

Berechnung der turbulenten Rohreinlaufströmung mit einem Zweiparametermodell

Detlev Ullrich

1. Einleitung

Im vorliegenden Beitrag wird über die numerische Berechnung der drallfreien Einlaufströmung in ein gerades Kreisrohr mit Hilfe des k - ϵ -Modells [1] berichtet. Rohreinlaufvorgänge treten vor allem im chemischen Apparatebau auf, wo die hydrodynamischen Leitungen meist relativ kurz sind. Naturgemäß besitzen dabei turbulente Strömungen das größte Interesse, die durch vorgelagerte Einbauten bereits einen erhöhten Turbulenzgrad im Eintrittsquerschnitt aufweisen. Der Einfluß unterschiedlicher Turbulenzgrade auf die Entwicklung der turbulenten Wandgrenzschicht im Rohr ist von Grützner [2] experimentell untersucht worden. Die vorliegende Untersuchung zielt darauf ab, die Reaktion des k - ϵ -Modells auf Veränderungen des Turbulenzgrades im Zustrom an einer speziellen Strömung zu testen und, in Abhängigkeit von der Übereinstimmung mit den Messungen von Grützner, weitere Rückschlüsse auf den turbulenten Strömungsverlauf zu ziehen.

2. Ausgangsgleichungen und Randbedingungen

Die Impuls-Grenzschichtgleichung und die Kontinuitätsgleichung der zeitlich gemittelten turbulenten Strömung im Rohr lauten

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left[y \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - y \overline{u'v'} \right] \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial (\bar{v} y)}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Die in (1) auftretende Reynoldssche Spannung $-\rho \overline{u'v'}$ wurde mit Hilfe des k - ϵ -Modells bestimmt, das unter Grenzschichtbedingungen die folgende Form hat:

$$-\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (3)$$

$$\mu_t = c_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon} \quad (4)$$

$$\bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left[y \frac{\mu_t}{\rho \sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right] + \frac{\mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - \epsilon \quad (5)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left[y \frac{\mu_t}{\rho \sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right] + c_1 \frac{\mu_t \epsilon}{\rho k} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - c_2 \frac{\epsilon^2}{k} \quad (6)$$

Als Modellkonstanten wurden die in [1] angegebenen Werte $C_\mu = 0,09$, $C_1 = 1,44$, $C_2 = 1,92$, $\sigma_k = 1,0$ und $\sigma_\epsilon = 1,3$ verwendet.

Da die Modellgleichungen (5) und (6) nur in der vollturbulenten Region Gültigkeit besitzen, wurde μ_t im wandnahen Bereich $R_c \leq y \leq R$, $R_c = 0,99 R$, aus dem Reibungsansatz von Van Driest [3] bestimmt:

$$\mu_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|; \quad l = 0,4 (R - y) \left(1 - e^{-\frac{(R - y) u^* \rho}{26 \mu}} \right), \quad (7)$$

wobei $u^* = \left| \frac{\tau_w}{\rho} \right|$ die Wandschubspannungsgeschwindigkeit ist. Aus der Stetigkeit von μ_t an der Übergangsstelle R_c und der näherungsweise Gleichheit von Turbulenzenergieproduktion und -dissipation

$$\mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = \epsilon \quad (8)$$

lassen sich Randbedingungen für (5) und (6) herleiten [4], während die Haftbedingung $\bar{u}(x, R) = \bar{v}(x, R) = 0$ als Randwert für (1) verwendet wird.

In Übereinstimmung mit [2] wurde im Eintrittsquerschnitt eine konstante Geschwindigkeit $\bar{u}_0 = u_D$ angenommen. Bei festgehaltener Reynoldszahl $Re = \frac{\rho u_D D}{\mu} = 160\,000$ untersuchte Grützner eine „ungestörte“ Rohreinlaufströmung mit einem Anfangsturbulenzgrad $Tu_0 = 0,43\%$ und eine „gestörte“ mit einem Turbulenzgrad $Tu_0 = 10\%$, der durch ein Ringgitter erzeugt wurde. Setzt man isotrope Turbulenz voraus, so ergeben sich im Eintrittsquerschnitt die Turbulenzenergien

$$k_0 = \frac{3}{2} Tu_0^2 u_D^2 = 2,8 \cdot 10^{-5} u_D^2 \quad (\text{ungestörte Zuströmung bzw. } k_0 = 1,5 \cdot 10^{-2} u_D^2 \quad (\text{gestörte Zuströmung}).$$

Angaben über die Dissipationsrate bzw. einen Turbulenzmaßstab, wie sie z. B. Hanel [5] zur numerischen Untersuchung eines turbulenten Freistrahls vorlagen, finden sich in [2] nicht. Nach [6] beträgt der Mischungsweg l einer Gitternachlaufströmung rund 0,1 Stabdurchmesser, und es gilt

$$\epsilon_0 = 0,17 \frac{k_0^{3/2}}{l} \quad (9)$$

Aus der in [2] angegebenen Konstruktion des Ringgitters kann daher $\epsilon_0 = 1,7 \cdot 10^{-2} \frac{u_D^3}{R^3}$ für die gestörte Zuströmung bzw. $\epsilon_0 = 1,3 \cdot 10^{-6} \frac{u_D^3}{R}$ für die ungestörte gefolgert werden.

3. Numerisches Verfahren

Die Bilanzgleichungen (1), (5) und (6) haben die Gestalt

$$\bar{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left[y A \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = S, \quad (10)$$

worin φ für \bar{u} , k bzw. ϵ steht. A ist die zu φ gehörende Austauschgröße, S das Quellglied. Zur numerischen Auflösung von (10) wurde ein Differenzenverfahren entwickelt [4], mit dem \bar{u} , k und ϵ in den Gitterpunkten (x_i, y_j) , $i = 1, \dots, I$, $j = 1, \dots, J$ eines rechtwinkligen Netzes und \bar{v} in den Intervallmittelpunkten $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$ näherungsweise bestimmt werden können. Die Approximation erfolgt durch Integration über Teilvolumina und führt auf die Differenzenformel

$$\begin{aligned} & O_{i,j} \varphi_{i,j+1} + [L_{i,j} - O_{i,j} - U_{i,j}] \varphi_{i,j} + U_{i,j} \varphi_{i,j-1} \\ &= -O_{i,j} \varphi_{i-1,j+1} + [L_{i,j} + O_{i,j} + U_{i,j}] \varphi_{i-1,j} - U_{i,j} \varphi_{i-1,j-1} \\ & \quad + S_{i-1/2,j} (x_i - x_{i-1}) y_j (y_{j+1} - y_{j-1}) \end{aligned} \quad (11)$$

mit den Koeffizienten

$$L_{i,j} = \bar{u}_{i-1/2,j} y_j (y_{j+1} - y_{j-1})$$

$$O_{i,j} = \left(\frac{1}{2} \bar{v}_{i-1/2,j+1/2} - \frac{1}{y_{j+1} - y_j} A_{i-1/2,j+1/2} \right) y_{j+1/2} (x_i - x_{i-1}) \quad (12)$$

$$U_{i,j} = \left(-\frac{1}{2} \bar{v}_{i-1/2,j-1/2} - \frac{1}{y_j - y_{j-1}} A_{i-1/2,j-1/2} \right) y_{j-1/2} (x_i - x_{i-1}).$$

Bei gegebenen Funktionswerten $\varphi_{i-1,j}$ und Randbedingungen ist (11) ein tridiagonales Gleichungssystem in den $\varphi_{i,j}$, dessen Koeffizienten gemäß (12) iterativ aus der gewonnenen Lösung zu ermitteln sind.

Der in (1) auftretende Druckgradient wird zunächst durch den geschätzten Wert $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$ ersetzt. Dann wird aus

(11) eine Geschwindigkeitsverteilung $\tilde{u}_{i,j}$ erhalten, die einen im allgemeinen nicht verschwindenden Massendefekt

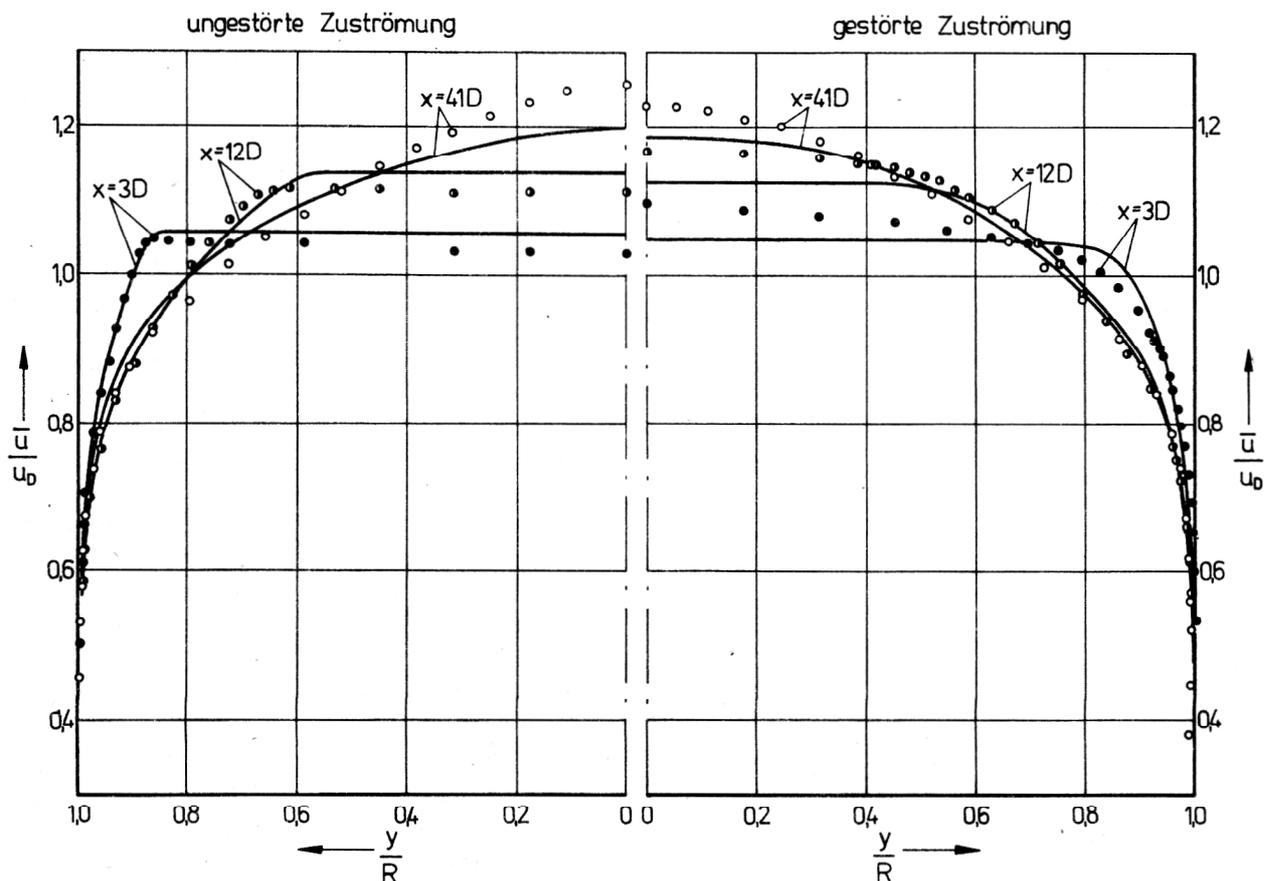
$$\dot{m}_i = -\frac{1}{4} \rho \sum_{j=1}^{I-1} (\tilde{u}_{i,j} - \bar{u}_{i-1,j} + \tilde{u}_{i,j+1} - \bar{u}_{i-1,j+1}) (y_{j+1}^2 - y_j^2) \quad (13)$$

aufweist. Der Fehler wird kompensiert, indem man innerhalb des Iterationszyklus die folgenden beiden Korrekturformeln anwendet:

$$\bar{u}_{i,j} = \tilde{u}_{i,j} + \frac{2 \dot{m}_i}{R^2 \rho} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\tilde{\partial \bar{p}}}{\partial x} - \frac{2 u_D}{R^2 (x_i - x_{i-1})} \dot{m}_i \quad (15)$$

Bild 1
Profile der mittleren Axialgeschwindigkeit
— Rechnung (k- ϵ -Modell), o Experiment [2]



Die Radialgeschwindigkeit \bar{v} kann nun durch Summation von (2) erhalten werden.

Für die Berechnungen im Rohreinlauf wurde ein Gitternetz mit 27 Punkten in radialer und c. a. 3000 Punkten in axialer Richtung verwendet. In beiden Richtungen wurden variable, in der Nähe der Wand und des Eintrittsquerschnittes sehr feine Gitterteilungen gewählt. Speicherprobleme ergaben sich nicht, da (11) fortlaufend für alle x_i , $i=2, \dots, I$ gelöst wird und die Werte $\varphi_{i-k, j}$, $k \geq 2$ für die weitere Rechnung ohne Belang sind. Auf einer Rechenanlage vom Typ BESM-6 sind hierfür bis zu 8 min CPU-Zeit erforderlich.

4. Ergebnisse

Die Gegenüberstellung der errechneten Profile der Axialgeschwindigkeit (Bild 1) zeigt eine gute Übereinstimmung von Theorie und Experiment. Bei der links dargestellten ungestörten Einlaufströmung sind in den ersten beiden Profilen eine wandnahe Grenzschicht und eine

Kernströmung deutlich zu unterscheiden. Diese Unterteilung verwischt, wenn der Zustrom bereits einen hohen Turbulenzgrad aufweist (rechts). Bei $x = 41D$ hat die Grenzschicht in beiden Fällen die Rohrachse erreicht. Das voll ausgebildete Profil stellt sich, unabhängig von der Zustromturbulenz, bei etwa $x = 60D$ ein. Die Auftragung der Axialgeschwindigkeit in ausgewählten Radien über der Lauflänge (Bild 2, Bild 3) zeigt ein absolutes Geschwindigkeitsmaximum auf der Rohrachse bei $x = 28D$, das bei gestörter Zuströmung lediglich schwächer ausgeprägt ist. Ebenso wie die Messungen von Weir, Priest und Sharan [7], [8], belegen die Meßwerte in beiden Darstellungen, daß im Rohreinlauf größere Geschwindigkeiten auftreten als in der ausgebildeten Strömung. Das berechnete Maximum tritt jedoch offenbar nach zu kurzen Lauflängen ein. Bild 4 stellt die Turbulenzenergieprofile in unterschiedlichen Lauflängen einander gegenüber. Der Vergleich mit den Messungen fällt zufriedenstellend aus, wobei insbesondere im Kernbereich die Zuverlässigkeit der Schätzung von ϵ im Eintrittsquerschnitt zum Ausdruck kommt. Die Profile

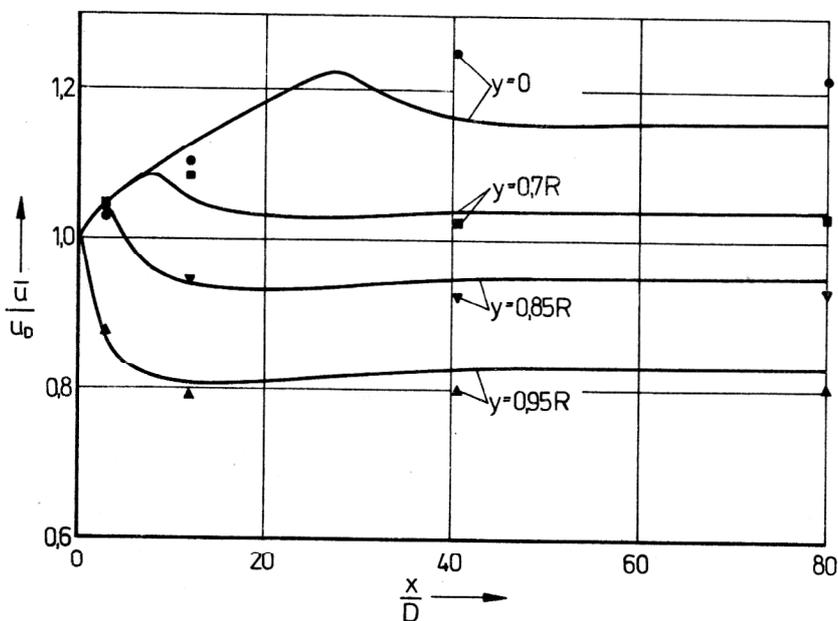


Bild 2
Axialgeschwindigkeit über der Lauflänge,
ungestörte Zuströmung, $Tu_0 = 0,43\%$

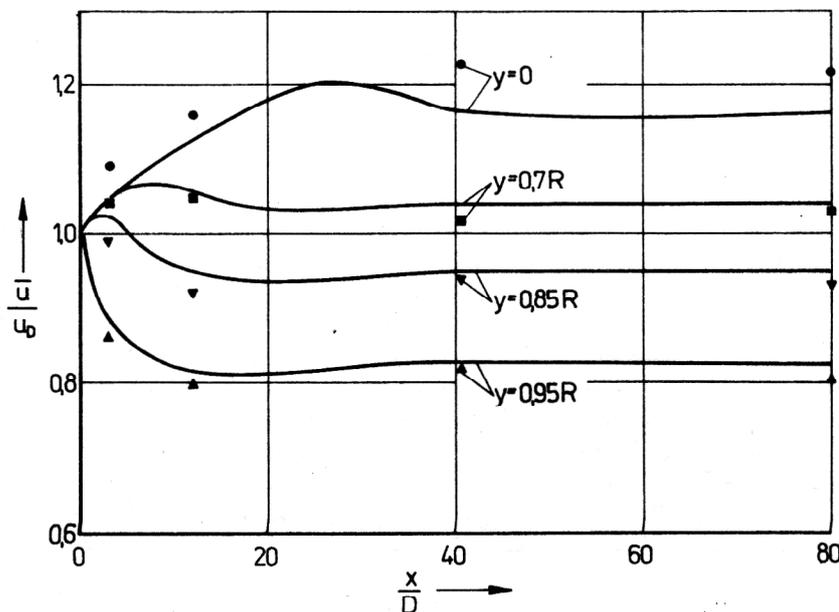


Bild 3
Axialgeschwindigkeit über der Lauflänge,
gestörte Zuströmung, $Tu_0 = 10\%$

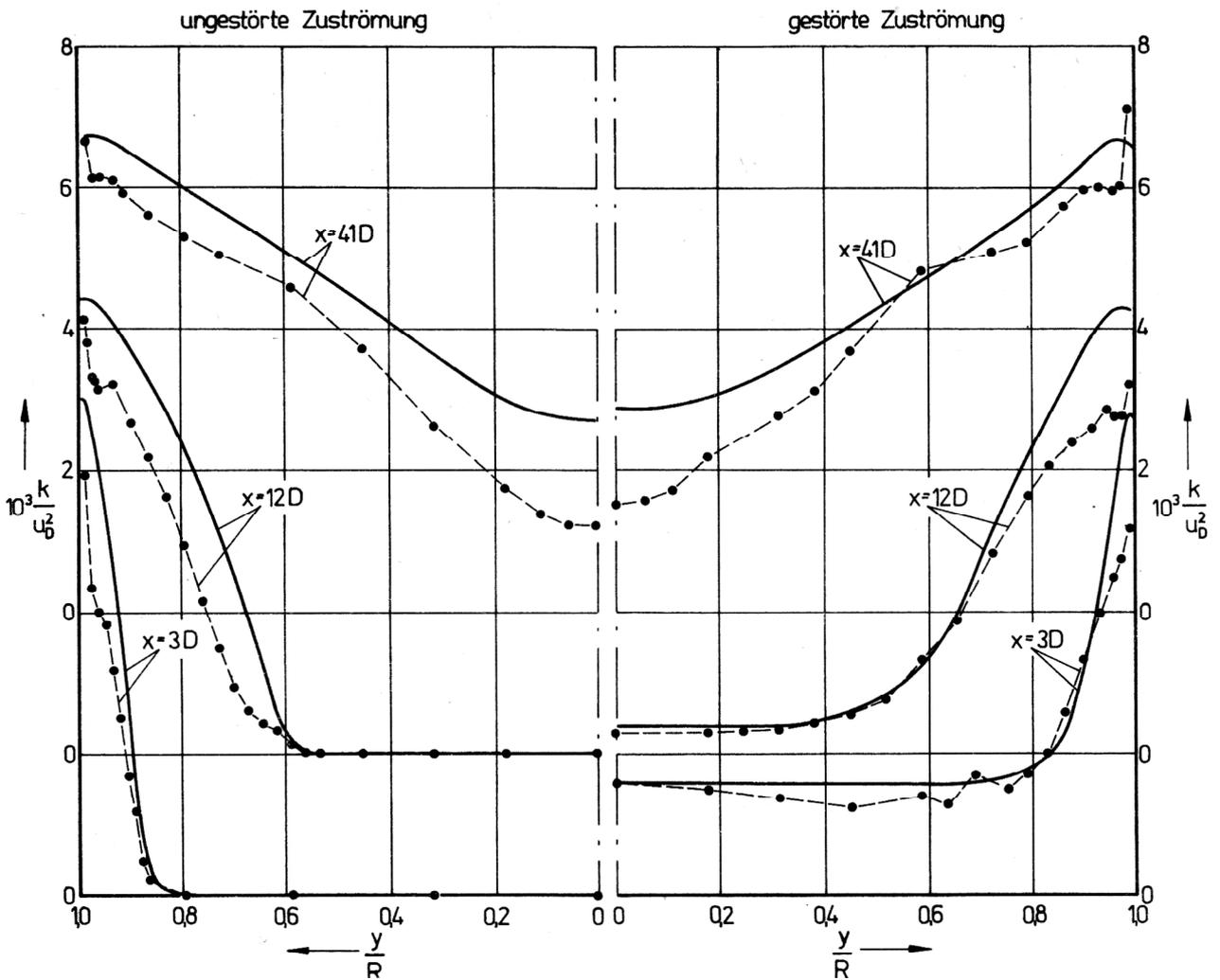


Bild 4
Profile der Turbulenzenergie
— Rechnung (k-ε-Modell),
o Experiment [2]

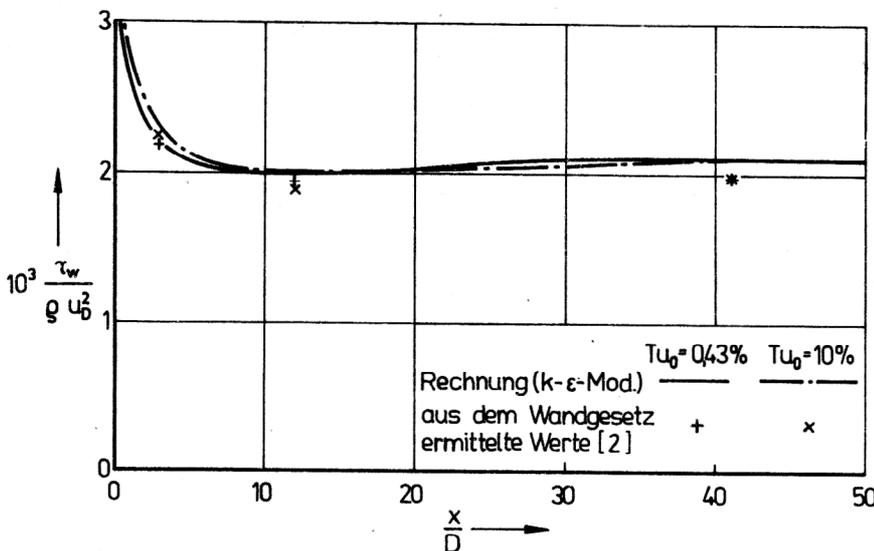


Bild 5
Verlauf der Wandschubspannung τ_w

„ $x = 41 D$ “ zeigen einen Verlauf, der sich nur noch wenig vom ausgebildeten Zustand unterscheidet. Wie bereits in den Bildern 2 und 3 zu erkennen war, erfolgt dieser Übergang insgesamt zu rasch. Bild 5 enthält eine Auftragung von τ_w über der Lauflänge. Es zeigt, daß der Turbulenzgrad der Kernströmung nur geringen Einfluß auf die Wandschubspannung und damit auf die wandnahe Strömung hat. Im Vergleich mit den Messungen erweist sich, daß der Reibungsansatz (7) in Verbindung mit dem k-ε-Modell ein zuverlässiges Mittel zur Bestimmung des wandnahen Geschwindigkeitsfeldes ist.

5. Schlußfolgerungen

Das Auftreten eines Geschwindigkeitsmaximums in der turbulenten Rohreinlaufströmung kann durch die Berechnungen mit dem k-ε-Modell sowohl bei hohem wie bei niedrigem Turbulenzgrad im Zustrom bestätigt werden.

Abweichungen der errechneten Geschwindigkeitsprofile von den Messungen treten erst gegen Ende der Grenzschichtentwicklung auf und deuten auf einen zu raschen Übergang in die voll ausgebildete Strömung hin.

Die zuverlässige Vorgabe von k und ϵ im Eintrittsquerschnitt erlaubt es, die Turbulenzenergieverteilung im Strömungsgebiet mit zufriedenstellender Genauigkeit zu bestimmen. Die Kopplung des k - ϵ -Modells mit einem Reibungsansatz von Van Driest ermöglicht es, die Wandschubspannung exakt zu ermitteln und das wandnahe Geschwindigkeitsfeld zu bestimmen.

Die wichtigsten Bezeichnungen

R	Rohrradius
$D = 2 R$	Rohrdurchmesser
x, y	axiale bzw. radiale Koordinate
\bar{u}, \bar{v}	mittlere Axial- bzw. Radialgeschwindigkeit
u', v'	Geschwindigkeitsschwankungen
ρ	Dichte
\bar{p}	statischer Druck
μ	molekulare Zähigkeit
$u_D = \frac{2}{R^2} \int_0^R \bar{u} y dy$	Durchflußgeschwindigkeit
$Re = \frac{D u_D \rho}{\mu}$	Reynoldszahl der Rohrströmung
μ_t	Turbulenzviskosität
k	Turbulenzenergie
ϵ	Dissipationsrate der Turbulenzenergie
$Tu_o = \frac{1}{u_D^2} \frac{\overline{u'^2}}{2}$	Turbulenzgrad im Eintrittsquerschnitt
l	Mischungsweg
τ_w	Wandschubspannung
$u^* = \left(\frac{ \tau_w }{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$	Wandschubspannungsgeschwindigkeit

LITERATUR

- [1] Launder, B. E., Spalding, D. B.: The Numerical Computation of Turbulent flows. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 3 (1974), S. 269.
- [2] Grützner, H.: Über einige Ergebnisse der Untersuchung einer turbulenten Rohreinlaufströmung bei ungestörter und gestörter Zuströmung. Beiträge zur theoretischen und experimentellen Untersuchung der Turbulenz. Herausgeg. v. M. Hoffmeister, Akademie-Verlag Berlin, 1976.
- [3] Van Driest, E. R.: On Turbulent Flow Near a Wall. Journ. Aeronaut. Sc. 23 (1956), S. 1007.
- [4] Ullrich, D.: Theoretische Untersuchung von Zweiparametermodellen der Turbulenz und ihre Anwendung auf Rohreinlaufströmungen. Diss. A, Berlin, 1981.
- [5] Hanel, B.: Die Berechnung der Mischungszone eines axial-symmetrischen turbulenten Freistrahls. Luft- und Kältetechnik 12 (1976), S. 193.
- [6] Prandtl, L., Wieghardt, K.: Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz. Nachr. d. Akad. Wissensch. Göttingen, Math.-Phys.-Klasse, 1945, S. 6.
- [7] Weir, J., Priest, A. J., Sharan, V. K.: The Effect of Inlet Disturbances on Turbulent Pipe Flow, Journ. Mech. Engng. Sci. 16 (1974) 211.
- [8] Sharan, V. K.: The Effect of Inlet Disturbances on Turbulent Boundary Layer Development in Parallel Pipe, ZAMP 25 (1974), 659.

Anschrift des Verfassers:

Dr. rer. nat. Detlev Ullrich
 Bauakademie der DDR
 Institut für Heizung, Lüftung
 und Grundlagen der Bautechnik
 1125 Berlin
 Plauener Straße