

# Optimale Punkte für die Spannungsberechnung bei finiten 3D-Verschiebungselementen

Harald Berger, Johannes Altenbach

## 1. Einleitung

Bei finiten Elementen, die auf der Grundlage der Deformationsmethode abgeleitet werden, stellen die verallgemeinerten Verschiebungen die primären Variablen bei der Energieminimierung dar. Die Spannungen werden elementweise aus den Verschiebungsableitungen über das Materialgesetz ermittelt und sind somit gegenüber den Verschiebungen mit einem Genauigkeitsverlust behaftet. Von Zienkiewicz wurde darauf hingewiesen, daß es bei den häufig verwendeten isoparametrischen Elementen ausgezeichnete Elementpunkte gibt, in denen die Spannungen einen höheren Genauigkeitsgrad aufweisen, als in allen anderen Punkten [1].

Mit Hilfe theoretischer Untersuchungen hat Zlamal bei isoparametrischen Elementen das Phänomen der Superkonvergenz der Verschiebungsableitungen in den Gauss-Integrationspunkten nachgewiesen [2]. Die Spannungen erreichen in diesen Punkten die gleiche Konvergenzordnung wie die Verschiebungen, wobei die entscheidende Einschränkung gilt, daß die Elemente eine parallelogrammförmige Geometrie aufweisen müssen. Die Untersuchungen konzentrieren sich im wesentlichen auf das ebene 8-Knoten-Element, bei dem die Superkonvergenz in den  $2 \times 2$  Gauss-Punkten eintritt, d. h. in den Punkten, die die Stützstellen eines reduzierten Integrationschemas darstellen [3]. In diesem Zusammenhang wird betont, daß die Superkonvergenz bei den betrachteten quadratischen Elementen stets in den  $2 \times 2$  Gauss-Punkten vorliegt, unabhängig davon, ob diese Punkte auch für die numerische Integration der Elementsteifigkeitsmatrizen verwendet werden.

Einen mehr pragmatischen Weg zur Ermittlung geeigneter Punkte für die Spannungsberechnung hat Barlow eingeschlagen [4]. Anhand von ein- und zweidimensionalen Elementen wird ein Algorithmus dargestellt, mit dem es auch für beliebig verzerrte Elemente gelingt, die Punkte zu bestimmen, in denen die Verschiebungsableitungen den gleichen Genauigkeitsgrad wie die Knotenverschiebungen aufweisen. Eine Übertragung dieses Verfahrens auf einfache 3D-Elemente wird in [4] angedeutet.

Im Rahmen der Anwendung des an der TH Magdeburg im Wissenschaftsbereich Festkörpermechanik entwickelten FEM-Programmsystem COSAR/E 80 [5] wurden derartige Untersuchungen für die dort verwendeten 3D-Elemente durchgeführt. Die Besonderheit des Elementkataloges von COSAR/E 80 besteht darin, daß als Basiselement das Hexaeder mit 20 Knoten verwendet wird und alle weiteren Elemente durch Degeneration aus diesem zentralen Element abgeleitet wurden [6] (Bild 1). Ziel

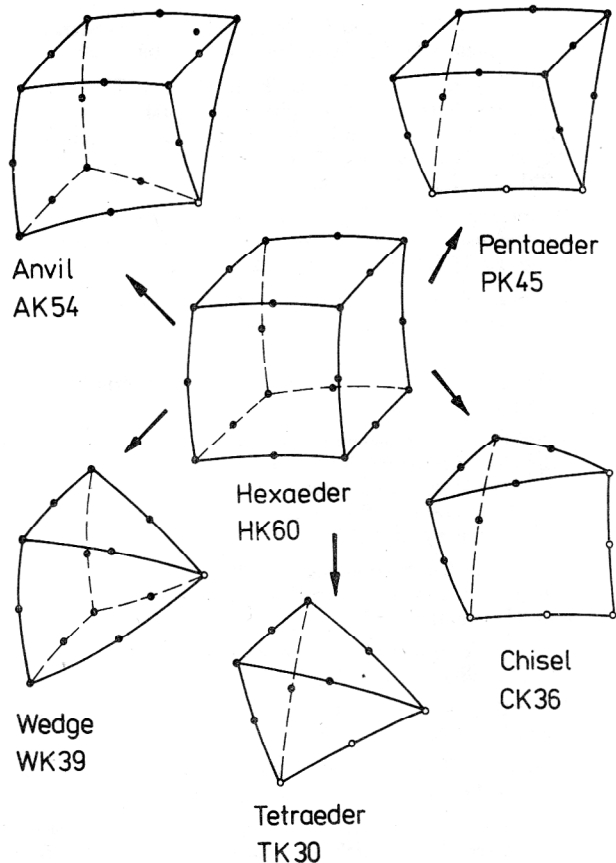


Bild 1  
 3D-Elementkatalog des Programmsystems COSAR/E 80

der Betrachtungen war es deshalb, auch Aussagen zu optimalen Punkten für die Spannungsberechnung bei degenerierten Elementen zu gewinnen.

Der vorliegende Beitrag enthält aufbauend auf den Algorithmus von Barlow theoretische Untersuchungen zur Ermittlung optimaler Punkte für das 20-Knoten-Hexaeder sowie für die degenerierten Elemente, wobei das Verfahren entsprechend modifiziert wird [7]. Ergänzend dazu werden mit Hilfe numerischer Tests vergleichende Aussagen über den Genauigkeitsgrad der Spannungswerte in unterschiedlichen Elementpunkten gewonnen.

## 2. Theoretische Untersuchungen

Bei den im Programmsystem COSAR/E 80 verwendeten 3D-Elementen handelt es sich um isoparametrische Elemente mit quadratischem Verschiebungsansatz und drei Verschiebungsfreiheitsgraden  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) pro Knoten. Die Elementbeschreibung erfolgt in einem krummlinigen lokalen Koordinatensystem  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Die Ansatz-

funktionen sowie Ausführungen zur Ableitung der Elementeneigenschaften sind in [5] und [6] enthalten.

Um bei diesen Elementen jene Punkte zu finden, in denen die Spannungen eine größere Genauigkeit als in allen anderen Punkten aufweisen, kann man von folgender Überlegung ausgehen [4]. Nimmt man an, daß mit isoparametrischen Elementen, deren Verschiebungsansatz ein vollständiges Polynom n-ter Ordnung enthält, Verschiebungsverläufe der Ordnung n+1 approximiert werden sollen, so treten bei den berechneten Knotenverschiebungen nur sehr geringe Genauigkeitsverluste auf, da die verwendeten Ansätze auch noch Glieder höherer Ordnung enthalten. Damit lassen sich die berechneten Knotenverschiebungen näherungsweise gleich den wahren Knotenverschiebungen setzen. Fordert man diese Identität auch von den Verschiebungsableitungen, aus denen sich letztlich die Spannungen ergeben, dann läßt sich feststellen, daß nur in bestimmten Punkten eine Identität besteht. Das sind genau die Punkte, in denen die Spannungen den gleichen Genauigkeitsgrad erreichen wie die zugehörigen Knotenverschiebungen.

Im folgenden wird dieser Algorithmus auf das Hexaederelement HK 60 angewendet. Die Ansatzfunktionen enthalten bei diesem Element ein vollständiges Polynom 2. Grades sowie sieben kubische und drei Terme 4. Grades. Der Verschiebungszustand für jede Komponente  $u_i$  läßt sich somit auch mit Hilfe des Polynomansatzes

$$u_i = [1 \quad \xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3 \quad \xi_1^2 \quad \xi_1 \xi_2 \quad \xi_2^2 \quad \xi_2 \xi_3 \quad \xi_3^2 \quad \xi_3 \xi_1 \quad \xi_1^2 \xi_2 \quad \xi_1 \xi_2^2 \quad \xi_2^2 \xi_3 \quad \xi_2 \xi_3^2 \quad \xi_3^2 \xi_1 \quad \xi_3 \xi_1^2 \quad \xi_1^2 \xi_2 \xi_3 \quad \xi_1 \xi_2^2 \xi_3 \quad \xi_1 \xi_2 \xi_3^2] a_i \quad (1)$$

beschreiben. Der Vektor  $a_i$  enthält die Koeffizienten des Polynoms. Entsprechend der obigen Ausführungen wird angenommen, daß der wahre Verschiebungszustand durch ein vollständiges Polynom 3. Grades repräsentiert wird. Für eine Komponente  $\bar{u}_i$  des wahren Verschiebungszustandes ergibt sich somit der Polynomausdruck

$$\bar{u}_i = [1 \quad \xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3 \quad \xi_1^2 \quad \xi_1 \xi_2 \quad \xi_2^2 \quad \xi_2 \xi_3 \quad \xi_3^2 \quad \xi_3 \xi_1 \quad \xi_1^2 \xi_2 \quad \xi_1 \xi_2^2 \quad \xi_2^2 \xi_3 \quad \xi_2 \xi_3^2 \quad \xi_3^2 \xi_1 \quad \xi_3 \xi_1^2 \quad \xi_1^2 \xi_2 \xi_3 \quad \xi_1 \xi_2^2 \xi_3 \quad \xi_1 \xi_2 \xi_3^2] b_i \quad (2)$$

wobei  $b_i$  wieder die Koeffizienten des Polynoms beinhaltet. Bei dem hier betrachteten HK 60-Element enthält der Polynomansatz für den wahren Verschiebungszustand zufällig die gleiche Anzahl von Termen wie der Elementansatz, was bei Anwendung des Verfahrens auf andere Elemente nicht notwendig der Fall sein muß.

Um zu den Knotenverschiebungen  $v_i$  bzw.  $\bar{v}_i$  zu gelangen, müssen in die Ausdrücke (1) und (2) die lokalen Knotenkoordinaten eingesetzt werden. Man erhält dann

$$v_i = A a_i \quad (3)$$

bzw.

$$\bar{v}_i = B b_i \quad (4)$$

wobei die Knotenvektoren  $v_i$  und  $\bar{v}_i$  die Form

$$v_i^T = [u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, \dots, u_{iL}, \dots, u_{i20}] \quad (5)$$

bzw.

$$\bar{v}_i^T = [\bar{u}_{i1}, \bar{u}_{i2}, \bar{u}_{i3}, \dots, \bar{u}_{iL}, \dots, \bar{u}_{i20}] \quad (6)$$

haben. Die Matrizen A und B ergeben sich durch Einsetzen der lokalen Knotenkoordinaten in die Ansätze (1) und (2) und sind somit vom Format 20 x 20.

Setzt man nun entsprechend der obigen Annahmen die Knotenverschiebungen  $v_i$  und  $\bar{v}_i$  näherungsweise gleich, so ergibt sich zwischen den Koeffizientenvektoren  $a_i$  und  $b_i$  der Zusammenhang

$$A a_i = B b_i \quad (7)$$

bzw.

$$a_i = A^{-1} B b_i \quad (8)$$

Die Ableitungen der Verschiebungen nach den globalen kartesischen Koordinaten  $x_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), die für die Berechnung der Verzerrungen und damit der Spannungen erforderlich sind, lassen sich mit Hilfe der inversen Jacobischen Matrix  $J^{-1}$  aus den Ableitungen nach den lokalen Koordinaten  $\xi_i$  ermitteln.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial u_i}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial u_i}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Die Jacobische Matrix ist nur eine Funktion der Elementgeometrie und unabhängig von den Verzerrungen. Daraus ergibt sich, daß die Verzerrungen und damit die Spannungen für beide Ansätze identisch sind, wenn die Verschiebungsableitungen nach den lokalen Koordinaten gleich sind.

Für die Ableitungen der Verschiebungen  $u_i$  erhält man

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial u_i}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial u_i}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2\xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 & 0 & \xi_3 & 2\xi_1 \xi_2 & \xi_2^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \xi_1 & 2\xi_2 & \xi_3 & 0 & 0 & \xi_1^2 & 2\xi_1 \xi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 & 2\xi_3 & \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3^2 & 2\xi_3 \xi_1 & \xi_2 \xi_3 & 2\xi_1 \xi_2 \xi_3 & \xi_2^2 \xi_3 & \xi_2 \xi_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\xi_2 \xi_3 & \xi_3^2 & 0 & 0 & \xi_1 \xi_3 & \xi_1^2 \xi_3 & 2\xi_1 \xi_2 \xi_3 & \xi_1 \xi_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_2^2 & 2\xi_2 \xi_3 & 2\xi_3 \xi_1 & \xi_1^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1^2 \xi_2 & \xi_1 \xi_2^2 & 2\xi_1 \xi_2 \xi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_i \quad (10)$$

und für die Ableitungen der Verschiebungen  $\bar{u}_i$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2\xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 & 0 & \xi_3 & 2\xi_1 \xi_2 & \xi_2^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \xi_1 & 2\xi_2 & \xi_3 & 0 & 0 & \xi_1^2 & 2\xi_1 \xi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 & 2\xi_3 & \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3^2 & 2\xi_3 \xi_1 & \xi_2 \xi_3 & 3\xi_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\xi_2 \xi_3 & \xi_3^2 & 0 & 0 & \xi_1 \xi_3 & 0 & 3\xi_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_2^2 & 2\xi_2 \xi_3 & 2\xi_3 \xi_1 & \xi_1^2 & \xi_1 \xi_2 & 0 & 0 & 0 & 3\xi_3^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_i \quad (11)$$

Um die Ausdrücke (10) und (11) vergleichen zu können, wird in (10)  $\mathbf{a}_i$  durch  $\mathbf{b}_i$  mit Hilfe von (8) ersetzt. Dazu ist zunächst die  $20 \times 20$ -Matrix  $\mathbf{A}$  zu invertieren und mit  $\mathbf{B}$  zu multiplizieren. Das Produkt  $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$  liefert eine Matrix, die in den ersten 17 Spalten einer Einheitsmatrix entspricht. Auf eine ausführliche Darstellung der einzelnen Matrizen wird hier aus Platzgründen verzichtet. Nach Ausführung der entsprechenden Operationen ergibt sich für (10).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial u_i}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial u_i}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2\xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 & 0 & \xi_3 & 2\xi_1 \xi_2 & \xi_2^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \xi_1 & 2\xi_2 & \xi_3 & 0 & 0 & \xi_1^2 & 2\xi_1 \xi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 & 2\xi_3 & \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3^2 & 2\xi_3 \xi_1 & \xi_2 \xi_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\xi_2 \xi_3 & \xi_3^2 & 0 & 0 & \xi_1 \xi_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_2^2 & 2\xi_2 \xi_3 & 2\xi_3 \xi_1 & \xi_1^2 & \xi_1 \xi_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_i \quad (12)$$

Gleichsetzen von (11) und (12) liefert schließlich die gesuchten Punkte, in denen die Verschiebungsableitungen den gleichen Genauigkeitsgrad wie die Knotenverschiebungen aufweisen. Es ist zu erkennen, daß bis auf die unterstrichenen Terme alle Matrixelemente in (11) und (12) identisch sind. Betrachtet man die drei Richtungsableitungen separat, so liegt zwischen den Verschiebungsableitungen  $\frac{\partial u_i}{\partial \xi_k}$  und  $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \xi_k}$  genau dann Identität vor, wenn für die Koordinate  $\xi_k$  der Wert  $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  eingesetzt wird, während die übrigen Koordinaten einen beliebigen Wert  $c$  ( $-1 \leq c \leq +1$ ) annehmen können (vgl. Tabelle 1). Als optimale Punkte für die Spannungsrechnung, d. h. die Punkte, in denen alle Verschiebungsableitungen gleichzeitig den höchsten Genauigkeitsgrad erreichen, ergeben sich damit gerade die Stützstellen des  $2 \times 2 \times 2$ -Gauss-Integrationschemas

$$\xi_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \xi_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \xi_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**Tabelle 1**

Koordinaten der Flächen, Linien und Punkte, für die die Verschiebungsableitungen in  $\xi_1$ -,  $\xi_2$ - und  $\xi_3$ -Richtung bei den 3D-Elementen des Programmsystems COSAR/E 80 den höchsten Genauigkeitsgrad erreichen (für  $c$  gilt:  $-1 \leq c \leq +1$ )

	$\frac{\partial u_i}{\partial \xi_1}$			$\frac{\partial u_i}{\partial \xi_2}$			$\frac{\partial u_i}{\partial \xi_3}$		
	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$
HK60	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	$c$	$c$	$c$	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	$c$	$c$	$c$	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$
AK54	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1$	$c$	$\pm 1$	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	$c$	$\pm 1$	$c$	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$
	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	$c$	$1$	$c$	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1$	$c$	$1$	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$
PK45	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1$	$c$	$\pm 1$	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	$c$	$\pm 1$	$c$	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$
							$c$	$1$	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$
WK39	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	$c$	$1$	$c$	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1$	$\pm 1$	$\pm 1$	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$
CK36	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1$	$1$	$\pm 1$	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	$c$	$\pm 1$	$c$	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$
TK30	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1$	$1$	$\pm 1$	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1$	$\pm 1$	$1$	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$
							$c$	$-1$	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

Zur Ermittlung entsprechender Punkte bei degenerierten Elementen muß der Algorithmus modifiziert werden. Hier stimmt die Anzahl der in den Ansatzfunktionen enthaltenen Polynomterme nicht mit den Elementknotenanzahlen überein, so daß sich für A keine symmetrische Matrix ergibt und damit keine Inversion möglich ist. Die Ansatzfunktionen enthalten sogar infolge der Zusatzterme noch weitere Polynomglieder 4., 5. und 6. Grades (vgl. [6]).

Den Ausgangspunkt der Untersuchungen bilden deshalb direkt die Ansatzfunktionen  $G_L$ . Anstelle von (1) ergibt sich dann

$$u_i = [G_1, G_2, G_3, \dots, G_L, \dots, G_N] v_i \quad (13)$$

(N – Anzahl der Elementknoten)

so daß jetzt statt  $a_i$  sofort die Knotenfreiwerte auftreten. Für (3) steht formal

$$v_i = I v_i \quad (14)$$

(I – Einheitsmatrix vom Format  $N \times N$ ).

Analog zu (7) werden jetzt (14) und (4) gleichgesetzt

$$I v_i = B b_i \quad (15)$$

bzw.

$$v_i = I^{-1} B b_i = B b_i. \quad (16)$$

In (10) stehen dann ausgehend von (13) direkt die Ableitungen der Ansatzfunktionen nach den lokalen Koordinaten

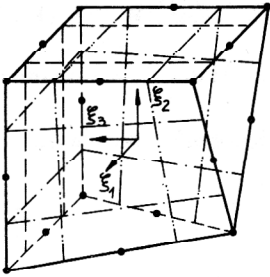
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial u_i}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial u_i}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial \xi_1}, & \frac{\partial G_2}{\partial \xi_1}, & \frac{\partial G_3}{\partial \xi_1}, & \dots, & \frac{\partial G_L}{\partial \xi_1}, & \dots, & \frac{\partial G_N}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial G_1}{\partial \xi_2}, & \frac{\partial G_2}{\partial \xi_2}, & \frac{\partial G_3}{\partial \xi_2}, & \dots, & \frac{\partial G_L}{\partial \xi_2}, & \dots, & \frac{\partial G_N}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial G_1}{\partial \xi_3}, & \frac{\partial G_2}{\partial \xi_3}, & \frac{\partial G_3}{\partial \xi_3}, & \dots, & \frac{\partial G_L}{\partial \xi_3}, & \dots, & \frac{\partial G_N}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} v_i \quad (17)$$

Durch Einsetzen von (16) in (17) und Gleichsetzen mit (11) erhält man die gesuchten Punkte. Die Ermittlung der zugehörigen Koordinaten erweist sich als aufwendiger numerischer Prozeß. Im folgenden werden deshalb ohne weitere Angaben zu den entstehenden Matrizen die Ergebnisse für alle degenerierten 3D-Elemente, die im Elementkatalog von COSAR/E 80 enthalten sind (vgl. Bild 1), mitgeteilt.

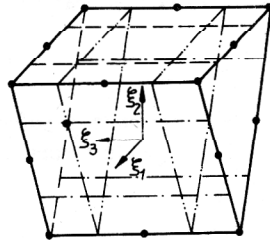
Bei der Berechnung der gesuchten Punkte werden auch hier die drei Richtungsableitungen zunächst separat betrachtet. Dabei zeigt sich, daß im Gegensatz zum HK 60-Element, wo die geforderte Identität für die einzelnen Richtungsableitungen jeweils in zwei Schnittflächen erfüllt ist, bei degenerierten Elementen diese Identität nur noch entlang bestimmter Linien oder in einzelnen Punkten vorliegt. In Tabelle 1 sind für alle untersuchten 3D-Elemente die Koordinatenwerte zusammengestellt, für die die Verschiebungsableitungen in den einzelnen Koordinatenrichtungen die gleiche Genauigkeit erreichen wie die Knotenverschiebungen. Im Bild 2 sind die entsprechenden Linien und Punkte bei den degenerierten Elementen eingezeichnet.

Aus den durchgeführten theoretischen Untersuchungen lassen sich zwei wesentliche Aussagen ableiten (vgl. Tabelle 1 und Bild 2):

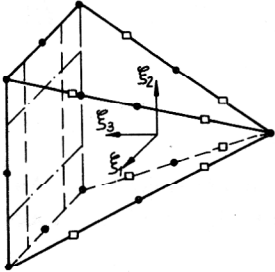
– Bei degenerierten Elementen liegen die Punkte, in denen die Verschiebungsableitungen den höchsten Genauigkeitsgrad aufweisen, ausschließlich auf der Elementoberfläche.



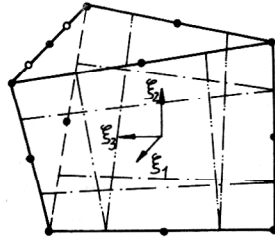
AK 54



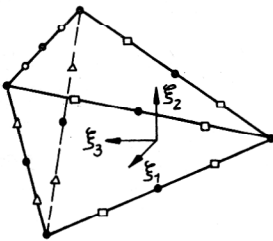
PK 45



WK 39



CK 36



TK 30

$$\begin{aligned} \text{---} \circ & \frac{\partial u_i}{\partial \xi_1} \\ \text{---} \triangle & \frac{\partial u_i}{\partial \xi_2} \\ \text{---} \square & \frac{\partial u_i}{\partial \xi_3} \end{aligned}$$

**Bild 2**

Degenerierte 3D-Elemente mit Kennzeichnung der Linien und Punkte, für die die Verschiebungsableitungen in  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ - und  $\xi_3$ -Richtung den höchsten Genauigkeitsgrad im Element erreichen

– Im Gegensatz zum HK 60-Element gibt es bei degenerierten Elementen keine Punkte, in denen alle Verschiebungsableitungen gleichzeitig den höchsten Genauigkeitsgrad erreichen.

Es entsteht damit die Frage, welche Punkte bei degenerierten Elementen für die Spannungsberechnung am geeignetsten sind. Da infolge der Transformation (9) in die Berechnung jeder Spannungskomponente jeweils die Verschiebungsableitungen nach allen lokalen Koordinaten eingehen, erscheint es nicht sinnvoll, die unterschiedlichen Spannungskomponenten in unterschiedlichen Punkten zu berechnen. Wie beim HK 60-Element spielt auch bei den degenerierten Elementen der Koordinatenwert  $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  eine besondere Rolle, so daß es aus

Gründen einer einheitlichen Elementbehandlung nahe liegt, hier ebenfalls die Stützstellen des  $2 \times 2 \times 2$ -Gauss-Integrationsschemas als Punkte für die Spannungsberechnung zu verwenden. Inwieweit diese Vorgehensweise gerechtfertigt ist, muß mit Hilfe numerischer Tests untersucht werden. Für eine Reihe von Beispielen wurden deshalb Berechnungen durchgeführt, die Aufschluß über die Genauigkeit der Spannungswerte in unterschiedlichen Elementpunkten sowohl bei HK 60- als auch bei

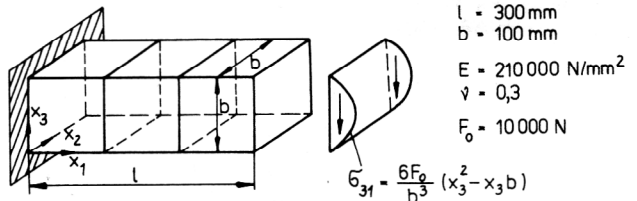
degenerierten Elementen geben. Im nächsten Abschnitt werden für ausgewählte Testbeispiele die erhaltenen Ergebnisse mitgeteilt.

### 3. Numerische Tests

Um zu einer Aussage über den unterschiedlichen Genauigkeitsgrad der Spannungen im Element zu gelangen, wurden bei den untersuchten Beispielen die Spannungswerte in den  $2 \times 2 \times 2$  Gauss-Punkten, den  $3 \times 3 \times 3$  Gauss-Punkten und den Knotenpunkten berechnet. Die numerische Integration der Elementsteifigkeitsmatrizen erfolgte dabei in jedem Falle mit der  $3 \times 3 \times 3$ -Gauss-Punkt-Formel.

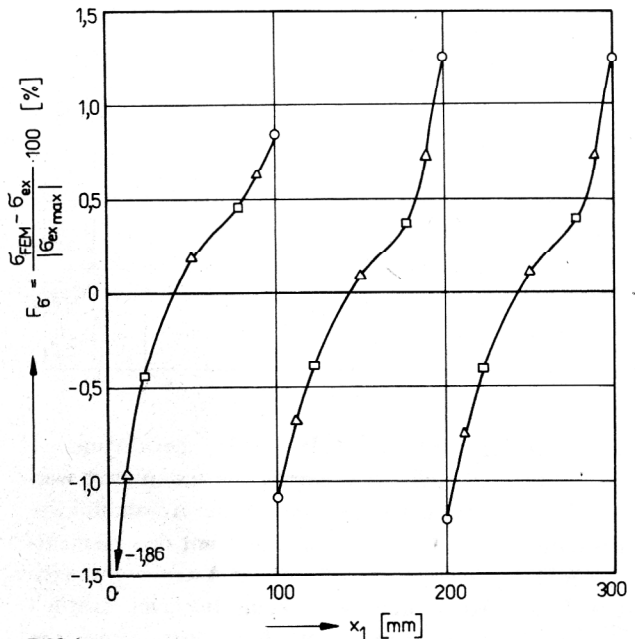
#### Testbeispiel 1:

Der in Bild 3 dargestellte eingespannte räumliche Balken unter Querkraftbelastung wurde zunächst mit drei würfelförmigen HK 60-Elementen vernetzt. Die analytische Lösung [8] liefert einen kubischen Verschiebungszustand, der mit den verwendeten quadratischen Ansätzen nur näherungsweise wiedergegeben werden kann. Folglich sind auch die Spannungen fehlerbehaftet. Im Bild 4



**Bild 3**

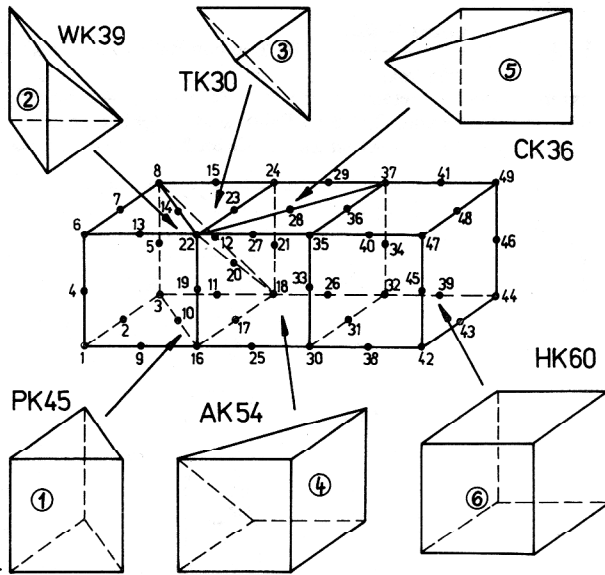
Eingespannter räumlicher Balken unter Querkraftbelastung und Vernetzung mit 3 HK 60-Elementen



**Bild 4**

Fehler in den Biegespannungen  $\sigma_{11}$  für unterschiedliche Elementpunkte bei Vernetzung des Balkens mit 3 HK 60-Elementen

- $\square$   $2 \times 2 \times 2$  Gauss-Punkte
- $\triangle$   $3 \times 3 \times 3$  Gauss-Punkte
- $\circ$  Knotenpunkte



**Bild 5**  
Vernetzung des Balkens mit 5 verschiedenen degenerierten Elementen und 1 HK 60-Element

**Tabelle 2**

Fehler  $F_G = \frac{\sigma_{FEM} - \sigma_{ex}}{\sigma_{ex \max}} \cdot 100\%$  in den Biegespannungen für unterschiedliche Elementeckpunkte bei Vernetzung des Balkens entsprechend Bild 5 (\* Fehlerwert ist größer als im Knotenpunkt, \*\* Fehlerwert ist kleiner als im  $2 \times 2 \times 2$  Gauss-Punkt)

El.-Nr. (El.-Typ)	$2 \times 2 \times 2$ Gauss-Pkte.	$3 \times 3 \times 3$ Gauss-Pkte.	Knotenpunkte (Knoten-Nr.)	
1 (PK 45)	-1,249	-2,229	-3,662 (6)	
	-1,481	-2,419	-0,443 (22)	
	-0,066	0,083	-0,907 (8)	
	-0,628	-0,802	3,070 (1)	
	1,688	2,295		
	1,575	2,219		
	0,257	-0,198**	-1,015 (16)	
	0,143	-0,176	-0,659 (3)	
	2 (WK 39)	-4,490*	-0,824**	-4,076 (18)
		2,212	0,801**	
-1,794		-1,749**		
0,299		0,668		
0,203		-1,939	-5,583 (22)	
0,606		-0,834	-24,924 (8)	
0,640		-1,738	-3,022 (16)	
1,210		1,554	4,712 (3)	
3 (TK 30)	4,711	5,440	5,844 (24)	
	5,207	5,629		
	2,443	3,512		
	4,295	5,003		
	1,828	2,686	4,775 (22)	
	3,680	4,177		
	-3,713	-8,939	-20,217 (18)	
3,198*	2,797**	-0,971 (8)		
4 (AK 54)	-1,146*	-2,162	0,375 (22)	
	1,052*	2,175		
	0,587	1,134	2,099 (35)	
	0,703	0,870	0,734 (37)	
	0,402	0,880	1,759 (16)	
	-0,052	0,322	1,402 (18)	
	-0,558	-1,291	-2,705 (30)	
	-0,781*	-0,721**	0,525 (32)	
5 (CK 36)	3,060	4,518	6,665 (32)	
	4,465	5,731		
	-1,028	-1,681	2,515 (37)	
	0,187	-0,702		
	0,108	-0,157	0,550 (18)	
	1,323*	0,821**		
	-0,729*	-0,397**	0,482 (24)	
	-0,055	-0,502	-1,528 (22)	
6 (HK 60)	-0,289	-0,388	-0,421 (35)	
	-0,530	-1,261	-2,590 (36)	
	0,403	0,878	1,691 (47)	
	0,445	0,618	0,840 (49)	
	0,288	0,641	1,247 (30)	
	0,531	0,795	1,089 (32)	
	-0,402	-0,429	-0,635 (42)	
	-0,477	-0,895	-1,725 (44)	

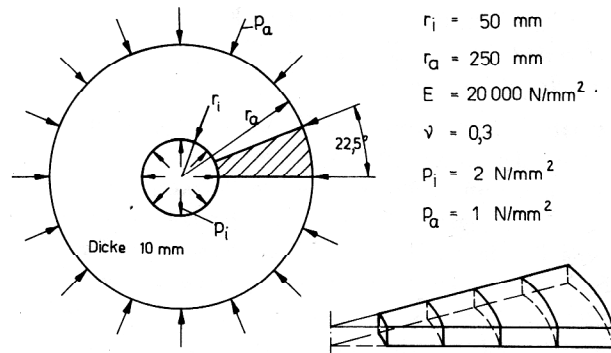
ist die Fehlerverteilung in den Elementen für die Biegespannungen  $\sigma_{11}$  angegeben. Als Bezugsspannung wurde die maximale Biegespannung, d. h. der Wert an der Einspannstelle, verwendet. Die Auswertung erfolgte für die Elementeckknoten entlang der Kante  $x_2 = 0, x_3 = 100$  und für die dieser Kante am nächsten gelegenen Gauss-Punkte. Deutlich ist die Abstufung der Spannungsgenauigkeit in den unterschiedlichen Elementpunkten zu erkennen. Während die Knotenpunkte die schlechtesten Werte liefern, wird insgesamt in den  $2 \times 2 \times 2$  Gauss-Punkten die beste Genauigkeit erreicht. Abgesehen von den mittleren Punkten liegen die Spannungsfehler in den  $3 \times 3 \times 3$  Gauss-Punkten gerade dazwischen.

Der gleiche Balken wurde entsprechend Bild 5 mit allen in COSAR/E 80 verfügbaren degenerierten Elementen und einem HK 60-Element vernetzt. Die Fehler in den Biegespannungen  $\sigma_{11}$  sind für ausgewählte Elementpunkte in Tabelle 2 zusammengestellt, da infolge der Lage der Gauss-Punkte bei den degenerierten Elementen eine geeignete grafische Darstellung nicht möglich ist. Es sind für jedes Element die Fehler für die Spannungen in allen  $2 \times 2 \times 2$  Gauss-Punkten und in den dazu am nächsten gelegenen  $3 \times 3 \times 3$  Gauss-Punkten und Eckknoten angegeben. Zur Orientierung stehen in Klammern die Nummern der betreffenden Knoten.

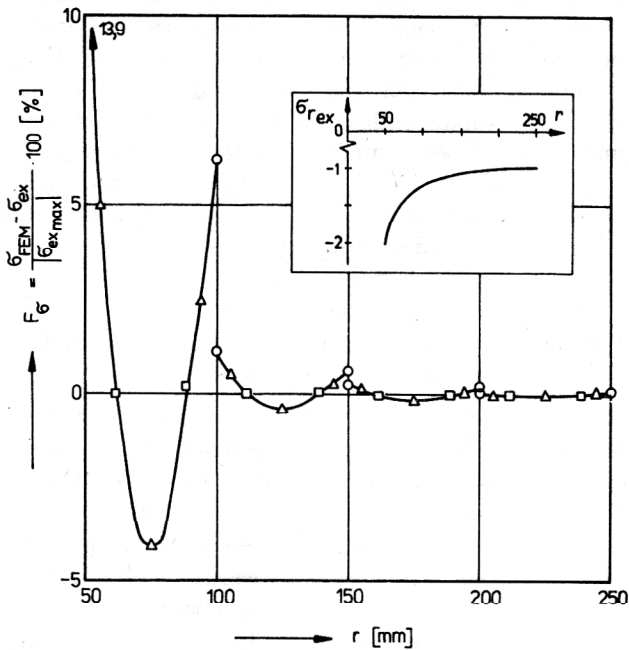
Auch bei den degenerierten Elementen zeigt sich, daß die  $2 \times 2 \times 2$  Gauss-Punkte in der Regel die besten Spannungswerte liefern. Nur die in Tabelle 2 mit \* gekennzeichneten Fehlerwerte sind größer als die der zugehörigen Knotenpunkte. Die Genauigkeit der Spannungen in den  $3 \times 3 \times 3$  Gauss-Punkten liegt im allgemeinen zwischen der in den  $2 \times 2 \times 2$  Gauss-Punkten und den Knotenpunkten.

**Testbeispiel 2:**

Berechnet wurde eine Kreisringscheibe unter Innen- und Außendruck, wobei zunächst die Vernetzung eines Sektors wieder ausschließlich mit HK 60-Elementen erfolgte (Bild 6). Im Gegensatz zum Testbeispiel 1 kamen hier gekrümmte Elemente zum Einsatz. Der exakte Spannungsverlauf weist einen nach innen ansteigenden Gradienten auf. Im Bild 7 sind die Fehler in den Radialspannungen  $\sigma_r$  für die betrachteten Elementpunkte dargestellt. Als Bezugsspannung wurde der Betrag von  $\sigma_r$  am Innenradius verwendet. Infolge der äquidistanten Elementein-

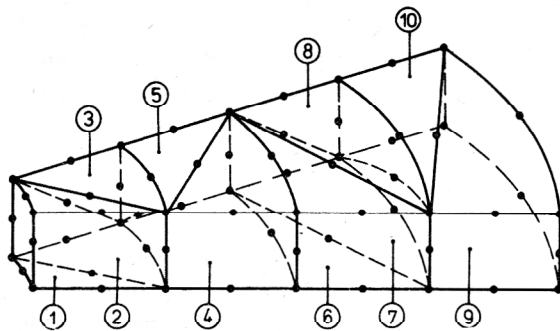


**Bild 6**  
Kreisringscheibe unter Innen- und Außendruck und Vernetzung eines Sektors mit 4 HK 60-Elementen



**Bild 7**  
Fehler in den Radialspannungen  $\sigma_r$  für unterschiedliche Elementpunkte bei Vernetzung des Kreisringsektors mit 4 HK 60-Elementen

- 2 x 2 x 2 Gauss-Punkte
- △ 3 x 3 x 3 Gauss-Punkte
- Knotenpunkte



**Bild 8**  
Vernetzung des Kreisringsektors mit 10 degenerierten Elementen und Angabe der Elementnummern

teilung in radialer Richtung werden auf Grund des starken Spannungsgradienten am Innenrand die Fehler am größten.

Die Spannungsfehlerverteilung in den Elementen bestätigt bei diesem Beispiel noch deutlicher, daß die Spannungen in den 2 x 2 x 2 Gauss-Punkten den höchsten Genauigkeitsgrad erreichen, während die Knotenpunkte die schlechtesten Werte liefern. Für die Ringspannungen ergeben sich qualitativ die gleichen Aussagen.

Als zweite Variante wurde der Kreisringsektor mit degenerierten Elementen vernetzt (Bild 8). Dabei wurde zweimal die beim Balken verwendete Netzkonfiguration benutzt, allerdings ohne das HK 60-Element. In Tabelle 3 sind für die Elemente 1 bis 5 für ausgewählte Punkte die Fehler in den Radialspannungen angegeben. Die aufgeführten Werte für die 3 x 3 x 3 Gauss-Punkte und die Knotenpunkte beziehen sich wieder auf die Punkte, die am nächsten an den 2 x 2 x 2 Gauss-Punkten liegen. Die Knotennumerierung entspricht für die ersten fünf Elemente der des Balkens.

**Tabelle 3**

$$\text{Fehler } F_{\sigma} = \frac{\sigma_{FEM} - \sigma_{cx}}{\sigma_{ex \max}} \cdot 100 \% \text{ in den Radialspannungen für}$$

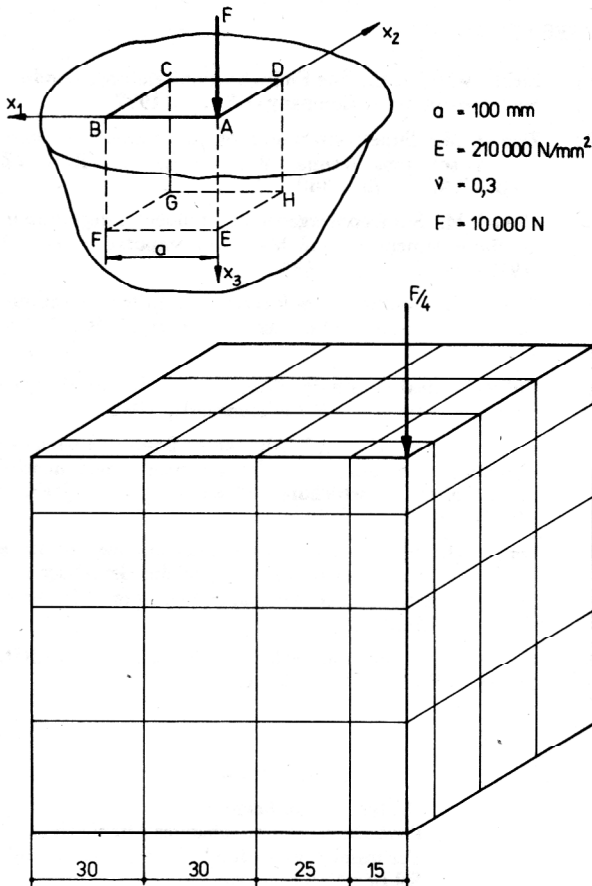
unterschiedliche Elementpunkte bei Vernetzung des Kreisringsektors entsprechend Bild 8 (\* Fehlerwert ist größer als im Knotenpunkt, \*\* Fehlerwert ist kleiner als im 2 x 2 x 2 Gauss-Punkt)

El.-Nr. (El.-Typ)	2 x 2 x 2 Gauss-Pkte.	3 x 3 x 3 Gauss-Pkte.	Knotenpunkte (Knoten-Nr.)
1 (PK45)	0,054	2,007	6,937 (6)
	5,538	6,762	
	1,495	-0,285 **	4,708 (22)
	-1,332	2,494	1,272 (8)
	-0,026	1,986	7,047 (1)
	5,325	6,784	
	1,716	-1,075 **	4,417 (16)
2 (WK39)	-1,827 *	2,138	0,070 (3)
	1,541	1,395 **	2,084 (18)
	0,090	0,993	
	2,188 *	2,415	
	0,269	1,202	
	0,269	-0,746 **	-1,261 (22)
	-0,427	2,358	11,416 (8)
3 (TK30)	0,639	0,412 **	10,779 (16)
	-0,571 *	2,001	-0,443 (3)
	1,972 *	1,810 **	1,252 (24)
	1,604 *	1,662	
	1,075	1,206	
	-0,237	0,072 **	
	1,200	0,302 **	1,479 (22)
4 (AK54)	0,286	-0,409	
	0,607	0,905	1,708 (18)
	-1,189	0,677 **	12,550 (8)
	-0,242 *	0,059 **	0,133 (22)
	-0,076	0,070 **	
	0,005	0,043	-0,067 (35)
	0,001	-0,071	-0,449 (37)
5 (CK36)	0,017	0,624	1,716 (16)
	0,085	0,352	0,216 (18)
	-0,051	0,188	0,538 (30)
	0,127	0,707	1,965 (32)
	0,022	0,297	0,632 (32)
	0,339	0,421	
	-0,209	0,258	-0,297 (37)
	-0,261	0,117 **	
	-0,037	0,110	0,433 (18)
	0,463	0,516	
	0,546	1,078	1,934 (24)
	0,363	-0,306	-2,609 (22)

Bezüglich der Bewertung der Spannungsfehler ergeben sich die gleichen Aussagen wie beim Testbeispiel 1. Eine Fehlerbetrachtung in den Ringspannungen liefert analoge Ergebnisse.

### Testbeispiel 3:

Um auch Probleme mit extremen Belastungsfällen in die Untersuchungen einzubeziehen, wurde der bekannte Halbraum mit Einzellast als Berechnungsbeispiel gewählt. Die Vernetzung eines herausgeschnittenen Würfels erfolgte ausschließlich mit HK 60-Elementen (Bild 9). An den Schnittflächen ABFE und AEHD wurden Symmetrierandbedingungen realisiert und an den übrigen Schnittflächen aus der analytischen Lösung [8] entnommene Verschiebungswerte an den Knoten vorgeschrieben. In Bild 10 sind die berechneten Spannungen  $\sigma_{33}$  für Schnittlinien durch die 2 x 2 x 2 Gauss-Punkte, die 3 x 3 x 3 Gauss-Punkte und für die Knoten entlang der Kante AE im Vergleich zur analytischen Lösung aufgetragen. Die verwendeten Gauss-Punkte sind die am nächsten an der Kante AE liegenden. Auch im Bereich des extremen Spannungsgradienten, der durch das gewählte Netz nicht ausreichend wiedergegeben werden kann, zeigt sich die Überlegenheit der 2 x 2 x 2 Gauss-Punkte.



**Bild 9**  
Halbraum unter Einzellast und Vernetzung eines Würfels mit 64 HK 60-Elementen

Die Knotenpunkte liefern wiederum die schlechtesten Ergebnisse.

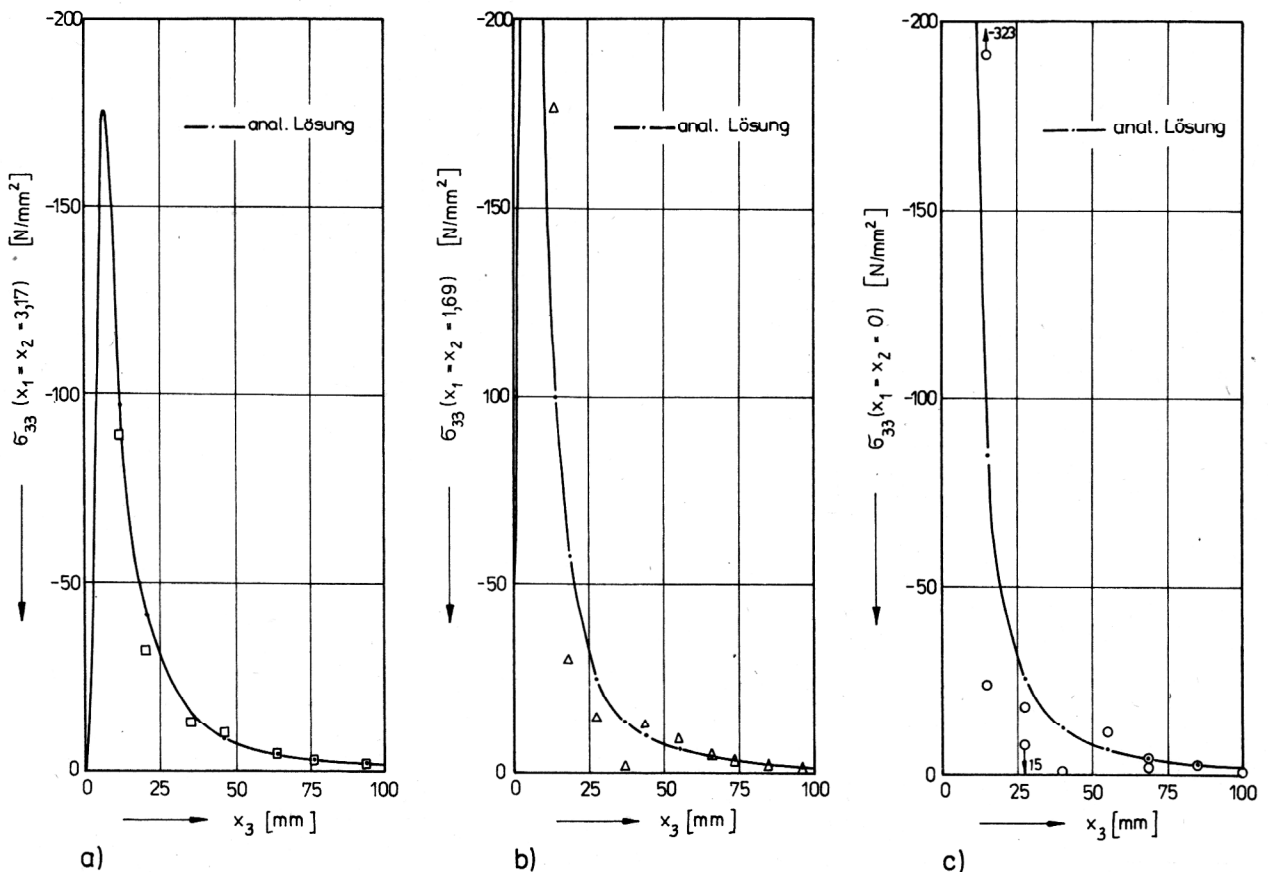
#### 4. Zusammenfassung

Mit Hilfe theoretischer Untersuchungen wurden für das HK 60-Element und für die daraus abgeleiteten degenerierten Elemente die Punkte ermittelt, in denen die Verschiebungsableitungen den gleichen Genauigkeitsgrad aufweisen wie die Knotenverschiebungen. Dabei zeigt sich, daß es nur beim HK 60-Element eindeutige Punkte gibt, in denen alle Verschiebungsableitungen gleichzeitig die höchste Genauigkeit erreichen. Das sind gerade die Stützstellen eines reduzierten Gauss-Integrationschemas.

Bei degenerierten Elementen ergeben sich keine derartigen Punkte. Die Verschiebungsableitungen nach den einzelnen lokalen Koordinaten erreichen jeweils in unterschiedlichen Punkten den höchsten Genauigkeitsgrad. Eine Auswertung der Lage dieser Punkte zeigt, daß es auch bei diesen Elementen sinnvoll erscheint, die Spannungen in den  $2 \times 2 \times 2$  Gauss-Punkten zu berechnen, um eine möglichst hohe Genauigkeit zu erhalten. Dadurch kann gleichzeitig ein entscheidender Vorteil, den die mit Hilfe des Degenerationsprinzips entwickelte Element-

**Bild 10**  
Spannungen  $\sigma_{33}$  für den Halbraum in unterschiedlichen Elementpunkten

- a)  $2 \times 2 \times 2$  Gauss-Punkte,
- b)  $3 \times 3 \times 3$  Gauss-Punkte,
- c) Knotenpunkte





familie bietet, nämlich die durchgängig einheitliche Behandlung aller Elemente, auch bei der Spannungsberechnung genutzt werden.

Die durchgeführten numerischen Tests bestätigen einerseits die aus den theoretischen Untersuchungen gewonnenen Ergebnisse bezüglich der optimalen Punkte für die Spannungsberechnung und rechtfertigen andererseits, auch bei den degenerierten Elementen die  $2 \times 2 \times 2$  Gauss-Punkte für die Spannungsauswertung zugrunde zu legen. Gleichzeitig wird deutlich, daß bei allen untersuchten Elementen die Knotenpunkte in der Regel die schlechtesten Spannungswerte liefern. Da jedoch gerade die Knotenpunkte die repräsentativsten Kommunikationsstellen zwischen Programmanwender und FEM-Modell darstellen, sind Überlegungen notwendig, aus den in inneren Punkten berechneten Spannungen mit Hilfe geeigneter Algorithmen Knotenspannungen zu erzeugen, ohne daß dabei der Genauigkeitsgrad wesentlich herabgesetzt wird [7]. Zu dieser Problematik wird in einem der nächsten Hefte der Technischen Mechanik berichtet.

#### LITERATUR

- [1] Zienkiewicz, O. C.: The Finite Element Method, London: Mc Graw-Hill Book Company (UK) Ltd. 1977.
- [2] Zlamal, M.: Superconvergence of the gradient of finite element solutions. Weimar: Berichte des VIII. IKM, WZ HAB 4 (1978), 378 – 380.
- [3] Zlamal, M.: Superconvergence and reduced integration in the finite element method. Math. of Computation, Vol. 32 (1978), No. 143, 663 – 685.
- [4] Barlow, J.: Optimal stress locations in finite element models. Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 10 (1976), 243 – 251.
- [5] Autorenkollektiv: Finite Elemente in der Festkörpermechanik. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1982.
- [6] Berger, H.; U. Gabbert; J. Altenbach: Besonderheiten der Spannungsberechnung bei degenerierten dreidimensionalen finiten Verschiebungselementen. Techn. Mech. 4 (1983) 2, S. 70
- [7] Berger, H.: Beitrag zur Spannungsberechnung mit Hilfe der Methode der finiten Elemente auf der Grundlage von dreidimensionalen Verschiebungselementen. Dissertation A, TH Magdeburg 1982.
- [8] Vocke, W.: Räumliche Probleme der linearen Elastizität. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1968.

Anschrift der Verfasser:

Dr.-Ing. Harald Berger  
Prof. Dr. sc. techn. Johannes Altenbach  
Technische Hochschule „Otto von Guericke“  
Sektion Maschinenbau  
3010 Magdeburg, PSF 124