung der 2. Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie sind Starrkörperbewegungen durch die Formulierung von „Punktbedingungen“ für Verschiebungen und den Drehtensor in einem beliebigen Punkt auszuschließen.

3. Die Lösung der Laplacegleichung für den axialsymmetrischen Fall

3.1. Allgemeine Darstellung für zylindrische Koordinaten

Es sei die Lösung der Differentialgleichung

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{in } A \quad (3.1)$$

bei den Randbedingungen

$$g_1(\varphi) = \psi_1 \quad \text{auf } \Gamma_1 \quad (3.2a)$$

$$g_2(\varphi) = \psi_2 \quad \text{auf } \Gamma_2 \quad (3.2b)$$

mit $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ gesucht.

Die Matrix der Approximationsfunktionen mit sechs harmonischen Ansatzfunktionen lautet

$$F^{eT} = F^{eT}(\underline{x}) = [1, z, 2z^2 - r^2, 2z^3 - 3zr^2, 8z^4 - 24z^2r^2 + 3r^4, 8z^5 - 40z^3r^2 + 15r^4z] \quad (3.3)$$

($e = 1, \dots, N$).

Die Anzahl der Freiheitsgrade eines Elementes „e“ ist 6. Es wird im folgenden angenommen, daß sich k in den Grenzen von 3 bis 6 ändern kann.

Wenn man das Gebiet A mit zu den Koordinatenlinien parallelen Linien in Elemente einteilt, erhält man innerhalb von A Rechteckelemente, an den Rändern von A in Abhängigkeit von der Berandungsform Elemente mit geraden oder krummlinigen Rändern. Eine solche Einteilung hat folgende Vorteile:

1. Sie ist leicht programmierbar.

2. Entlang der geraden Ränder der Elemente lassen sich die Koeffizienten der Matrizen Q^{ej} , $Q_{(ej)}^{ee}$ bzw. der entsprechenden \underline{P} -Matrizen exakt integrieren, da sich $\underline{D}(\underline{x})$ unmittelbar einfach berechnen läßt.

(Auf den anderen Rändern wird vorgeschlagen, die Integration mit einem beliebigen numerischen Verfahren durchzuführen, z. B. dem Gaußschen Verfahren).

Somit erhält man bei Beachtung von (3.3) nach (2.9)

$$D_1^e(\underline{x}) = \left[\frac{\partial F^e}{\partial r}, \frac{\partial F^e}{\partial z} \right] \quad (3.4)$$

mit

$$F_{,r}^{eT} = \left(\frac{\partial F^e}{\partial r} \right)^T = [0, 0, -2r, -6rz, -48rz^2 + 12r^3, -80rz^3 + 60r^3z]^e,$$

$$F_{,z}^{eT} = \left(\frac{\partial F^e}{\partial z} \right)^T = [0, 1, 4z, 6z^2 - 3r^2, 32z^3 - 48zr^2, 40z^4 - 120r^2z^2 + 15r^4]^e.$$

Weiterhin besteht der Operator d_2 aus den voneinander unabhängigen Ableitungen 2. Ordnung³⁾, die in den Operator ∇^2 eingehen, d. h. aus

$$\frac{\partial^2 F^e}{\partial r^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 F^e}{\partial z^2}.$$

Die Größen sind

$$\left(\frac{\partial^2 F^e}{\partial r^2} \right)^T = [0, 0, -2, -6z, -48z^2 + 36r^2, -80z^3 + 180r^2z]^e,$$

$$\left(\frac{\partial^2 F^e}{\partial z^2} \right)^T = [0, 0, 4, 12z, 96z^2 - 48r^2, 160z^3 - 240r^2z]^e,$$

d. h.

$$D_2^e(\underline{x}) = \left[\frac{\partial^2 F^e}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 F^e}{\partial z^2} \right]. \quad (3.5)$$

In dem Beispiel haben die Operatoren g_1 und g_2 folgendes einfache Aussehen.

$$g_1(\varphi^e) = \varphi^e, \quad g_2(\varphi^e) = \frac{\partial \varphi^e}{\partial n} \quad (3.6a,b)$$

mit der Ableitung in Richtung der Normalen entsprechend (3.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^e}{\partial n} &= \nabla \varphi^e \cdot \underline{n} = \underline{a}^T \underline{D}_1(\underline{x}) \underline{n} \\ &= \underline{a}^T [F_{,r}^e(\underline{x}) n_r + F_{,z}^e(\underline{x}) n_z] \\ &= \underline{a}^T \underline{N}^e(\underline{x}) = \underline{N}^{eT}(\underline{x}) \underline{a}^e. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ist der krummlinige Rand des Gebietes A in der Form $r = f(z)$ (3.8)

gegeben, dann sind die Komponenten des Normalenvektors gleich

3) Die Forderung der Gleichheit der Hauptkrümmungen auf den Rändern der Elemente kann man nicht in den Operator d_i einschließen, da diese Größen bereits nichtlinear von den unbekanntenen Konstanten \underline{a}^e abhängen.

$$n_r = 1 \sqrt{1 + (1/f)^2},$$

$$n_z = -1 \quad f' \sqrt{1 + (1/f)^2}$$

mit

$$f' = \frac{df(z)}{dz}.$$

3.2. Numerische Ergebnisse⁴⁾

1. Es sei die Funktion

$$\varphi = z - r^2 - 2z^2 - 6zr^2 + 4z^3 \quad (3.9)$$

gegeben. Als Randbedingungen werden die Werte auf dem Rand des Rechtecks $z = 0, r = 3, z = 3, r = 0$ (Bild 3.1) genommen.

Die Funktion (3.9) ist harmonisch. Die Approximation wird durch

$$\varphi^e = \varphi^e(\underline{x}) = [1, z, 2z^2 - r^2] \underline{a}^e \quad \underline{x} \in A^e \quad (3.10)$$

realisiert, um die Effektivität der vorgeschlagenen Variante einer FEM einschätzen zu können. Das Element besitzt nur 3 Freiheitsgrade.

Wenn man das Gebiet A in 9 Elemente unterteilt, erhält man die auf Bild 3.2 dargestellten Ergebnisse. Es ist gut zu erkennen, wie das FEM-Prinzip „arbeitet“, d. h., wie versucht wird, den Randbedingungen und den Stetigkeitsbedingungen zwischen den Elementen zu genügen. Die gewählten Elemente sind jedoch noch zu groß, so daß die Näherungslösung nicht befriedigt⁵⁾.

Auf Bild 3.3 sind die Ergebnisse dargestellt, die mit Hilfe von 36 Elementen (bei 3 Freiheitsgraden pro Element) erreicht wurden. In den Elementknoten wird die genaue Lösung angegeben, ferner allen Näherungswerten für φ , die man nach (3.10) für die angrenzenden Elemente erhält. Der Fehler in den Näherungen des Maximalwertes für φ (bei $r = 0, z = 3$) beträgt ca. 0,3 %. Die Stetigkeit von φ zwischen den Elementen wurde im Vergleich zu den vorherigen Rechnungen stark verbessert. Wenn man das arithmetische Mittel der angenäherten Werte φ nimmt, so stellt dies eine gute Approximation der Knotenwerte der genauen Lösung dar.

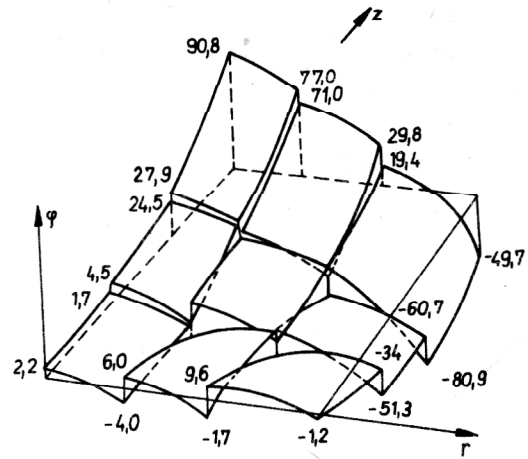


Bild 3.2

Ergebnis der Approximation φ nach (3.9) bei $m = n = k = 3$

Für 81 Elemente erhält man keine wesentliche Verbesserung. Der maximale Fehler in den Näherungen für die Randbedingungen betrug ca. 2 %.

2. Gelöst wird die Laplacegleichung im gleichen Gebiet, jedoch für Randbedingungen, die aus der Funktion

$$\varphi = 8z^5 - 40z^3 r^2 + 15r^4 z \quad (3.11)$$

berechnet wurden (vgl. Bild 3.4). Diese Funktion ist die 6. Koordinatenfunktion der Matrix $\underline{F}^{eT}(\underline{x})$. Die Lösung der Laplacegleichung wird mit Hilfe der Matrix $\underline{F}^{eT}(\underline{x})$ bei $k = 5$ ermittelt.

Auf Bild 3.5a sind die genauen und die Näherungswerte für φ in den Knoten des Netzes bei $m = n = 3$ dargestellt, wobei m und n die Anzahl der Elemente in vertikaler und horizontaler Richtung sind. Auf Bild 3.5b sind die Rechenergebnisse im Falle von $m = n = 6$, sowie in Klammern die Werte für $m = n = 9$ dargestellt. Aus den Ergebnissen kann man erkennen, daß der Maximalwert φ im Gebiet A im Punkt $r = z = 3$ bereits mit Hilfe von 9 Elementen gut approximiert werden kann (Fehler

4) Alle Ergebnisse dieses Abschnittes wurden bei $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0, \gamma_1 = \gamma_2 = 1$ in (2.5) erhalten.

5) Im Falle der Approximation der Matrix $\underline{F}^{eT}(\underline{x})$ (3.3) mit der Dimension $(1, k)$ bei $k \geq 4$ läßt sich die Aufgabe bereits mit einem Element genau lösen.

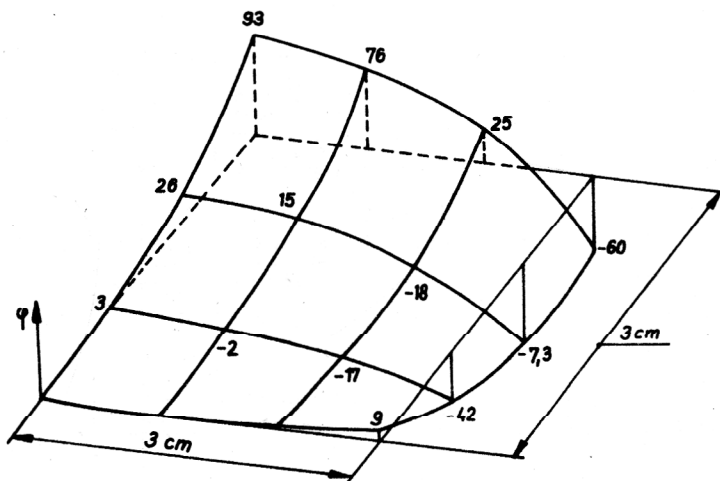


Bild 3.1

$$\varphi = z - r^2 - 2z^2 - 6zr^2 + 4z^3$$

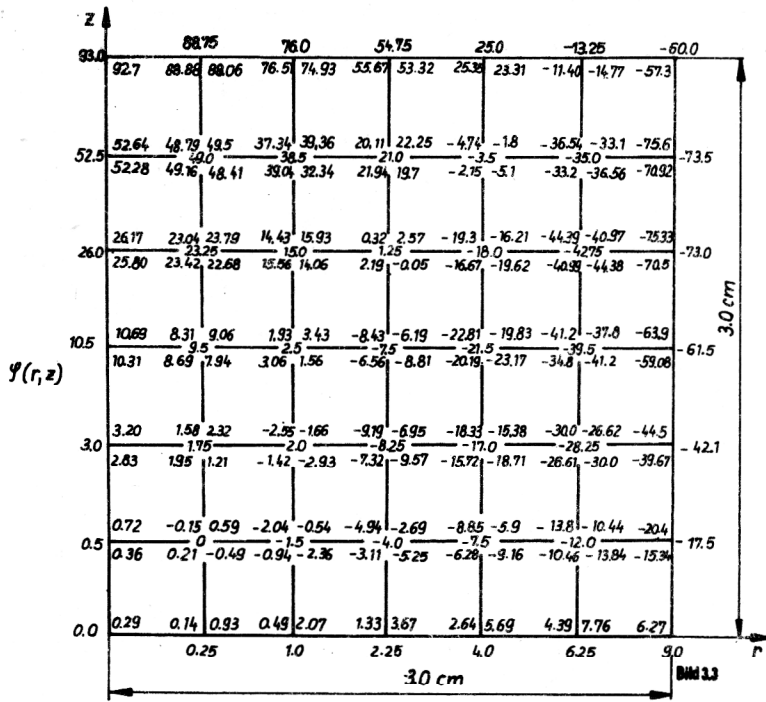


Bild 3.3
Ergebnis der Approximation φ nach (3.9)
bei $m = n = 2k = 6$

Bild 3.4
 $\varphi = F_6 = 8z^5 - 40r^2z^3 + 15r^4z$

Bild 3.5
Ergebnis der Approximation φ nach (3.11)
a) bei $m=n=3, k=5$
b) bei $m=n=6, (m=n=9), k=5$

Bild 3.6
Gebiet A und seine Einteilung in Elemente
bei $m = n = 10$

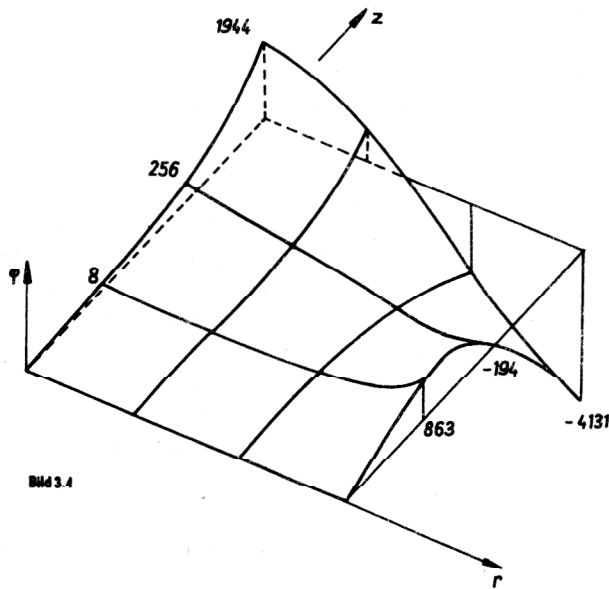


Bild 3.4

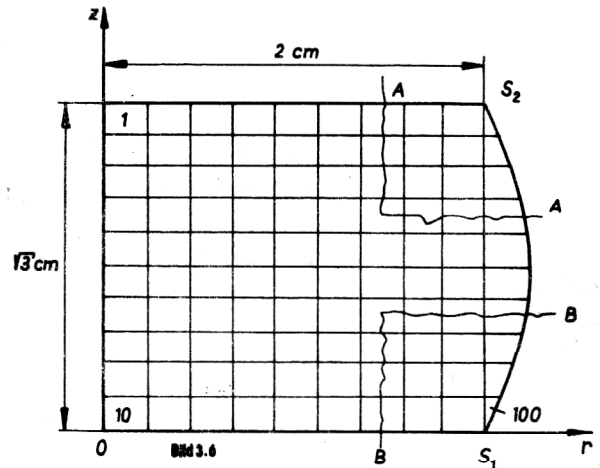
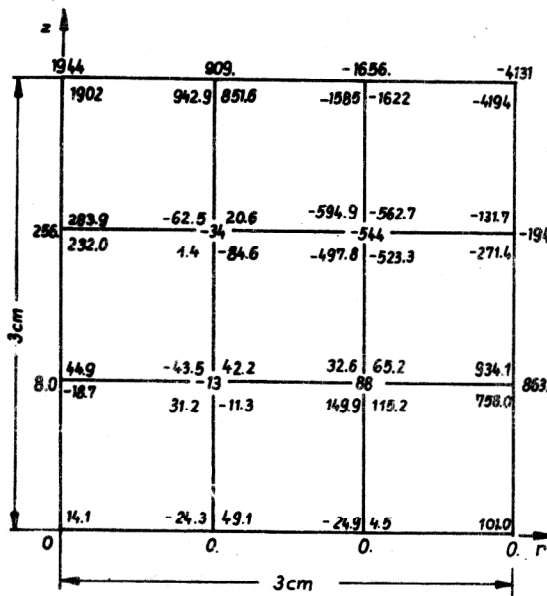
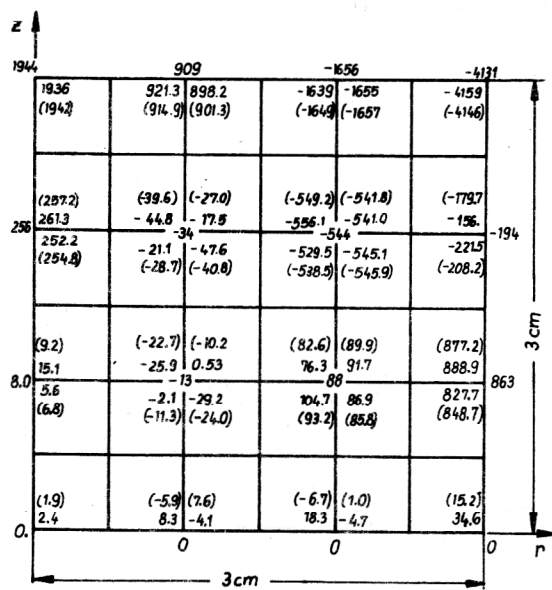


Bild 3.6



a)

Bild 3.5



b)

Bild 3.9
Funktion φ bei den Randbedingungen
(3.12 a–c, d)

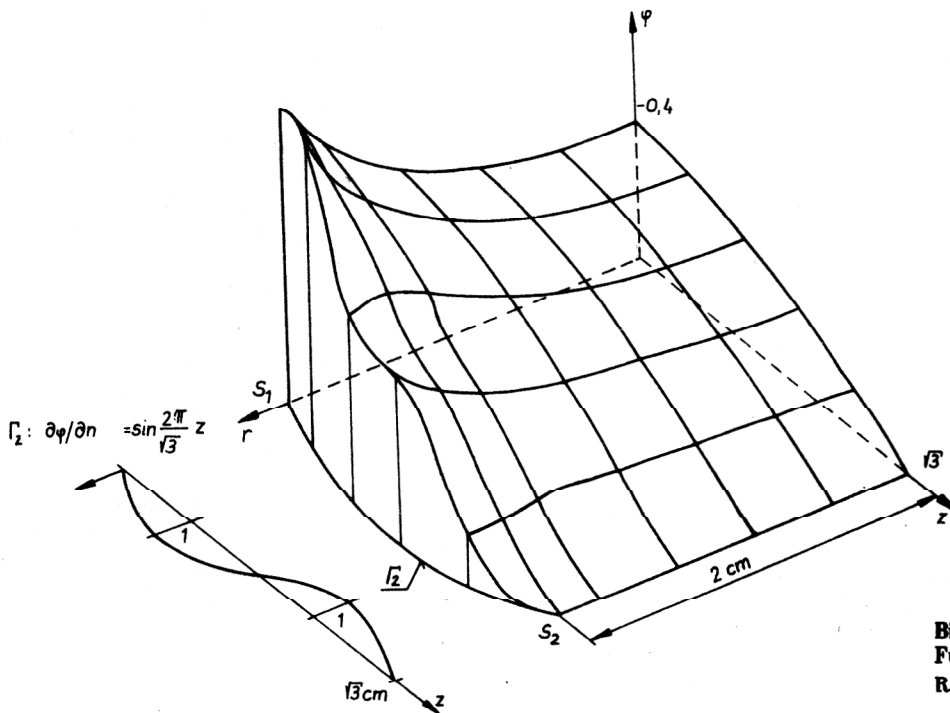
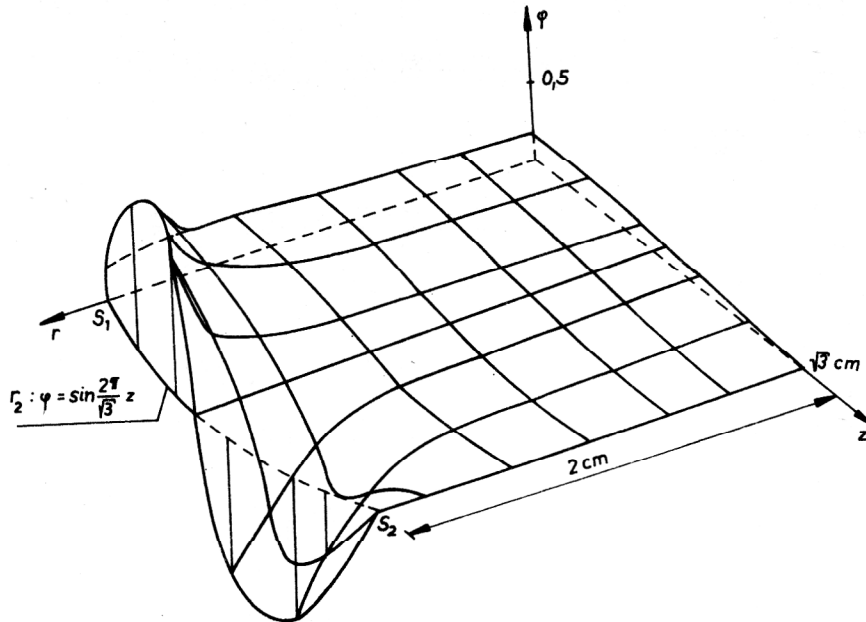


Bild 3.10
Funktion φ bei den
Randbedingungen (3.12 a–c, e)

im Punkt S_1 einen verhältnismäßig großen Sprung für φ . Das folgt aus der Tatsache, daß sich im Punkt S_1 der Typ der Randbedingungen ändert. Im Falle, daß auf

$\Gamma_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ gegeben ist, wird der Sprung unwesentlich.

Die Funktionen φ sind auf den Bildern 3.9 und 3.10 angegeben. Die Werte der Funktion φ in den Knoten wurden aus den Knotenwerten als arithmetisches Mittel berechnet.

4. Die Lösung der axialsymmetrischen Aufgabe der Elastizitätstheorie für Rotationskörper

4.1. Formulierung des Funktionals mit Hilfe der Loveschen Spannungsfunktion

Es wird im zylindrischen Koordinatensystem $\underline{x} = (r, \varphi, z)$ ein elastischer Rotationskörper betrachtet, der aus homogen-isotropen Material oder abschnittsweise homogen-isotropen Material besteht. Im axialsymmetrischen Fall hängen die Verschiebungen und Spannungen nur von den Koordinaten (r, z) ab.

Die Menge der von Null verschiedenen Spannungs- und Verschiebungskomponenten definieren die Vektoren $\underline{\sigma}$ und \underline{u} :

$$\underline{\sigma}^T = \underline{\sigma}^T(\underline{x}) = [\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{rz}], \quad (4.1)$$

$$\underline{u}^T = \underline{u}^T(\underline{x}) = [u, w], \quad (4.2)$$

wobei u, w radiale und axiale Komponenten des Verschiebungsfeldes sind, $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$ die Normalspannungen und τ_{rz} die Tangentialspannungen sind. Die auf Flächen mit dem Vektor der Normalen \underline{n} entstehenden Spannungen $\underline{P}_n = \underline{P}$ kann man durch $\underline{\sigma}$ folgendermaßen ausdrücken

$$\underline{p} = \underline{N} \underline{\sigma} \quad (4.3)$$

mit

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} n_r & 0 & 0 & n_z \\ 0 & 0 & n_z & n_r \end{bmatrix}, \quad \underline{n}^T = [n_r, 0, n_z].$$

Die Fläche A des Körpers besteht aus zwei Teilen. Auf A_1 ist die Spannung \underline{p}_0 gegeben und auf A_2 die Verschiebung \underline{u}_0 . Dann kann man die Randwertaufgabe mit der Loveschen Spannungsfunktion /5/ beschreiben:

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0 \quad \underline{x} \in V$$

$$\underline{p} = \underline{p}^0 \quad \underline{x} \in A_1 \quad (4.4a-c)$$

$$\underline{u} = \underline{u}^0 \quad \underline{x} \in A_2$$

mit $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z^2}$ als Laplaceoperator.

Die Spannungen und Verschiebungen lassen sich mit Hilfe der Beziehungen

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \nu \nabla^2 \varphi \right]$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \nu \nabla^2 \varphi \right]$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + (\nu - 2) \nabla^2 \varphi \right] \quad (4.5a-d)$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + (\nu - 1) \nabla^2 \varphi \right]$$

$$u = \frac{1}{2G} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}$$

$$w = \frac{1}{2G} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2(\nu - 1) \nabla^2 \varphi \right] \quad (4.6a,b)$$

finden, wobei ν der Poissonsche Koeffizient, G der Schubmodul sind. Aus den Differentialoperationen in den rechten Ausdrücken (4.5) und (4.6) kann man die Operatoren \underline{d}_1^* und \underline{d}_2^* bilden, so daß sich die Vektoren der Spannungen und Verschiebungen $\underline{\sigma}$ und \underline{u} durch ausdrücken lassen:

$$\underline{\sigma} = \underline{d}_1^* \varphi(\underline{x}) = \underline{\sigma}(\varphi), \quad (4.7)$$

$$\underline{u} = \underline{d}_2^* \varphi(\underline{x}) = \underline{u}(\varphi). \quad (4.8)$$

Die auf Flächen mit der Normalen \underline{n} entstehenden Spannungen lassen sich mit Hilfe von (4.3) und (4.7) so beschreiben:

$$\underline{p} = \underline{N} \underline{d}_1^* \varphi(\underline{x}) = \underline{p}(\varphi). \quad (4.9)$$

Unter Beachtung der allgemeinen Bezeichnungen (2.1) – (2.3) kann man sagen, daß $L = \nabla^2 \nabla^2$ ein biharmonischer Differentialoperator ist und $\underline{p}(\varphi)$, $\underline{u}(\varphi)$ den Operatoren $g_1(\varphi)$ und $g_2(\varphi)$ entspricht.

Wenn man die Randwertaufgabe mit Hilfe der FEM löst, wie es unter 2 beschrieben ist, so ist die Spannungsfunktion φ durch voneinander unabhängige biharmonische Koordinatenfunktionen elementweise zu approximieren. Somit erhält man für die Elemente solche Spannung und Verschiebung, die den Grundgleichungen der Elastizitätstheorie genügen. Bei der Formulierung des Funktionals wird der Sprung der Funktion φ nicht berücksichtigt, der an den Elementgrenzen entsteht. Dies ist vom Standpunkt der Lösung der Randwertaufgaben nicht notwendig, da es ausreicht, nur die dynamischen und kinematischen Kopplungsbedingungen zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} \underline{p}^e &= \underline{p}^j & \underline{x} \in A_c^{ej}, \\ \underline{u}^e &= \underline{u}^j & \underline{x} \in A_c^{ej}. \end{aligned} \quad (4.10a,b)$$

Damit erhält man für das Funktional (2.5):

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N-1} \sum_{j>e}^N \left\{ \beta_1 \int_{A_c^{ej}} (\underline{p}^e - \underline{p}^j)^2 dA \right. \\ &\quad \left. + \beta_2 \int_{A_c^{ej}} (\underline{u}^e - \underline{u}^j)^2 dA \right\} + \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \\ &\quad \left\{ \gamma_1 \int_{A_1^e} (\underline{p}^e - \underline{p}^0)^2 dA + \gamma_2 \int_{A_2^e} (\underline{u}^e - \underline{u}^0)^2 dA \right\}. \end{aligned}$$

Wie zu erkennen ist, entsprechen den Vektoren \underline{d}_i ($i = 1, 2$) die Größen \underline{p} und \underline{u} ($\underline{x} \in A_c^{ej}$). Wenn das Material der Elemente e und j gleich ist, kann man die dynamische Kopplungsbedingung (4.10a) durch folgende Bedingung ersetzen

$$\underline{\sigma}^e = \underline{\sigma}^j \quad \underline{x} \in A_c^{ej} \quad (4.12)$$

In diesem Fall entspricht dem Vektor \underline{d}_1 $\underline{\sigma}$ und im ersten Integral (4.11) erscheint statt $\underline{p}^e, \underline{p}^j, \underline{\sigma}^e$ und $\underline{\sigma}^j$.

Weiterhin wird die kinematische Bedingung (4.10b) durch die Bedingung (2.6b) ersetzt, wenn an der Elementgrenze e und j ein Sprung \underline{h}^{ej} im Verschiebungsfeld gegeben ist. Das Integral in (4.11) wird dann entsprechend verändert.

Bei der Approximation der Spannungsfunktion φ^e im Element e enthält die Matrix $\underline{F}^e(\underline{x})$ biharmonische Funktionen.

Dann kann man auf der Grundlage von (4.7) – (4.9) die Spannungen und Verschiebungen als Funktionen der Konstanten \underline{a}^e ausdrücken:

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}^e &= \underline{d}_1^* \varphi^e = (\underline{d}_1^* \underline{F}^e(\underline{x})) \underline{a}^e \\ \underline{u}^e &= \underline{d}_2^* \varphi^e = (\underline{d}_2^* \underline{F}^e(\underline{x})) \underline{a}^e \\ \underline{p}^e &= \underline{N}^e \underline{\sigma}^e = \underline{N}^e (\underline{d}_1^* \underline{F}^e(\underline{x})) \underline{a}^e.\end{aligned}\quad (4.13a \ c)$$

Nach Einsetzen der Ausdrücke in das Funktional (4.11) analog dem Verfahren im 2. Abschnitt erhält man ein System von linearen algebraischen Gleichungen vom Typ (2.15). Dabei werden die Matrizen $\underline{D}_i^{eT}(\underline{x})$, $\underline{G}_\alpha^{eT}(\underline{x})$ ((2.9), (2.11)) auf der Grundlage von (4.3) zu:

– im Falle der Kopplungsbedingung (4.10a)

$$\underline{D}_1^{eT}(\underline{x}) = \underline{N}^e (\underline{d}_1^* \underline{F}^e(\underline{x})),$$

– im Falle der Kopplungsbedingung (4.12)

$$\underline{D}_1^{eT}(\underline{x}) = \underline{d}_1^* \underline{F}^e(\underline{x}),$$

weiterhin gilt

$$\underline{D}_2^{eT}(\underline{x}) = \underline{d}_2^* \underline{F}^e(\underline{x})$$

$$\underline{G}_1^{eT}(\underline{x}) = \underline{N}^e (\underline{d}_1^* \underline{F}^e(\underline{x}))$$

$$\underline{G}_2^{eT}(\underline{x}) = \underline{D}_2^{eT}(\underline{x})$$

Nach der Auflösung des Gleichungssystems (2.15) erhält man die Konstanten \underline{a}^e und damit unter Verwendung von (4.13) die Spannungen und Verschiebungen.

4.2. Die Formulierung der biharmonischen Funktionen

Mit $P_n(\mu)$ sei das Legendresche Polynom n-ter Ordnung bezeichnet. Bekanntlich kann man aus P_n im zylindrischen Koordinatensystem (r, z) folgende harmonische Polynome formulieren [5]:

$$\psi_n = \psi_n(r, z) = R^n P_n\left(\mu = \frac{z}{R}\right), R^2 = r^2 + z^2, n = 0, 1, 2, \dots$$

Nach der Multiplikation von ψ_n mit R^2 ist die erhaltene Funktion $R^2 \psi_n$ biharmonisch. Man kann zeigen, daß aus den linearen Kombinationen der Polynome

$$R^2 \psi_{n-2}, \psi_n$$

biharmonische Funktionen n-ter Ordnung (Summe der Exponenten bei den Gliedern, die r und z enthalten, ist n) gebildet werden können. Mit Hilfe dieser biharmonischen Funktionen kann man die Verschiebungen durch ein „Polynom“ (n-2)-Ordnung und die Spannungen durch ein „Polynom“ (n-3)-Ordnung approximieren. Im Fall von $n = 2$ geben die Funktionen $R^2 \psi_0, \psi_2$ eine Nullspannung und eine konstante axiale Verschiebung. D. h., daß die Funktionen die Starrkörperbewegungen des Körpers approximieren.

Wichtig ist, daß in der Matrix $\underline{F}^{eT}(\underline{x})$ nicht beide Funktionen genommen werden, sondern nur eine. Bei $n > 2$ erhält man von Null verschiedene Spannungen. Somit ist das biharmonische Polynom n-ter Ordnung elementweise formuliert, wenn die approximierende Matrix (2.4) in folgender Form genommen wird

$$\underline{F}^{eT}(\underline{x}) = [\psi_2 \cdot R^2 \psi_1, \psi_3 \cdot R^2 \psi_2, \psi_4 \cdot \dots \cdot R^2 \psi_{n-2}, \psi_n] \quad (4.14)$$

Hier approximiert ψ_2 die Starrkörperbewegungen, $R^2 \psi_i, \psi_{i+2}$, welche durch vertikale Striche abgetrennt sind, approximieren die Verschiebungen i-ter Ordnung. Die Spannungen und Verschiebungen, die nach den Gleichungen (4.5), (4.6) für $i = 1, \dots, 5$ berechnet wurden, sind in der Tabelle 1 enthalten. Weitere biharmonische Funktionen lassen sich mit Hilfe der Funktion $\ln r$ [7] formulieren. Diese Funktionen sind immer notwendig, wenn ein Element nicht die Rotationsachse enthält. Entsprechend [7] sind

$$\chi_n = \chi_n(\underline{x}) = \psi_n(\underline{x}) \ln r + H_n(\underline{x})$$

harmonische Funktionen. Aus dieser Bedingung ermittelt man $H_n(\underline{x})$, weiterhin sind die Funktionen $R^2 \chi_{n-2}, \chi_n$ biharmonisch. Im Falle von $n = 0$ gibt die Funktion $\chi_0 = \ln r$ weder Verschiebungen noch Spannungen. Somit ist sie in konkreten Aufgaben nicht notwendig. Die Matrix (4.14) kann man folgendermaßen erweitern

$$\chi_1 \cdot R^2 \chi_0, \chi_2 \cdot R^2 \chi_1, \chi_3 \cdot R^2 \chi_2, \chi_4 \cdot \dots$$

Die aus diesen Spannungsfunktionen folgenden Verschiebungs- und Spannungsfelder kann man in der Tabelle 1 in den Spalten $i = 6, 7, 8, 9$ finden.

4.3. Numerische Ergebnisse

Auf der Grundlage der hier vorgestellten Gln. wurde ein Rechenprogramm in FORTRAN aufgestellt. Das Programm arbeitet auf der Grundlage von Dreieckselementen.

Die erfolgreiche Nutzung der vorgeschlagenen FEM erfordert eine richtige Auswahl der Gewichtskoeffizienten β_i, γ_α im Funktional (4.11). Bei der Bestimmung dieser Faktoren ist zu beachten, daß β_1, γ_1 die Dimension mm^2/N^2 und β_2, γ_2 die Dimension $1/\text{mm}^2$ haben. Bei der Auswahl der Faktoren ist der Unterschied in den Größenordnungen der Verschiebungen und Spannungen zu berücksichtigen: wenn den Verschiebungen 1. Ordnung Spannungen B-ter Ordnung entsprechen, so gibt es bei $\beta_1 = \gamma_1 = 1$ und $\beta_2 = \gamma_2 = B^2$ gute Ergebnisse (Diese Vorgehensweise ist jedoch ingenieurmäßig intuitiv).

Zur globalen Abschätzung der erhaltenen Ergebnisse kann man den Wert des Funktionals S verwenden, zur lokalen Abschätzung den Sprung der Ergebnisse an den Rändern von benachbarten Elementen. Der „Fehler“ S ist auf Grund von (2.14), (2.15) folgender

$$S = -\frac{1}{2} \underline{a}^T \underline{q} + c. \quad (4.15)$$

Aus den bisherigen Rechnungen folgt, daß im Falle der Übereinstimmung von 2–3 Ziffern die Lösung als befriedigend angesehen werden kann, bei 5–6 Ziffern praktisch exakt ist.

l	1		2		3		4		5	
	$R^2 \psi_1$	ψ_3	$R^2 \psi_2$	ψ_4	$R^2 \psi_3$	ψ_5	$R^2 \psi_4$	ψ_6	$R^2 \psi_5$	ψ_7
φ_i	$\frac{-\nu r^2}{2(1-\nu)} - \frac{1-2\nu}{6+6\nu} z^3$	$z^3 - \frac{3}{2} r^2 z$	$(r^2+z^2)(z^2 - \frac{1}{2} r^2)$	$z^4 - 3r^2 z^2 + \frac{3}{8} r^4$	$(r^2+z^2)(z^2 - \frac{3}{2} r^2 z)$	$z^5 - 5r^2 z^3 + \frac{15}{8} r^4 z$	$(r^2+z^2)(z^4 - 3r^2 z^2 + \frac{3}{8} r^4)$	$z^6 - \frac{5}{6} r^2 z^4 + \frac{15}{8} r^4 z^2 + \frac{45}{8} r^4 z^2$	$(r^2+z^2)(z^5 - 5r^2 z^3 + \frac{15}{8} r^4 z)$	$z^7 - \frac{21}{2} r^2 z^5 + \frac{105}{8} r^4 z^3 - \frac{35}{8} r^6 z$
σ_r	0	-3	$2z(1-14\nu)$	-12z	$-3z^2(1+18\nu) - 3r^2(6-9\nu)$	$\frac{45}{2} r^2 - 30z^2$	$-8z^3(2+11\nu) - zr^2(63-132\nu)$	$-60z^3 + 135r^2 z$	$\frac{15}{4} r^4(15-13\nu) - 40z^4(4+13\nu) + z^2 r^2(390\nu - 112,5)$	$-65,625r^4 - 105z^4 + 472,5z^2 r^2$
σ_φ	0	-3	$2z(1-14\nu)$	-12z	$-3z^2(1+18\nu) - 3r^2(2-9\nu)$	$\frac{15}{2} r^2 - 30z^2$	$-8z^3(2+11\nu) - zr^2(21-132\nu)$	$-60z^3 - 45r^2 z$	$\frac{15}{4} r^4(3-13\nu) - 40z^4(4+13\nu) + z^2 r^2(390\nu - 37,5)$	$-13,125r^4 - 105z^4 + 157,5z^2 r^2$
σ_z	1	6	$-4z(8-7\nu)$	24z	$-6z^2(8-9\nu) + r^2(51-27\nu)$	$-30r^2 + 60z^2$	$-8z^3(7-11\nu) + zr^2(216-132\nu)$	$120z^3 - 180zr^2$	$10z^4(-5+13\nu) + \frac{15}{4} r^4(13+31) - 30z^2 r^2(13\nu-18)$	$236,25r^4 z^2 + 210z^4 - 630z^2 r^2$
τ_{rz}	0	0	$2r(8-7\nu)$	-12r	$6zr(8-9\nu)$	-60zr	$4z^2 r(21-33\nu) - r^3(54-33\nu)$	$-180z^2 r + 45r^3$	$-20z^3 r(13\nu-5) + 15zr^3(13\nu-18)$	$-420z^4 r + 315z^2 r^3$
$2Gu$	$-\frac{r\nu}{1+\nu}$	-3r	2rz	-12rz	$-3z^2 r - 6r^3$	$-30rz^2 + \frac{15}{2} r^3$	$-16z^3 r - 21zr^3$	$-60z^3 r + 45r^3 z$	$-40z^4 r - \frac{75}{2} z^2 r^3 + \frac{45}{4} r^5$	$-105z^4 r + 157,5z^2 r^3 - 13,125r^5$
$2Gw$	$\frac{z}{1+\nu}$	6z	$-4z^2(4-7\nu) + r^2(15-14\nu)$	$12z^2 - 6r^2$	$-4z^3(4-9\nu) + zr^2(51-54\nu)$	$-30r^2 z + 20z^3$	$2z^4(22\nu-7) + 4z^2 r^2(27-33\nu) - \frac{1}{4} r^4(87-66\nu)$	$30z^4 - 90z^2 r^2 + \frac{90}{8} r^4$	$2z^5(26\nu-5) - 20z^3 r^2 + (13\nu-9)r^2 z r^4 + (26\nu-31)$	$42z^5 - 210z^3 r^2 + 78,75z^2 r^4$

l	6	7		8		9	
	χ_1	$R^2 \chi_0$	χ_2	$R^2 \chi_1$	χ_3	$R^2 \chi_2$	χ_4
φ_i	$z \ln r$	$(r^2+z^2) \ln r$	$(z^2 - \frac{r^2}{2}) \ln r + \frac{1}{3}(r^2+z^2)$	$(r^2+z^2) z \ln r$	$\frac{1}{3} \ln r + \frac{2}{3} z(z^2+r^2)$	$\frac{1}{2} \ln r + \frac{1}{3}(r^2+z^2)^2$	$\frac{1}{6} \ln r + \frac{57}{70} z^4 + \frac{39}{70} r^2 z^2 - \frac{9}{35} r^4$
σ_r	$-\frac{1}{r^2}$	$-\frac{2z}{r^2}$	$-\frac{2z}{r^2}$	$\frac{(2-10\nu) \ln r}{r^2} - \frac{3z^2}{r^2} + 3-4\nu$	$-3 \ln r - 3 \frac{z^2}{r^2} - 3,3$	$-\frac{4z^3}{r^3} + (2-28\nu) z \ln r + (17-52\nu) \frac{z}{r}$	$-\frac{4z^3}{r^3} - 12z \ln r - \frac{552}{35} z$
σ_φ	$\frac{1}{r^2}$	$\frac{2z}{r^2}$	$\frac{2z}{r^2}$	$\frac{(2-10\nu) \ln r}{r^2} + \frac{3z^2}{r^2} + 1-4\nu$	$-3 \ln r + 3 \frac{z^2}{r^2} - 0,3$	$\frac{4z^3}{r^3} + (2-28\nu) z \ln r + (11-52\nu) \frac{z}{r}$	$\frac{4z^3}{r^3} - 12z \ln r - \frac{132}{35} z$
σ_z	0	0	0	$\frac{(10\nu-14) \ln r}{r} + 4\nu-8$	$6 \ln r + 3,6$	$\frac{(28\nu-32) z \ln r}{r} + (52\nu-80) \frac{z}{r}$	$12z(2 \ln r + \frac{57}{35})$
τ_{rz}	0	$-\frac{2}{r}(2-3\nu)$	$\frac{2}{r}$	$\frac{(10\nu-4) z}{r}$	$6 \frac{z}{r}$	$\frac{z^2}{r}(14\nu-2) + (16-14) r \ln r + (16\nu-5) \frac{r}{3}$	$\frac{12z^2}{r} - 12z \ln r - \frac{132}{35} r$
$2Gu$	$\frac{1}{r}$	$\frac{2z}{r}$	$\frac{2z}{r}$	$\frac{3z^2}{r} + 2r \ln r + r$	$-3r \ln r + 3 \frac{z^2}{r} - 0,3 r$	$\frac{4z^3}{r} + \frac{11}{3} r z + 2r z \ln r$	$\frac{4z^3}{r} - 12z \ln r - \frac{131}{35} z r$
$2Gw$	0	$-2 \ln r(5-6\nu) - 8(1-\nu)$	$2 \ln r + \frac{2}{3}$	$\frac{(20\nu-14) z \ln r}{r} + 8z(\nu-1)$	$6 z \ln r + 3,6 z$	$\frac{z^2 \ln r(28\nu-16)}{r} + r^2 \ln r(15-14\nu) + \frac{z^2}{3}(52\nu-40) + r^2(\frac{45}{3}\nu-4)$	$(12z^2 - 6r^2) \ln r + \frac{3z^2}{35} z^2 + \frac{39}{35} r^2$

Beispiel:

Berechnung eines Zylinders nach Bild 4.1

Auf einem Teil der Oberfläche wirkt konstanter Druck p, bei z = 0 sei die axiale Verschiebung Null. Es gelten folgende Werte:

$d_1 = 20 \text{ mm}, d_2 = 60 \text{ mm}, h = 50 \text{ mm},$

$p = 100 \text{ N/mm}^2, G = 75019 \text{ N/mm}^2, \nu = 0,33.$

Die genaue Lösung der Aufgabe ist unbekannt. Der Körper wird in Dreieckselemente eingeteilt. Bild 4.2 zeigt

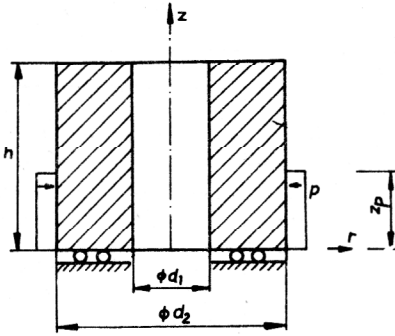


Bild 4.1
Der axialsymmetrische Körper

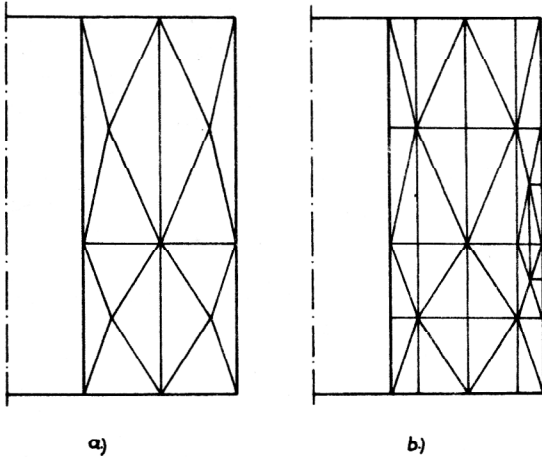


Bild 4.2
Einteilung in 16 Elemente

die Einteilung in 16 und 41 Elemente. Bei beiden Einteilungen ist die Approximation von φ je Element gleich:

$$F^{eT}(x) = [\psi_2, R^2 \psi_1, \psi_3, R^2 \psi_2, \psi_4, R^3 \psi_3, \psi_5, \chi_1, R^2 \chi_0, \chi_2]$$

Das erste Glied in den Klammern sichert die Approximation der Starrkörperbewegungen, die nächsten 6 Funktionen geben für die Verschiebungen die Polynome 1., 2. und 3. Ordnung. Die 3 letzten Funktionen enthalten Glieder mit $\ln r$. Bei den Rechnungen wurden folgende Gewichtskoeffizienten verwendet:

$$\beta_1 = \gamma_1 = 1 \text{ mm}^2/\text{N}^2, \quad \beta_2 = \gamma_2 = 10^8 \text{ 1/mm}^2.$$

Die Werte für das Funktional lauten bei der Näherungslösung der Randwertaufgabe auf Grund von (4.15)

$$S = -361509,36 + 376991,12 = 15481,75 \quad (16 \text{ Elemente}),$$

$$S = -374398,05 + 376991,12 = 2593,07 \quad (41 \text{ Elemente}).$$

Wie zu erkennen ist, verringert sich S mit zunehmender Netzverfeinerung. Bild 4.3 zeigt den Verlauf der Spannungen auf der Fläche $r = 30 \text{ mm}$. Bei $z = z_p = 20 \text{ mm}$ hat die äußere Belastung einen Sprung. Daher lautet die Randbedingung bei $z^+ \rightarrow 20 \text{ mm}$, $\sigma_r \rightarrow 0$ und bei $z^- \rightarrow 20 \text{ mm}$ $\sigma_r = -100 \text{ N/mm}^2$.

Aus den Ergebnissen ist zu erkennen, daß mit zunehmender Elementzahl den Randbedingungen besser entsprochen wird. Ähnliche Ergebnisse werden auf Flächen, auf denen keine Belastung wirkt, erzielt.

Auf dem Rand $z = 0$ beträgt die Axialverschiebung ein Hundertstel des Maximalwertes der Axialverschiebung. Bild 4.4 enthält die Radialspannungen σ_r , die zur Koordinate $z_p = z$ gehören, und für die oberen ($z^+ = 20$) und unteren ($z^- = 20$) Elemente berechnet wurden. Bei der genauen Lösung ist eine stetige Funktion im Intervall $10 \leq r \leq 30$ und bei $r = 30$ hat sie 2 Werte (0 und -100) auf Grund des Sprungs in den Randbedingungen. Aus der Analyse der Ergebnisse folgt, daß auf den Rändern benachbarter Elemente die entsprechenden Komponenten der Spannungen und Verschiebungen bei grober Elementeteilung nur in einer Ziffer zusammenfallen, bei einer Einteilung von 41 Elementen fallen bereits 2 bis 3 Ziffern zusammen.

Die Ergebnisse zeigen, daß die approximierenden Funktionen, die die Glieder $\ln r$ enthalten, befriedigende Lösungen bereits im Falle einer nicht zu großen Elementanzahl geben.

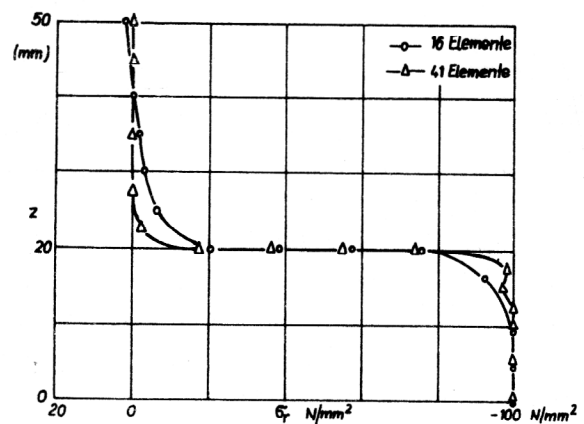


Bild 4.3
Einteilung in 41 Elemente

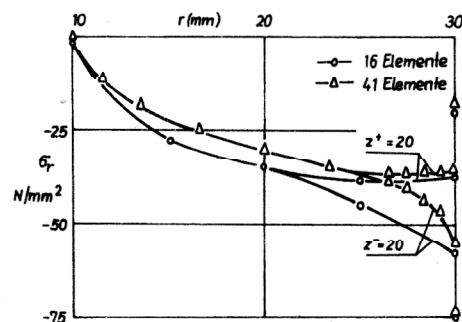


Bild 4.4
Verteilung der Radialspannungen entlang der Achse z

Schlussfolgerungen

Die durchgeführten Berechnungen auf der Grundlage der vorgeschlagenen Methode demonstrieren ihre Effektivität. Es erwies sich, daß der Wert des Funktionals S abnahm, wenn einerseits die Elementanzahl erhöht wurde, andererseits bei konstanter Elementanzahl die Anzahl der Freiheitsgrade der Elemente erhöht wurde. Da bei $S \rightarrow 0$ die Näherungslösung gegen die genaue geht, kann man mit einiger Erfahrung den Wert von S ermitteln (was natürlich vom Aufgabentyp abhängt), bei dem man

sagen kann, daß die Näherungslösung in der Nähe der genauen Lösung liegt. Ein Vorteil der Methode ist es, daß die Matrix Q in der Gleichung (2.15) leicht aufbau- und berechenbar ist. Für die Elemente kann man verschiedene Matrizen $F^e(x)$ (2.4) (Freiheitsgrade k können verschieden sein) nehmen.

Ein Nachteil ist jedoch, daß die Werte der Gewichtskoeffizienten β_i , γ_α in (2.5) und (4.11) nur auf Grund der numerischen Erfahrung empfohlen werden können.

Vom Standpunkt der Mathematik bleibt die Frage nach dem Beweis der Konvergenz der vorgeschlagenen FEM offen.

Die Autoren danken dem Institut für Probleme der Mechanik der Akademie der Wissenschaften der UdSSR für die Möglichkeit, daß sie die Rechnungen zum Abschnitt 3 in der genannten Einrichtung durchführen durften.

LITERATUR

- [1] Zienkiewicz, O.C.: The finite element method in engineering science. McGraw-Hill, London, 1971.
- [2] Strang, G., Fix, G.J.: An analysis of the finite element method. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1973.
- [3] Pian, T.H.H., Tong, P.: Basic of finite element methods for solid continua. Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 1, 1969, pp. 3–28
- [4] Eason, E.D.: A review of least-squares methods for solving partial differential equations. Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 10, 1976, pp. 1031–1046.
- [5] Лурье А.И.: Теория упругости. Наука, М., 1970.
- [6] Mondkar, D.P., Powell, G.H.: Large capacity equation solver for structural analysis. Int. J. Computers and Struct., 4, 1974, pp. 699–728.
- [7] Колтунов М.А., Васильев Ю.М., Черных В.А.: Упругость и прочность цилиндрических тел. Высшая школа, М., 1975.

Anschrift der Verfasser:

Doz. Dr. István Páczelt

Friques Nándori

Technische Universität für Schwerindustrie
Miskolc, UVR