

# Die experimentelle Verschiebungs- und Spannungsanalyse der diametral gedrückten Kugel und ihr Vergleich mit der Theorie

Martin Stockmann

## 1. Einleitung

In der experimentellen Spannungs- und Dehnungsanalyse hat sich im Fall des elastischen Materialverhaltens seit langem das von Oppel [1] erstmals durchgeführte Erstarungsverfahren bewährt. Dieses Verfahren, bei dem bestimmte Kunststoffe auf ihre Erweichungstemperatur erwärmt und anschließend unter Belastung langsam abgekühlt werden, beruht auf der Fähigkeit dieser vernetzten Materialien, ihren Verformungszustand sowie den spannungsoptischen Effekt nach Entlastung bei Raumtemperatur beizubehalten. Eine polarisationsoptische Auswertung ist nach der Zerlegung des Modells in bestimmte Schnitte möglich, wobei aus den Isochromatenordnungen auf die Differenz der wahren bzw. sekundären Hauptspannungen, die bei Erstarrungstemperatur vorlagen, in der gesamten Schnittebene geschlossen werden kann.

Die Fähigkeit, den Verformungszustand nach abermaliger Erwärmung auf die Erweichungstemperatur ohne Belastung wieder zum Verschwinden zu bringen, ermöglicht es, eine feldmäßige Verschiebungsmessung mit dem Moiréverfahren ([2], [3]) durchzuführen. Die Isotheten entstehen nach dem Tempern des mit einem Raster belegten Schnittes im Kontakt mit dem Bezugsraster. Sie repräsentieren die negativen ursprünglichen Verschiebungen.

Gegenstand der Arbeit ist die Untersuchung der Frage, wie die bei der Spannungs- und Verschiebungsanalyse mittels des Erstarungsverfahrens auftretenden systematischen und zufälligen Fehler die Ergebnisse verfälschen. Am Beispiel der diametral gedrückten Kugel, deren geschlossene Lösung für die Spannungen und Verschiebungen auch im Fall der Inkompressibilität bekannt ist, wird der Vergleich experimenteller und theoretischer Ergebnisse durchgeführt und die Eignung der Untersuchungsmethoden bzw. die Grenzen der Übereinstimmung nachgewiesen.

## 2. Theoretische Lösungen

Das klassische Problem der diametral gedrückten Kugel wurde theoretisch mehrfach behandelt [4] bis [9], wobei im folgenden nur auf die beiden tatsächlich numerisch ausgewerteten und zum Vergleich herangezogenen Lösungen von E. Sternberg/F. Rosenthal [5] und A. Lurje [7] eingegangen wird.

Die Spannungsberechnung nach E. Sternberg und F. Rosenthal basiert auf der Boussinesqschen Spannungsfunktion für axialsymmetrische Probleme und besteht aus

2 Summandengruppen. Die erste Gruppe besitzt in den Kugelpolen Singularitäten und ergibt ein Spannungssystem, das statisch der Wirkung einer Einzelkraft äquivalent ist und den Grenzübergang von einer gleichmäßigen Flächenbelastung darstellt, die unmittelbar an die Kugelpole angrenzt. Die zweite Summandengruppe ist eine unendliche Reihe von Lösungen, deren Koeffizienten aus der Bedingung des Verschwindens der Spannungen auf der Kugeloberfläche bestimmt werden, die durch die Lösungen der ersten Gruppe definiert sind. Beide Lösungsanteile sind in verschiedenen Koordinatensystemen angegeben (Kugelkoordinaten, Bipolarkoordinaten), so daß eine numerische Auswertung im gesamten Feld schwierig ist. A.J. Lurje hingegen führt seine Lösung bis zu expliziten Formeln für die Verschiebung, die ebenfalls aus einem festen und einem Reihenanteil besteht. Ausgangspunkt ist die Differentialgleichung für den Verschiebungsvektor, die mit dem bekannten „Drei-Funktionenansatz“ von Papkovich/Neuber gelöst wird.

Eine ausführliche Darstellung und Interpretation der Lösungen ist aufgrund des Umfangs dieser Arbeiten hier nicht möglich. Sie erfolgt in [10].

## 3. Experimentelle Untersuchungen

Aus gegossenen Epoxidharzblöcken (EPILOX EG1) wurden auf einem Kugeldrehautomaten Kugeln mit einem Radius von  $r_0 = 28$  mm herausgedreht. Die Beanspruchung erfolgt während des Erstarrungszyklusses durch 2 parallele Platten, die im Vergleich zur Kugel als ideal starr betrachtet werden können.

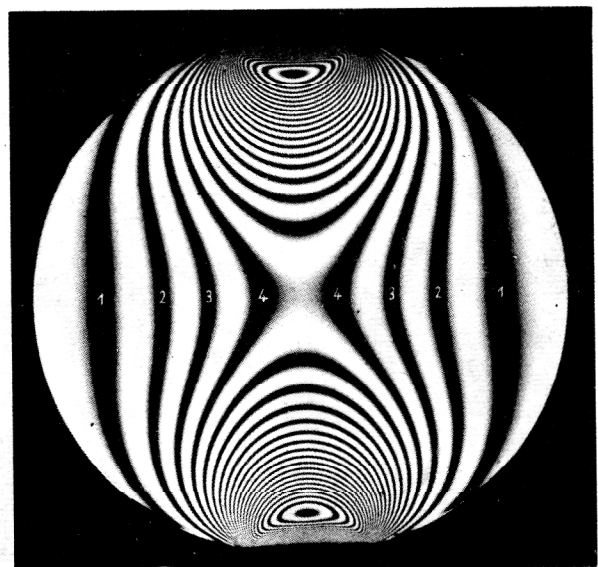
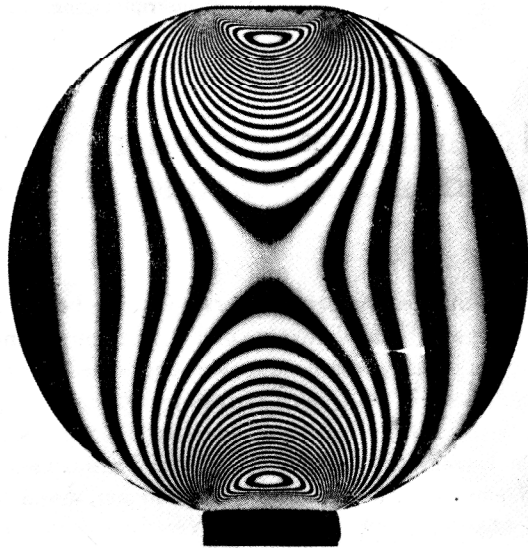
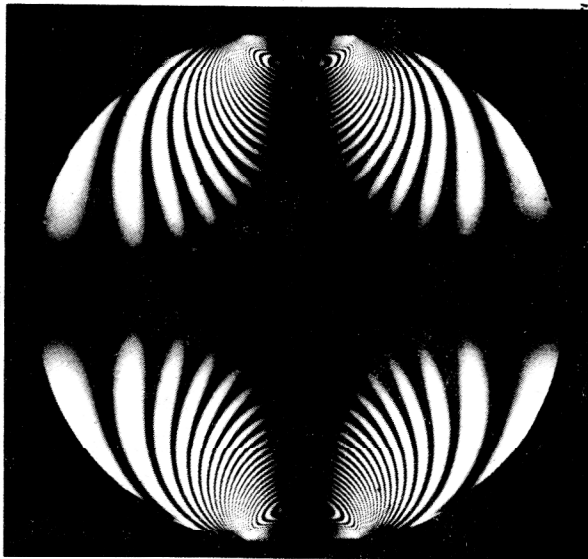


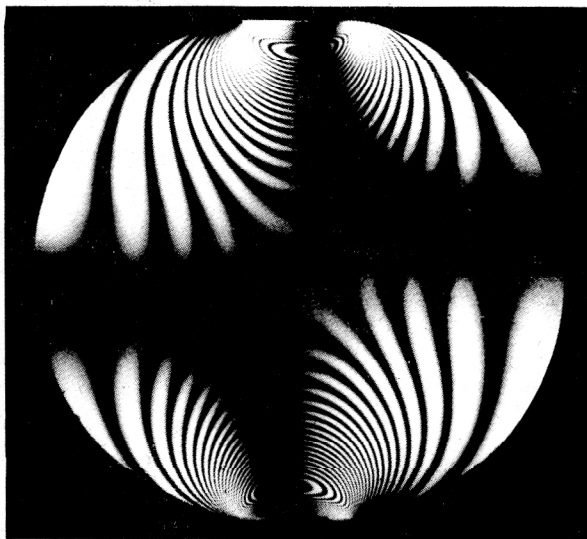
Bild 1  
Isochromaten ganzer Ordnung



**Bild 2**  
Isochromaten halber Ordnung



**Bild 3**  
Isokline  $\bar{\varphi} = 0^\circ$



**Bild 4**  
Isokline  $\bar{\varphi} = 5^\circ$

### 3.1. Spannungen

Nach dem Abkühlen wird die Kugel entlastet und im Fall der polarisationsoptischen Untersuchung so zerschnitten und bearbeitet, daß ein Mittelschnitt bestimmter Dicke bestehen bleibt, der symmetrisch zur die Pole einschließenden Mittelebene liegt. Die Isochromaten stellen dann die Hauptspannungsdifferenzen in dieser Ebene dar, wobei der über die Schnittdicke auftretende Mittelwert dieser Differenz angezeigt wird. Die Bilder 1, 2, 3 und 4 zeigen die Isochromaten der ganzen und halben Ordnung sowie die Isoklinien mit den Parametern  $\bar{\varphi}_0 = 0^\circ$  und  $\bar{\varphi}_1 = 5^\circ$  bei einer Belastung von  $F = 250 \text{ N}$ , einer Schnittdicke von  $d = 4 \text{ mm}$  und einer spannungsoptischen Konstanten von  $S = 0,293 \text{ N/mm}$ .

Während am lastfreien Rand unmittelbar auf die tangentiale Spannung geschlossen werden kann, ist im Inneren der Kugel eine Trennung der Hauptspannungen durch Kopplung mit theoretischen Beziehungen möglich. Dabei erfolgt eine schrittweise Integration der Gleichgewichtsbeziehung längs interessierender Kurven, wobei die Spannungen aus den Isochromaten und den Isoklinien berechnet werden.

Das Gleichgewicht in  $r$ -Richtung lautet ausgedrückt in Zylinderkoordinaten

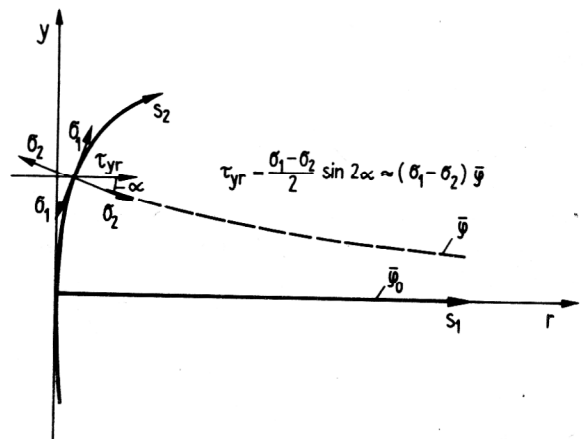
$$\sigma_r - \sigma_\varphi + r \left( \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{yr}}{\partial y} \right) = 0, \quad (1)$$

wobei die  $y$ -Achse durch die Pole der Kugel läuft.

Im vorliegenden Fall erfolgt eine Auswertung in der Äquatorebene, in der aufgrund der Symmetrie in Belastung und Form die  $0^\circ$  Isokline mit der Hauptspannungslinie zusammenfällt, so daß

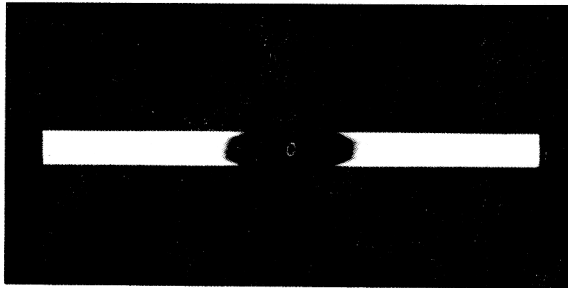
$$\frac{\partial \tau_{yr}}{\partial y} \quad \text{wie Bild 5 zeigt,}$$

auch durch die Hauptspannungsdifferenz in dieser Ebene und die Änderung des Isoklinienparameters ausgedrückt werden kann.



**Bild 5**  
Näherungsweise Darstellung der Schubspannung durch die Hauptspannungsdifferenz und den Isoklinienparameter

$\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  entsprechen den Hauptspannungen  $\sigma_1$  bzw.  $\sigma_2$ , deren Differenz sich aus der im Bild 6 gezeigten Isochromatenaufnahme des Schnitts ermitteln läßt. Der Schnitt wird symmetrisch zur Äquatorebene aus



**Bild 6**  
Isochromaten des Unterschnittes

dem Hauptschnitt herausgetrennt und in y-Richtung durchstrahlt.

Das Gleichgewicht kann nun in folgender Form geschrieben werden

$$\sigma_1 - \sigma_3 + r \left[ \frac{\partial \sigma_1}{\partial r} + (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right] = 0 \quad (2)$$

und ergibt umgestellt und integriert die Hauptspannung  $\sigma_1$  an jeder beliebigen Stelle der Äquatorebene, wobei  $\sigma_{10}$  die Spannung am Beginn des Integrationsintervalls ist.

$$\sigma_1 = \sigma_{10} - \int \left[ \frac{1}{r} (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right] dr \quad (3)$$

Die einfachste numerische Auswertung dieses Integrals erfolgt durch die Rechteckregel, die bei genügend kleinen Schrittweiten bzw. geringer Krümmung der Isokline bereits gute Ergebnisse liefert und zu folgender Beziehung führt.

$$\sigma_1 = \sigma_{10} - \left[ \frac{1}{r} (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\Delta \bar{\varphi}}{\Delta y} \right] \Delta r \quad (4)$$

$\Delta \bar{\varphi}$  ist die Differenz der beiden Isoklinenparameter, ausgedrückt im Bogenmaß.  $\Delta y$  stellt den Abstand der Isoklinen am entsprechenden Punkt und  $\Delta r$  den Abstand der einzelnen Stützpunkte selbst dar. Im vorliegenden Fall wurde  $\Delta \bar{\varphi} = 5^\circ = \text{konst}$  und  $\frac{\Delta r}{r_0} = 0,1$

bis 0,05 gewählt. Die Genauigkeit dieser Berechnung hängt wesentlich davon ab, ob es gelingt, die Abstände der Isokline genau zu ermitteln. Während die im Bild 3 gezeigte  $0^\circ$  Isokline mit den Koordinatenachsen zusammenfällt, ist die  $5^\circ$  Isokline (Bild 4) nur am Rand und an der Krafteinleitungsstelle theoretisch bestimmt. Ihr Verlauf wird an der spannungsoptischen Apparatur selbst durch mehrfache Messungen und einen Vergleich mit der  $85^\circ$  Isokline ermittelt. Eine genaue Bestimmung der Isochromatenordnung im Unterschnitt, die hier nur

zwischen 0 und 0,54 liegt, ist, da die Hauptspannungsrichtungen bekannt sind, durch eine Kompensation nach Sénarmont möglich.

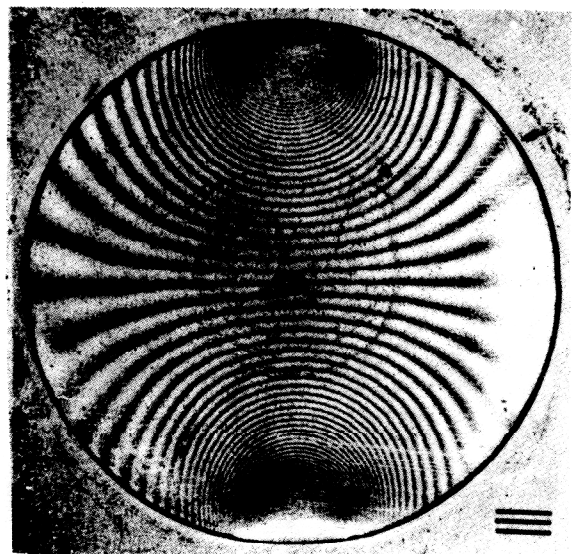
Der Verlauf der nach der beschriebenen Methode ermittelten Spannungen ist im Bild 11 dargestellt.

### 3.2. Verschiebungen

Um die Verschiebungen im gesamten Feld ermitteln zu können, wurde aus dem unter Last abgekühlten Modell ein Schnitt entnommen, bei dem eine Fläche mit der Symmetrieebene der Kugel identisch ist. Auf diese Ebene wird ein Phasenkreuzraster mit 50 Linien/mm nach dem in [11] dargestellten Verfahren von einem Bezugsraster übertragen, so daß eine völlige Übereinstimmung der Rasterteilungen im ursprünglichen Zustand garantiert ist. Anschließend erfolgt ein Rücktempern der während des Erstarrungszyklusses entstandenen Verformungen durch Erwärmung des Schnittes auf  $130^\circ \text{C}$ . Das Isothetenfeld entsteht in einer spektroskopischen Apparatur im Kontakt mit dem Bezugsraster, wobei die Möglichkeit der Multiplikation der Isotheten durch Auswertung höherer Beugungsordnungen besteht. In [12] ist die Theorie der Streifenentstehung für den Fall der Moiréstreifenmultiplikation, die auf Beugungs- bzw. Interferenzerscheinungen basiert, beschrieben.

Die Bilder 7 bis 10 zeigen die Isotheten der Längs- bzw. Querverschiebung in den Multiplikationsstufen  $k = 1$  und  $k = 2$ . Das entspricht einer Empfindlichkeit von 50 bzw. 100 Linien/mm oder 20 bzw.  $10 \mu\text{m}/\text{Isothete}$ .

Besondere Schwierigkeiten bei der Versuchsdurchführung bereitet die Ausrichtung und Fixierung des Schnittes auf dem Bezugsraster. Geringste Verdrehungen überlagern ein starkes Verdrehmoiré, das eine Auswertung erschwert. Dieses Problem wurde durch einen Stift gelöst, der genau im Mittelpunkt des Schnittes die Verbindung zum Bezugsraster realisiert und auf den Isothetenbildern als schwarzer Punkt im Zentrum sichtbar ist. Die Bohrung dazu wird bereits während des Arbeitsganges der Rasterübertragung eingebracht und ausgerieben. In der Apparatur kann nun die Symmetrie durch Drehung um



**Bild 7**  
Isotheten der Längsrichtung  $K = 1$

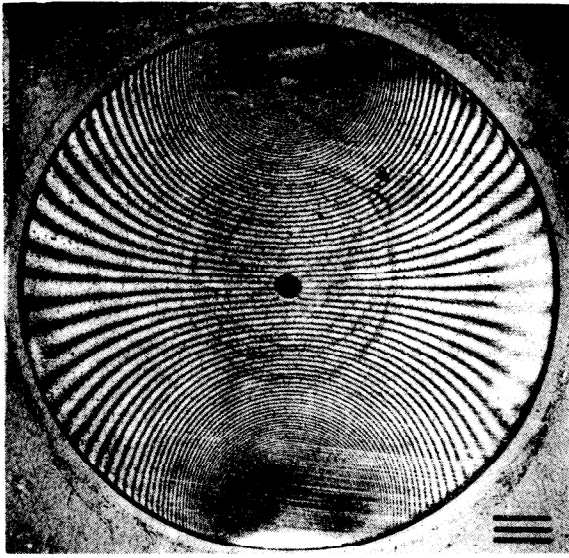


Bild 8  
Isochromen der Längsrichtung  $K = 2$

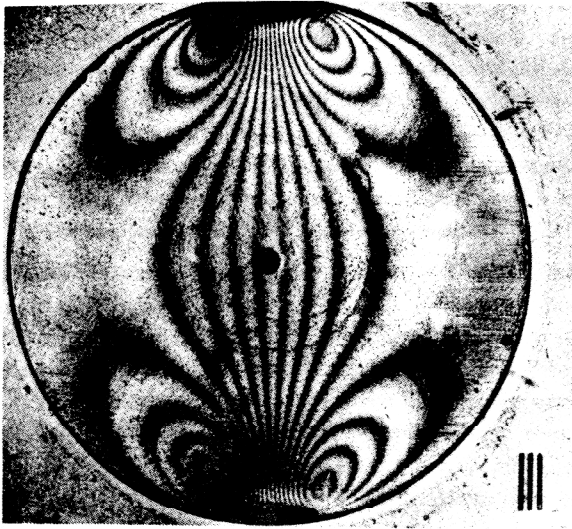


Bild 9  
Isochromen der Querrichtung  $K = 1$

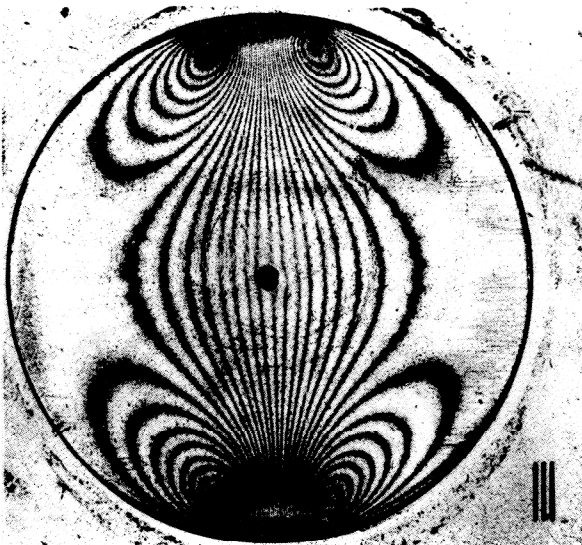


Bild 10  
Isochromen der Querrichtung  $K = 2$

den Mittelpunkt, der selbst keine Verschiebung erfährt, eingestellt werden. Nach der fotografischen Aufnahme auf feinkörnigem maßbeständigem Planfilm werden die Isochromen unter einem Mikroskop ausgemessen. Die normierten Ergebnisse sind in den Bildern 12 und 13 dargestellt, wobei der Elastizitätsmodul, wie übrigens auch die spannungsoptische Konstante, mittels eines auf reine Biegung belasteten Balkens im Eichversuch bestimmt wurde. Der Elastizitätsmodul beträgt  $E = 16,8 \text{ N/mm}^2$ . Außerdem wurde völlige Inkompressibilität vorausgesetzt. Tatsächlich liegt die Querdehnzahl aber zwischen 0,49 und 0,5 (vgl. [13]).

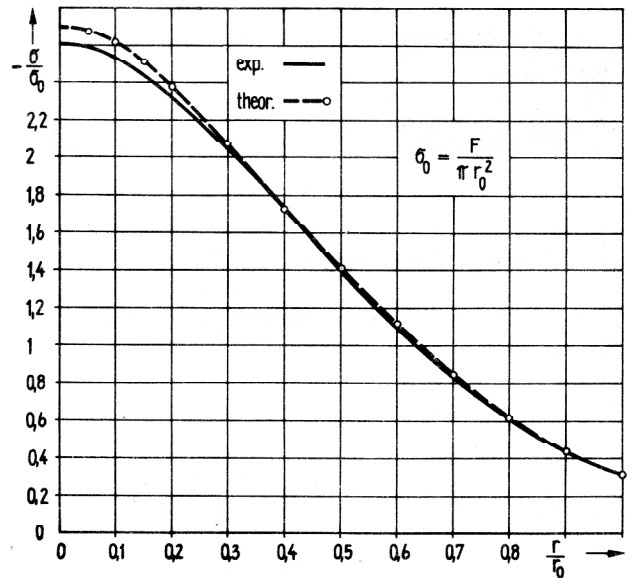


Bild 11  
Spannungen in der Äquatorebene

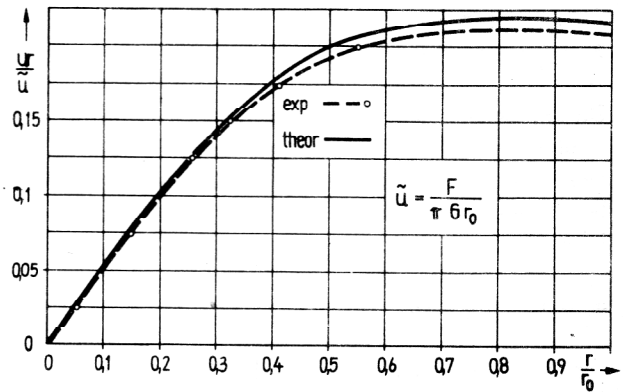


Bild 12  
Verschiebungen in der Äquatorebene

#### 4. Interpretation der Ergebnisse

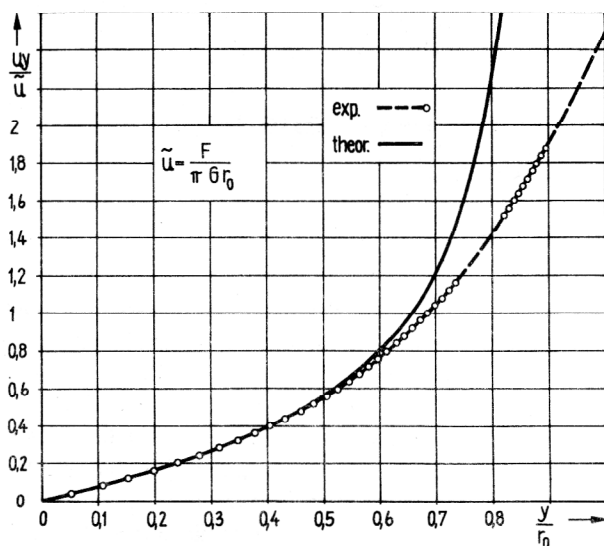
Die in den Bildern 11 bis 13 dargestellten experimentellen und theoretischen Spannungs- bzw. Verschiebungsverläufe lassen folgendes erkennen.

In der Äquatorebene stimmen die Spannungen sehr gut überein. Spürbare Abweichungen, die 4% aber nicht überschreiten, treten erst unmittelbar in der Nähe des Mittelpunktes auf. Ihre Ursachen liegen in der starken Krümmung der  $5^\circ$  Isokline.

Hier ist das beschriebene Integrationsverfahren auch bei

$\frac{\Delta r}{r_0} = 0,05$  nicht mehr in der Lage, Werte hoher





**Bild 13**  
Verschiebungen auf der Achse zwischen den Polen

Genauigkeit zu liefern. Die Anwendung der Trapez- oder Simpsonschen Regel führt sicher zu einer Verbesserung in diesem Bereich. Bild 4 zeigt, daß die  $5^\circ$  Isokline nicht in den Pol der Kugel, sondern bedingt durch die Abplattung etwas daneben einläuft. Auch diese Abweichung wirkt sich unmittelbar am Mittelpunkt aus. Darüber hinaus spielen natürlich zufällige Fehler eine Rolle. Im Bereich der starken Krümmung wirken sich geringe Verdrehungen der Polarisationsfilter oder des Modells sofort auf die Lage der Isokline aus.

Der Vergleich der Querverschiebung in der Äquator Ebene (Bild 12) zeigt ebenfalls eine gute Übereinstimmung. Die Abweichungen nehmen, ausgehend vom Mittelpunkt, ständig zu und erreichen am letzten Meßpunkt

etwa 4 %. Von  $\frac{r}{r_0} = 0,55$  bis 1 ist keine Isothete mehr

vorhanden, so daß der Verlauf der Verschiebung aus den davorliegenden Punkten extrapoliert werden muß. Eine Eingrenzung ergibt sich aus der folgenden bzw. zurück-

liegenden Isothete, die beide bis  $\frac{r}{r_0} = 1$  nicht sichtbar

werden. Die Ursache der ständig zunehmenden Abweichungen kann zum einen in einer fehlerhaft bestimmten Elastizitätskonstanten  $E$  liegen, zum anderen folgt eine geringere Verschiebung, wenn die Verformungen beim Tempern nicht völlig zurückgehen. Meßtechnisch wurde nachgewiesen, daß die bleibende Verschiebung der Pole etwa 2 % beträgt. Natürlich wirkt sich das auch auf die Verschiebung in Querrichtung aus.

Bild 13 zeigt, daß zwischen den theoretischen und experimentellen Verschiebungen in Längsrichtung, auf der Achse zwischen den Polen, große Differenzen in einem weiten Bereich um die Krafteinleitungsstelle auftreten. Dafür gibt es im wesentlichen zwei Ursachen.

Während die theoretische Lösung unmittelbar am Angriffspunkt der Einzelkräfte eine unendliche Verschiebung dieser Punkte ergibt, kann die reale Kugel, bei der die Krafteinleitung über parallele Platten erfolgt, natürlich nur wenig zusammengedrückt werden. Die Abplattung besitzt im vorliegenden Fall einen Durchmesser von

etwa 8 mm, so daß sich eine völlige Veränderung der Krafteinleitung und der damit verbundenen Verschiebungen in diesem Bereich ergibt. Nach dem Prinzip von De Saint Venant, das besagt, daß in genügender Entfernung von der Lastangriffsstelle die Art der Krafteinleitung für den Spannungszustand keine Rolle spielt, verringern sich die Unterschiede der theoretischen und experimentellen Verschiebungen mit zunehmendem Abstand von der Krafteinleitung. Sie betragen bei  $\frac{r}{r_0} = 0,7$  noch etwa 15 % und sind bei  $\frac{r}{r_0} = 0,5$  praktisch verschwunden.

Die großen im Bereich der Krafteinleitung auftretenden Verformungen lassen vermuten, daß sich das Material hier nicht mehr linear elastisch verhält und damit ein Vergleich mit der Lurjeschen Verschiebungslösung für die elastische Kugel ohnehin nicht exakt ist. Gestützt wird diese These von der Tatsache, daß nach ausreichendem Tempern des Schnittes eine relativ große Restverformung bleibt, die sich größtenteils auf die Bereiche der Abplattung konzentriert.

Das Erstarrungsverfahren ist unter Beachtung bestimmter Einschränkungen an Krafteinleitungsstellen gut geeignet, räumliche Spannungs- und Dehnungszustände experimentell zu ermitteln.

#### LITERATUR

- [1] Oppel, G.: Polarisationsoptische Untersuchung räumlicher Spannungs- und Dehnungszustände. Forsch.-Ing.-Wes. 7 (1936) S. 240 – 248.
- [2] Durelli, A.J., Parks, V.J.: Analiz deformacij s ispal'zovanjem muara (Übers. aus dem Engl.) izdatel'stvo mir 1974.
- [3] Ullmann, K.: Anwendung des Moire-Effekts zur Experimentellen Dehnungsanalyse. Diss. Techn. Hochschule Karl-Marx-Stadt 1969.
- [4] Neuber, H.: Beiträge für den achssymmetrischen Spannungszustand. Diss. München 1932.
- [5] Sternberg, E., Rosenthal, F.: The Elastic Sphere under Concentrated Loads. Journal of Applied Mechanics (1952) H. 12 S. 413 – 421.
- [6] Weber, C.: Kugel mit normalgerichteten Einzelkräften. ZAMM 32 (1952) H6 S. 186 – 190.
- [7] Lurje, A.J.: Räumliche Probleme der Elastizitätstheorie. Akademie Verlag Berlin 1963.
- [8] Hiramatzu, Y., Oka, Y.: Determination of the tensile Strength of Rock by a compression test of an irregular test piece. Int. J. Rock Mech. Min. Sci 3 (1966) S. 89 – 99.
- [9] Stieß, M.: Die Druckbeanspruchung von elastischen und inelastischen Kugeln bis zum Bruch. Diss. Karlsruhe 1976.
- [10] Ullmann, K., Stockmann, M.: Test eines Auswertverfahrens für rotationsymm. Spannungszustände aus Isotheten am Beispiel der diametral gedrückten Kugel (in Vorbereitung).
- [11] Jantschke, B.: Optische Grundlagen und Versuchstechnik der Moiréstreifenmultiplikation im Durchlicht. Wiss. Z. d. Techn. Hochschule Karl-Marx-Stadt 18 (1976) H. 3, S. 265 – 271.
- [12] Naumann, J., Jantschke, B.: Eine Theorie zur Moiréstreifenmultiplikation bei zwei überlagerten Gittern. Wiss. Z. d. Techn. Hochsch. Karl-Marx-Stadt 19 (1977) H. 3, S. 305 – 316.
- [13] Ullmann, K., Stockmann, M.: Auswertgenauigkeit von Moirémessungen nach dem Isothetenverfahren. 20-th Conference of ESA in Karlovy Vary 1982.

Anschrift des Verfassers:

Dipl.-Ing. Martin Stockmann  
Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt  
Sektion Maschinen-Bauelemente  
9010 Karl-Marx-Stadt PSF 964