

Theoretischer Beitrag zum deformationsmechanischen Verhalten mehrschichtiger Verbundplatten unter Berücksichtigung von Schereffekten¹⁾

Teil I

B. Lauke, R. Barthel

1. Einleitung

1.1. Zielstellung

Vorliegende Arbeit soll einen Beitrag zur Ermittlung der Gebrauchsbeanspruchungen des Gürtels von Radialreifen leisten. Der Gürtel, bestehend aus mit Gummipplatten einseitig belegtem Cordgewebe, wird beim Abrollvorgang durch Biegebelastungen beansprucht, dabei können im Querschnitt Zug- und Stauchverformungen auftreten. Die Stauchdeformationen sind von besonderer Bedeutung, da sie das Ermüdungsverhalten wesentlich beeinflussen.

Die Notwendigkeit der Einbeziehung von Schereffekten in die Betrachtungen ergibt sich aus den im Gürtel verwendeten Verbundkomponenten mit extrem unterschiedlichen Elastizitätsmoduln.

Da die Einbeziehung der realen Gürtelstruktur in der Literatur zur Reifentheorie nicht erfolgte, besteht das Ziel vorliegender Arbeit in der Aufstellung und Überprüfung geeigneter Berechnungsmodelle zur deformationsmechanischen Charakterisierung derartiger Schichtmaterialien unter Biegebelastungen.

Es werden ebene Schichtplatten behandelt; das sich als geeignet erweisende Modell soll in weiterführenden Arbeiten zur Verallgemeinerung auf die Torusgeometrie des Reifens herangezogen werden.

1.2. Das geometrische Modell und physikalische Voraussetzungen

Der Aufbau eines Radialreifens ist in Bild 1 veranschaulicht. Das Interesse gilt seinem wichtigsten Aufbauelement – dem Gürtel. Dieser besteht aus mehreren (meist zwei oder vier) Reihen von Verstärkungsfasern, die in der Gummimatrix eingebettet sind. Für diesen realen Gürtelaufbau wird ein physikalisch-geometrisches Modell aufgestellt, und zwar ein Verbundsystem, das aus mehreren übereinanderliegenden Schichten aufgebaut ist. Es wird zwischen cordverstärkten Schichten (Lagen) und homogenen Zwischenschichten unterschieden. Eine bestimmte Schichtanzahl wird dem Modell nicht zugrundegelegt. Dieser Verbund ist in Plattenebene als homogenes und senkrecht dazu als heterogenes Kontinuum aufzufassen. Glascord, der als Festigkeitsträger im Gürtel verwendet wird, stellt ein Verbundmaterial, bestehend aus Elementarfäden, Schlichte und Imprägniermittel, dar, er

wird jedoch in den Betrachtungen als ein homogenes Material mit effektiven Eigenschaften behandelt.

Entsprechend einer fundamentalen Arbeit von Hamburger [2] ist bei der Deformation von Corden im Gebiet von 1 bis 3 % Dehnung rein elastisches Verhalten vorhanden (Glascord bricht bei einer Dehnung von etwa 3 bis 4 %). Das Spannungs-Dehnungsdiagramm für die meisten Gummiarten ist über große Bereiche nichtlinear elastisch (Vgl. Treloar [3]). Für kleine Deformationen tritt jedoch lineares Verhalten auf. Es wird in der gesamten Arbeit sowohl für die isotropen Schichten aus Gummi als auch für die Lagen linear elastisches Verhalten vorausgesetzt. Die Ermittlung der effektiven elastischen Konstanten der aus Matrix (Gummi) und Verstärkungskomponente (Cord) bestehenden Lagen erfolgt auf der Grundlage von Berechnungsvorschriften der entsprechenden Literatur (vgl. [4], [5] bzw. [1]). Dabei wird das heterogene anisotrope Material der Lagen in ein homogenes anisotropes Material überführt (Bild 2).

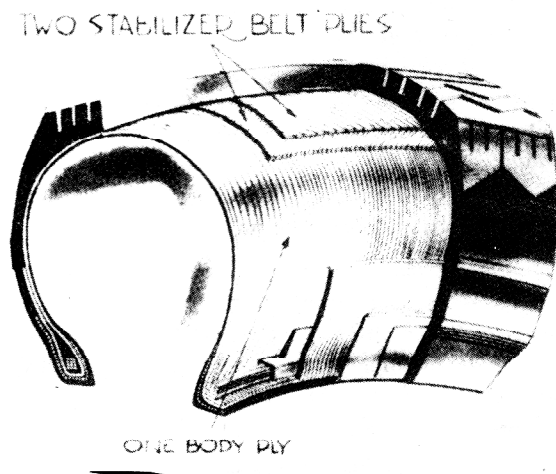


Bild 1
Reifenelement

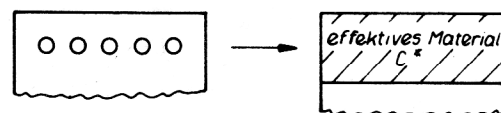


Bild 2
Effektive elastische Konstanten

Für einen derartig aufgebauten Verbund ist die Anwendung der Gleichungen der exakten Elastizitätstheorie, wenn rechentechnisch überhaupt möglich, so doch mit einem beträchtlichen mathematisch-numerischen Auf-

1) Auszug aus der Dissertation von B. Lauke, Berlin 1979 [1].

wand verbunden. Dieser resultiert vor allem aus der Heterogenität des Verbundes in Dickenrichtung.

Aus diesem Grunde wird die Anwendung von Näherungsmethoden erforderlich, die darauf basieren, daß in Plattenebene die Elastizitätstheorie exakt erfüllt wird, jedoch in Richtung der Schichtanordnung entweder für die Verschiebungen oder Spannungen Näherungsansätze aufgestellt werden. Zur Lösung der interessierenden Randwertprobleme werden dazu in der Arbeit verschiedene Modelle, die sich hauptsächlich in der Wahl der Ansätze unterscheiden, aufgestellt.

1.3. Modellzusammenstellung

Der Übersichtlichkeit halber wird das Vorgehen bei der mathematisch-physikalischen Formulierung der Modelle anhand der in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Grundlagen und Voraussetzungen in Bild 3 zusammengefaßt. Der Systematisierung liegt eine Darstellung der verwendeten Verschiebungsansätze über den Querschnitt des Verbundes zugrunde. In diesen Ansätzen können durch die Wahl verschiedener Freiheitsgrade neben den Normalverschiebungen auch Schereffekte berücksichtigt werden.

Die Berücksichtigung von Schereffekten wurde zunächst durch die Einführung von mittleren Scherdeformationen im Sinne von zusätzlichen Rotationen einer durch Biegebelastungen gedrehten Normalen zur Mittelfläche erreicht. Dabei wird jedoch dem Schichtaufbau geometrisch wie materialmäßig nicht Rechnung getragen. Eine Verbesserung der Verschiebungsberechnung, ausgehend von diesem Niveau, kann durch die Ausnutzung der relativ genauen Kenntnis der lokalen (auf die Schicht (k) bezogenen) transversalen Scherspannungen erreicht werden.

Andererseits kann durch eine Modifizierung dieser Scherdeformationstheorie eine Berücksichtigung lokaler Schereffekte bereits in den Ausgangsgleichungen erfolgen. Ein anschließender 2. Iterationsschritt, der auf der Kenntnis dieser lokalen Größen basiert, erlaubt eine exaktere Berechnung.

Ein Übergang zwischen Scherdeformationstheorie und Mikrostrukturtheorie wird durch die Vereinigung von Scherdeformationstheorie und Sandwichtheorie herge-

stellt. Dabei wird ein Verbund betrachtet, der aus zwei Deckschichten, welche ihrerseits Schichtverbunde darstellen, und einem Kern besteht. (vgl. [1])

Eine exaktere Beschreibung des Verformungszustandes wird durch die Einführung von Freiheitsgraden bezüglich der Verschiebungen und Rotationen in jeder Schicht mittels der sogenannten Mikrostrukturtheorie (MST) angestrebt.

2. Zusammenhang zwischen Spannungen und Deformationen

Die Lagen, die aus Matrixmaterial und unendlichen Fasern als Verstärkungsmaterial bestehen, weisen bezogen auf das Koordinatensystem parallel bzw. senkrecht zu den Fasern orthotrope Symmetrie auf. Wird der Spannungszustand auf ein dazu um den Winkel (Θ) gedrehtes System (parallel bzw. senkrecht zu den Plattenrändern) betrachtet, tritt allgemeine Orthotropie auf.

In der Voigtschen Schreibweise gilt als Hookesches Gesetz in bezug auf das Koordinatensystem der Fasern:

$$\sigma_i = C_{ij} \epsilon_j \quad i, j = 1, 2, 3, 6 \quad (2.1)$$

$$\tau_i = C_{ij} \gamma_j \quad i, j = 4, 5$$

Wird die Beziehung für σ_3 nach ϵ_3 aufgelöst und anschließend wieder eingesetzt, erhält man:

$$\sigma_i = Q_{ij} \epsilon_j + \frac{C_{i3}}{C_{33}} \sigma_3 \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (2.2)$$

$$\tau_i = C_{ij} \gamma_j \quad i, j = 4, 5$$

mit

$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}}{C_{33}} C_{3j} \quad (2.3)$$

In dieser Form sind die Deformationen ϵ_z eliminiert, jedoch nicht Null gesetzt.

Mit den Beziehungen (2.1) und (2.2) stehen zwei Beschreibungsmöglichkeiten des Zusammenhangs zwischen Spannungen und Deformationen zur Verfügung. Die Dar-

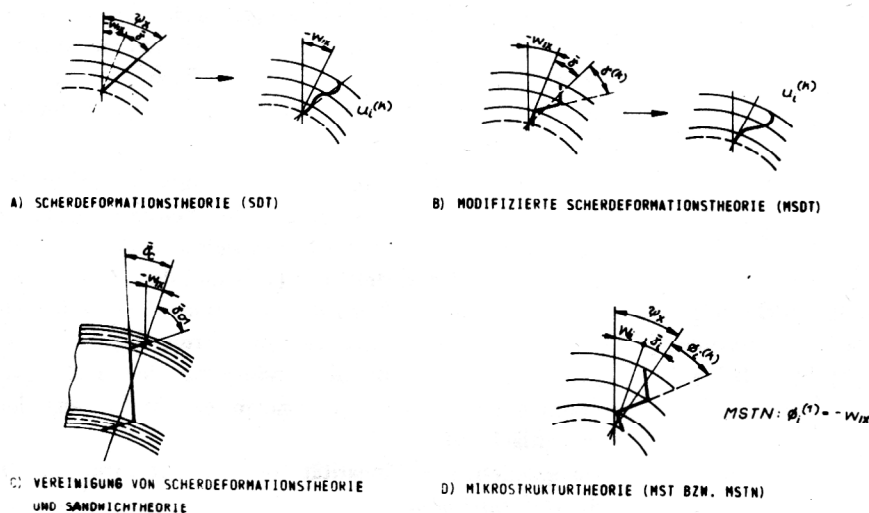


Bild 3
Modellzusammenstellung

stellung (2.2) erweist sich als sehr brauchbar, wenn man einen ebenen Spannungszustand betrachtet, d. h. wenn

$$\int_h \sigma_z dz = 0 \quad (2.4)$$

gilt.

Das Hookesche Gesetz lautet dann:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= Q_{ij} \epsilon_j & i, j &= 1, 2, 6 \\ \tau_i &= C_{ij} \gamma_j & i, j &= 4, 5 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Wird jedoch ein ebener Deformationszustand vorausgesetzt:

$$\epsilon_z = 0 \quad (2.6)$$

erhält man aus (2.1)

$$\begin{aligned} \sigma_i &= C_{ij} \epsilon_j & i, j &= 1, 2, 6 \\ \tau_i &= C_{ij} \gamma_j & i, j &= 4, 5 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ein Vergleich der Beziehungen (2.2) und (2.5) zeigt den Unterschied für den ebenen Spannungszustand und den ebenen Deformationszustand.

In der Arbeit von Wang, Chou [6] wurde ein Vergleich beider Modelle gegenüber der exakten elastischen Lösung vorgenommen. Dabei wurden Plattenverbunde unter speziellen Randbedingungen unter Biegebelastungen (ohne Berücksichtigung von Schereffekten) untersucht. Es wurde festgestellt, daß in diesen Fällen die Annahme der verschwindenden mittleren Spannungen (2.4) die bessere Übereinstimmung mit der exakten Lösung liefert. Da sich die vorliegende Arbeit vorwiegend mit Biegebelastungen beschäftigt, wird deshalb der ebene Spannungszustand vorausgesetzt. Die Steifigkeiten Q_{ij} hängen in folgender Weise mit den elastischen Konstanten zusammen:

$$Q_{11} = E_{11} / (1 - \nu_{12} \nu_{21}), \quad Q_{22} = E_{22} / (1 - \nu_{12} \nu_{21})$$

$$Q_{12} = \nu_{21} E_{11} / (1 - \nu_{12} \nu_{21}), \quad Q_{66} = G_{12}, \quad Q_{16} = Q_{26} = 0$$

Wird der Spannungszustand relativ zu dem Koordinatensystem der Plattenränder betrachtet gilt:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_4 \\ \tau_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{bmatrix}$$

Der Querstrich bedeutet die Abhängigkeit von Θ infolge der Rotation des Koordinatensystems. Die Transformationsformeln sind in den Arbeiten [7] bzw. [8] zu finden.

3. Scherdeformationsstheorie (SDT)

3.1. Verbundaufbau

Es wird ein Plattenverbund mit der Dicke h betrachtet, der aus n Schichten besteht. Das Maß h_k bezeichnet den Abstand einer Schicht k zur Mittelfläche ($z = 0$). Es werden i . allg. Schichten mit beliebiger Dicke und beliebigen elastischen Eigenschaften betrachtet.

Die Längen der Verbundplatten in x und y -Richtung werden mit a bzw. b bezeichnet. Das Verhältnis $s = a/h$ dient als Maß zur Beurteilung der relativen Dicke des Verbundes.

3.2. Aufstellung der Grundgleichungen

Bei der Behandlung des Biegeverhaltens der hier betrachteten Verbunde liefern die Arbeiten [9] und [10] die Grundlagen für das methodische Vorgehen in diesem Abschnitt.

Es wird von folgenden Voraussetzungen ausgegangen:

1. linearer Verschiebungsansatz über den Verbundquerschnitt;
2. ebene Querschnitte vor der Deformation, die normal zur Mittelfläche (x, y) sind, bleiben auch nach der Deformation eben, aber nicht normal zur Mittelfläche;
3. Annahme eines ebenen Spannungszustandes, d. h. die Normalspannung σ_z ist vernachlässigbar gegenüber den Spannungen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$

Durch die Annahme 2. wird die Einbeziehung von mittleren Scherdeformationen $\bar{\gamma}$, die entsprechend Bild 3 definiert sind, möglich. Die Annahme 3. stellt eine übliche Vereinfachung in der Plattentheorie dar (vgl. Ambarcumjan [11]).

Ausgangspunkt der Ableitung ist die Aufstellung der Verschiebungsansätze:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u^0(x, y, t) + z \psi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v^0(x, y, t) + z \psi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w^0(x, y, t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

wobei u, v, w die Verschiebungen in den Koordinatenrichtungen x, y, z bedeuten; u^0, v^0, w^0 sind die entsprechenden Komponenten in der Mittelfläche ($z = 0$); ψ_x, ψ_y sind die Rotationen eines beliebigen Querschnitts, t ist die Zeitvariable.

Zusätzlich zu den Annahmen 1., 2. und 3. wird durch (3.1) folgendes vorausgesetzt: Die Verschiebungen in Richtung der z -Achse (w) setzen sich u. a. aus den Verschiebungen der Mittelfläche (w^0) und der Längenänderung der jeweiligen Normalen zusammen. Es wird jedoch vorausgesetzt, daß diese Längenänderung klein im Vergleich zu w^0 ist und die Ausbiegung eines beliebigen Punktes im Körper somit gleich der Ausbiegung der Mittelfläche ist.

Da geometrische Linearität vorausgesetzt wird, gilt für die Deformationen:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \epsilon_x = u_{,x}, \quad \epsilon_2 = \epsilon_y = v_{,y} \\ \epsilon_6 &= \epsilon_{xy} = u_{,y} + v_{,x} = \gamma_{12} \\ \epsilon_5 &= \gamma_5 = \gamma_{xz} = w_{,x} + u_{,z}, \quad \epsilon_4 = \gamma_4 = \gamma_{yz} = w_{,y} + v_{,z}\end{aligned}\quad (3.2)$$

Werden die Ansätze (3.1) eingesetzt, erhält man mittels (2.8) nach Integration über z folgende Beziehungen für die Kräfte und Momente:

$$\begin{bmatrix} \underline{N} \\ \underline{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{B} & \underline{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\epsilon}^o \\ \underline{K} \end{bmatrix}\quad (3.3)$$

$$\text{mit } (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2) dz,$$

$$(N_i, M_i) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i(1, z) dz, \quad i, j = 1, 2, 6$$

$$\text{bzw. } \begin{bmatrix} Q_4 \\ Q_5 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{bmatrix}\quad (3.4)$$

$$\text{mit } A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{C}_{ij}^{(k)} dz, \quad Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_i dz \quad i, j = 4, 5$$

wobei k einen Scherkorrekturfaktor darstellt, der näherungsweise berücksichtigt, daß die Querschnitte nach der Deformation nicht eben bleiben.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen ($\text{div } \sigma = 0$) erhält man nach Integration und Einsetzen von (3.3) und (3.4) nach Ausführung der Differentiationen ein partielles DGL-System zur Bestimmung der unbekannt Funktionen u^o, v^o, w^o, ψ_x und ψ_y .

Es müssen folgende Rand- und Anfangsbedingungen, die aus der Variation der potentiellen Energie des Verbundes gewonnen werden können, erfüllt sein:

1. Die Funktionen $u_n, u_t, w^o, \psi_n, \psi_t$ und deren Zeitableitungen im gesamten Verbund
2. entlang der Ränder ein Wert jedes der Paare $(u_n, N_n; u_t, N_{nt}; w, Q_n; \psi_n, M_n; \psi_t, M_{nt})$
3. An den Rändern $z = \pm h/2$ entweder die Belastung q oder die Durchbiegung w ,

wobei sich die Indizes n und t auf die normale bzw. tangentiale Richtung zu den Plattenrändern beziehen.

Nach Lösung dieses Randwertproblems bei Kenntnis der gesuchten Funktionen, erhält man entsprechend der Ansätze eine lineare Verteilung der Verformungen bzw. Spannungen über den Querschnitt des Verbundes. Dies kann nur eine erste Näherung der tatsächlichen Verteilung darstellen, da die Schichten unterschiedliche geometrische als auch physikalische (elastische Konstanten) Größen aufweisen. In der Arbeit [10] wurde nachgewiesen, daß durch die Einbeziehung von Schereffekten eine gute Beschreibung der Durchbiegungsfunktion erzielt wird. Andererseits wurde jedoch gezeigt, daß durch die Einbeziehung von Scherdeformationen keine Verbesserung der Spannungsermittlung für σ_x, σ_y und σ_{xy} gegenüber der klassischen Theorie (ohne Schereffekte) erreicht

werden kann. In dem Beitrag [12] wurde berechnet, daß die SDT gute Lösungen für die transversalen Scherspannungen (τ_{xz}, τ_{yz}), die man aus den lokalen Gleichgewichtsbedingungen erhält, liefert.

Dieser Sachverhalt bildet den Ausgangspunkt für die Verbesserung der Spannungs- und Verschiebungsberechnung entsprechend der Arbeit [13]. Im folgenden Kap. soll diese Methode ausgearbeitet und angewandt werden.

3.3. Verformungsberechnung

Zunächst werden die transversalen Scherspannungen in der k -ten Schicht berechnet. Aus den Gleichgewichtsbedingungen ($\text{div } \sigma = 0$) folgt:

$$\tau_{xz}^{(k)} = - \int_{h_{k-1}}^z (\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y})^{(k)} dz + C_1^{(k)}\quad (3.6)$$

$$\tau_{yz}^{(k)} = - \int_{h_{k-1}}^z (\sigma_{y,y} + \tau_{xy,x})^{(k)} dz + C_2^{(k)}$$

Die Integrationskonstanten $C_1^{(k)}$ und $C_2^{(k)}$ werden aus den Stetigkeitsbedingungen an den Grenzflächen und den Forderungen verschwindender Scherspannungen an den Rändern bestimmt.

Werden anschließend die Spannungen entsprechend (2.8) eingesetzt, erhält man nach der Integration:

$$\begin{aligned}\tau_{xz}^{(k)} &= a_0^{(k)} + a_1^{(k)} z + a_2^{(k)} z^2 \\ \tau_{yz}^{(k)} &= b_0^{(k)} + b_1^{(k)} z + b_2^{(k)} z^2\end{aligned}\quad (3.7)$$

$$\text{mit } a_0 = - \int_{h_0}^{h_{k-1}} (a_1' + z a_2') dz + h_{k-1} a_1' + \frac{h_{k-1}^2}{2} a_2' \quad (3.8)$$

$$a_1^{(k)} = - a_1'(k), \quad a_2^{(k)} = - a_2'(k)/2$$

Die Koeffizienten b_i ergeben sich durch Ersetzen von a_i' durch b_i' ($i = 0, 1, 2$), die Koeffizienten a_i' sind im Anhang (A 1) definiert.

Ausgehend von der Kenntnis dieser lokalen Scherspannungen erfolgt die Erweiterung der bisherigen Theorie. Wird die Beziehung für die Scherspannungen (2.8) nach den Deformationen aufgelöst, bekommt man nach Einsetzen von (3.7) ein lokales Scherdeformationsfeld:

$$\gamma_i^{(k)} = \bar{S}_{ij}^{(k)} \tau_j \quad \bar{S}_{ij} = [C_{ij}]^{-1} \quad i, j = 4, 5 \quad (3.9)$$

Dieses steht jedoch nicht mehr in Korrelation zu den gleichförmig über die Dicke verteilten Verschiebungsfeld. Es läßt sich jedoch daraus ein lokales Verschiebungsfeld konstruieren, wodurch die Variation von Schicht zu Schicht berücksichtigt wird. Die lokalen Verschiebungen berechnen sich aus

$$\begin{aligned}\gamma_{xz}^{(k)} &= u_{,z}^{(k)} + w^o_{,z}, \quad \gamma_{yz}^{(k)} = v_{,z}^{(k)} + w^o_{,y} \\ \text{woraus } u^{(k)} &= \int_{h_{k-1}}^z (\gamma_{xz}^{(k)} - w^o_{,x}) dz + C_1^{(k)} \\ v^{(k)} &= \int_{h_{k-1}}^z (\gamma_{yz}^{(k)} - w^o_{,y}) dz + C_2^{(k)}\end{aligned}\quad (3.10)$$

folgt. Die Integrationskonstanten werden aus den Stetigkeitsbedingungen an den Grenzflächen und den Bedingungen ($u(z=0) = u^0$, $v(z=0) = v^0$) bestimmt. Werden die Scherdeformationen eingesetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} u^{(k)} &= e_0^{(k)} + e_1^{(k)} z + e_2^{(k)} z^2 + e_3^{(k)} z^3 \\ v^{(k)} &= f_0^{(k)} + f_1^{(k)} z + f_2^{(k)} z^2 + f_3^{(k)} z^3 \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } e_0^{(k)} &= \int_0^{h_{k-1}} (\bar{C}_0 + z C_1 + z^2 C_2) dz + \\ &+ u^0 - (h_{k-1} \bar{C}_0^{(k)} + \frac{h_{k-1}^2}{2} C_1^{(k)} + \frac{h_{k-1}^3}{3} C_2^{(k)}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} e_1^{(k)} &= \bar{C}_0^{(k)} = C_0^{(k)} - w^{0,x}, \quad e_2^{(k)} = C_1^{(k)}/2, \\ e_3^{(k)} &= C_2^{(k)}/3. \end{aligned}$$

Die $f_i^{(k)}$ sind entsprechend der $e_i^{(k)}$ definiert, die C_i bzw. die zu $f_i^{(k)}$ gehörigen Konstanten d_i sind im Anhang (A 2) aufgeschrieben.

Die in (3.11) erhaltenen modifizierte Verschiebungen stellen die zu den lokalen Scherdeformationen (3.9) gehörigen lokalen Normalverschiebungen dar.

Ausgehend von (3.11) kann man modifizierte Deformationen berechnen:

$$\epsilon_x^{(k)} = u_{,x}^{(k)}, \quad \epsilon_y^{(k)} = v_{,y}^{(k)}, \quad \gamma_{xy} = u_{,y}^{(k)} + v_{,x}^{(k)} \quad (3.13)$$

Das Ziel, die Verbesserung der Deformations- und Spannungsberechnung, ist somit erreicht. Wird (3.13) in (2.8) eingesetzt, bekommt man unter Verwendung von (3.11)

$$[\sigma]^{(k)} = [F_0]^{(k)} + [F_1]^{(k)} z + [F_2]^{(k)} z^2 + [F_3]^{(k)} z^3 \quad (3.14)$$

wobei

$$[F_i]^{(k)} = [\bar{Q}]^{(k)} [E_i]^{(k)}, \quad [E_i]^{(k)T} = [e_{i,x}, f_{i,y}, (e_{i,y} + f_{i,x})] \quad (3.15)$$

$i = 1, 2, 3$

bedeuten.

Anhand der gefundenen Beziehung (3.14) wird deutlich, daß die Spannungen σ_x , σ_y und σ_{xy} nicht mehr linear innerhalb einer Schicht (k) variieren, sondern daß sie eine kubische Abhängigkeit aufweisen. Die Anwendung der hier erhaltenen allgemeinen Ergebnisse erfolgt in Abschn. 5.

4. Modifizierte Scherdeformationstheorie (MSDT)

4.1. Mängel der Scherdeformationstheorie

Die Scherdeformationstheorie in der bisher dargelegten Form weist einige Mängel in bezug auf die Erfüllung der Forderungen der Elastizitätstheorie auf. Es wird der Versuch unternommen, eine verbesserte Theorie abzuleiten, in der einerseits diese Mängel beseitigt sind und anderer-

seits lokale Effekte bezüglich der Scherdeformationen von vornherein berücksichtigt werden sollen.

Aus der Elastizitätstheorie ist bekannt, daß an den Grenzflächen eines Schichtverbundes, bestehend aus n Schichten, folgende Bedingungen erfüllt sein müssen:

$$u_i^{(k)} = u_i^{(k+1)} \quad i = 1, 2, 3; \quad k = 1 \dots n-1 \quad (4.1)$$

$$\sigma_i^{(k)} = \sigma_i^{(k+1)} \quad i = 3, 4, 5; \quad k = 1 \dots n-1 \quad (4.2)$$

Aus der Kontinuität der Verschiebungen (4.1) folgt die Kontinuität der Deformationen

$$\epsilon_i^{(k)} = \epsilon_i^{(k+1)} \quad i = 1, 2, 6; \quad k = 1 \dots n-1 \quad (4.3)$$

Auf Grund der Schichtstruktur des Verbundes gilt i. allg. für die Steifigkeiten

$$C_{ij}^{(k)} \neq C_{ij}^{(k+1)} \quad (4.4)$$

(Im gesamten Abschn. soll unter den Indizes i und j stets $i, j = 4, 5$ verstanden werden).

Daraus folgt mit (2.8):

$$\tau_i^{(k)} \neq \tau_i^{(k+1)} \quad (4.5)$$

Des weiteren werden die Randbedingungen

$$\tau_i(z = \pm h/2) = 0 \quad (4.6)$$

durch die linearen Ansätze nicht erfüllt. Eine Möglichkeit die hier aufgezeigten Schwierigkeiten zu beheben, soll im Folgenden dargestellt werden.

4.2. Aufstellung der Grundgleichungen

Die Voraussetzungen bezüglich der Verschiebungen und Spannungen werden entsprechend den Punkten 1), 2) und 3) aus Kap. 3.2. beibehalten. Ausgangspunkt ist die Annahme, daß nicht die Scherdeformationen von vornherein durch einen bestimmten Ansatz gegeben sein sollen, sondern die Scherspannungen. Die zweite Gleichung von (2.8) wird in folgender Form aufgeschrieben:

$$\gamma_i^{(k)} = \bar{S}_{ij}^{(k)} \tau_j \quad (4.7)$$

Die übrigen Beziehungen des Hookschen Gesetzes und die Verschiebungsansätze (3.1) werden beibehalten.

Die nächste Aufgabe besteht in der Aufstellung eines geeigneten Ansatzes für die Scherspannungen.

Es wird eine parabelförmige Verteilung über den Querschnitt angenommen. Für heterogene Schichtverbunde wurde diese Näherung in der Schertheorie von Ambarcumjan [11] mit Erfolg angewandt.

Die Scherspannungen werden wie folgt dargestellt:

$$\tau_j(z) = f(z) \tau_j^0 \quad (4.8)$$

wobei für $f(z)$ eine parabelförmige Verteilung angenommen wird.

$$f(z) = 1 - 4(z/h)^2 \quad (4.9)$$

τ_j^0 ist der Maximalwert bei $z = 0$.

Durch diesen Ansatz werden die Randbedingungen und Stetigkeitsbedingungen für die Scherspannungen erfüllt und keine Bedingung für die Deformationen wird verletzt.

Mit der Definition von mittleren Scherdeformationen

$$\hat{\gamma}_i = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \gamma_i^{(k)} dz \quad (4.10)$$

und die Integration von (4.7) über z , wobei der Ansatz (4.8) eingesetzt wird, erhält man:

$$\tau_j^0 = \hat{\gamma}_i \left[\int_{-h/2}^{h/2} \bar{S}_{ij}^{(k)} f(z) dz \right]^{-1} \quad (4.11)$$

Wird diese Beziehung in den Zusammenhang von Querkraften und Scherspannungen

$$Q_j = \frac{2}{3} h \tau_j^0 \quad (4.12)$$

eingesetzt, ergibt sich:

$$Q_j = A'_{ij} \gamma_j \quad (4.13)$$

$$\text{mit } A'_{ij} = \frac{2}{3} h \left[\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \bar{S}_{ij}^{(k)} f(z) dz \right]^{-1}$$

Ein Vergleich der Darstellung der Querkraften (4.13) mit der analogen Beziehung (3.4) zeigt formale Übereinstimmung, jedoch sind die Matrixelemente unterschiedlich definiert. Auf die Einführung eines Scherkorrekturfaktors wird hier in der Hoffnung verzichtet, daß durch die Verbesserung der Grundgleichungen bereits gute Übereinstimmung mit der exakten elastischen Lösung erreicht wird. Die formale Übereinstimmung des gesamten Formalismus erweist sich als günstig, da die weitere Behandlung, die zur Lösung des zugehörigen DGL-Systems führt, wie bisher erfolgen kann (vgl. Abschnitt 3).

Da an Stelle der A_{ij} jetzt die A'_{ij} als Koeffizienten in die Gleichgewichtsbedingungen bzw. das DGL-System eingehen, werden auch die Lösungen entsprechend modifiziert.

4.3. Verschiebungen, Deformationen, Spannungen

Mittels der im vorangehenden Kapitel hergeleiteten Beziehungen ist die Berechnung der Verschiebungen und Spannungen möglich, jedoch erhält man entsprechend der Ansätze nur lineare Verteilungen über den Querschnitt. Eine Weiterführung der modifizierten Theorie erlaubt eine verbesserte Berechnung der Normalverformungen bzw. Spannungen. Das methodische Herangehen erfolgt analog der Darstellung in Kap. 3.3. Anhand der Formel (4.7) wird deutlich, daß im Schichtverbund eine diskontinuierliche Verteilung der Scherdeformationen $\gamma_i^{(k)}$ auftritt, da $\tau_j(z)$ entsprechend (4.8) stetig ist, jedoch i. allg.

$$\bar{S}_{ij}^{(k)} \neq \bar{S}_{ij}^{(k+1)} \quad \text{gilt.} \quad (4.14)$$

Diese Verteilung läßt sich mit der Kenntnis der Funktionen u^0, v^0, w^0, ψ_x und ψ_y nach Lösung des DGL-Systems wie folgt berechnen.

Wird in die Beziehung (4.7) die Scherspannung $\tau_j(z)$ entsprechend (4.8) unter Berücksichtigung von (4.12) und (4.13) eingesetzt, ergibt sich:

$$\gamma_i^{(k)} = \bar{S}_{ij}^{(k)} \frac{3}{2h} (1 - 4(z/h)^2) A'_{jk} \hat{\gamma}_k \quad i, j, k = 4, 5 \quad (4.15)$$

Da die mittleren Scherdeformationen bekannt sind, erhält man durch diese Gleichung das lokale Scherdeformationsfeld.

Mittels der Definition eines lokalen Verschiebungsfeldes

$$u_{,z}^{(k)} = \gamma_{xz}^{(k)} - w^0_{,x}$$

(die Ableitung für $v^{(k)}$ erfolgt analog) erhält man nach Integration über z :

$$u^{(k)} = \int_{-h/2}^z (\gamma_{xz}^{(k)} - w^0_{,x}) dz + C_1^{(k)} \quad (4.16)$$

Die Bestimmung der Integrationskonstanten erfolgt wiederum durch die Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen an den Grenzflächen der Schichten und der Forderung $u(z=0) = u^0$. $C_1^{(k)}$ ist im Anhang (A 3) als Rekursionsformel angegeben.

Werden die Scherdeformationen in (4.16) eingesetzt, erhält man das Verschiebungsfeld in folgender Form:

$$\begin{aligned} u^{(k)} &= e_0^{(k)} + e_1^{(k)} z + e_3^{(k)} z^3 \\ v^{(k)} &= f_0^{(k)} + f_1^{(k)} z + f_3^{(k)} z^3 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Die Koeffizienten e_i und f_i sind im Anhang (A 4) definiert. Der Vergleich zu den Ergebnissen in Kap. 3.3 zeigt, daß hier keine Terme proportional zu z^2 auftreten, jedoch ist auch eine kubische Abhängigkeit zu verzeichnen. Die Definition der jeweiligen Koeffizienten in den Verschiebungsfunktionen (3.12) bzw. (A.4) zeigt, daß die letzteren mit wesentlich geringerem mathematischen Aufwand berechnet werden können, da die Integrationen auf Grund der Stetigkeitsbedingungen nur einmal auftreten, d. h. für die Verschiebungsfunktionen. In der ursprünglichen Scherdeformationstheorie müssen hingegen zusätzlich die Gleichgewichtsbedingungen integriert werden.

Die modifizierten Deformationen berechnen sich analog zu den Beziehungen (3.13). Werden diese unter Berücksichtigung der Verschiebungen (4.17) in (2.8) eingesetzt, erhält man folgenden Ausdruck für die Spannungen ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$):

$$[\sigma]^{(k)} = [F_0]^{(k)} + [F_1]^{(k)} z + [F_3]^{(k)} z^3 \quad (4.18)$$

$$\text{mit } [F_i]^{(k)} = [\bar{Q}]^{(k)} [E_i]^{(k)}$$

$$[E_i]^{(k)T} = [e_{i,x}, f_{i,y}, (e_{i,y} + f_{i,x})] \quad i = 0, 1, 3$$

5. Anwendung der SDT und MSDT zur Verformungsberechnung und Vergleich der Theorien

5.1. Verbundaufbau und Lösungsverfahren

Die allgemeinen Ergebnisse der vorangehenden Abschnitte werden zur Verformungsberechnung einiger spezieller Randwertaufgaben herangezogen. Es wird entsprechend dem Aufbau des Radialreifengürtels ein zur Mittelebene antisymmetrischer Schichtaufbau gewählt. Es werden drei verschiedene Aufbauvarianten untersucht: ein Verbund aus zwei Lagen, ein Verbund mit zwei Lagen und einer Zwischenschicht und ein Verbund mit vier Lagen und drei Zwischenschichten.

Als Randbedingung wird die einfache Unterstützung gewählt:

$$x = 0, a: w^0 = u^0 = M_x = N_{xy} = \psi_y = 0 \quad (5.1)$$

$$y = 0, b: w^0 = v^0 = M_y = N_{xy} = \psi_x = 0$$

Die Lösung der aus den Gleichgewichtsbedingungen ($\text{div } \sigma = 0$) folgenden DGL-Systeme (vgl. [1]) erfolgt mittels Fourieransätzen für die gesuchten Funktionen und die Belastung. Durch Einsetzen dieser Ansätze in das DGL-System ergibt sich ein algebraisches Gleichungssystem, welches auf der Rechenanlage BESM-6 gelöst wurde. Einige Ergebnisse seien im folgenden zusammengefaßt.

5.2. Auswertung

Sofern in den Bildern nichts Gegenteiliges angegeben ist, wurde mit Glascord als Verstärkungsmaterial gerechnet.

Tabelle 1
Materialkonstanten

	E	G	K	ν
Stahlcord	18000	6923	15000	0,3
Glascord	7000	2692	5833	0,3
Viskosecord	750	288	625	0,3
Gummi	1	0,34	16,66	0,49

E – Elastizitätsmodul ν – Querkontraktion
G – Schermodul
K – Kompressionsmodul (E, G, K) in kp/mm^2

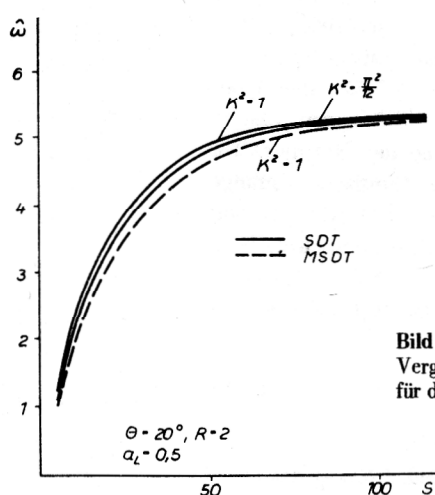
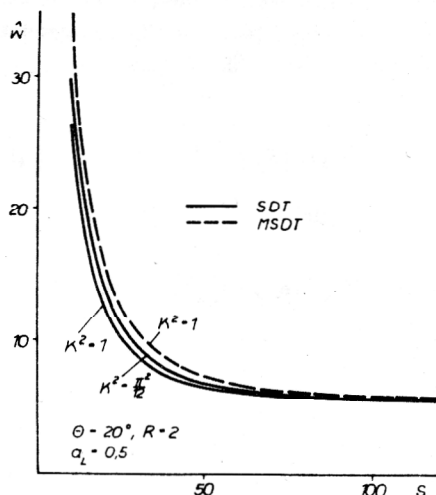


Bild 4
Vergleich der Durchbiegung und Eigenfrequenz für die SDT und MSDT

Als Belastung wurde eine gleichförmige Flächenlast angenommen. Die Größen wurden wie folgt normiert:

$$\hat{w} = \frac{w^0 h^3 E_{22}}{q_0 b^4}, \quad \hat{u} = \frac{u^0 E_m}{q_0 a}$$

$$\hat{v} = \frac{v^0 E_m}{q_0 a}, \quad \hat{w}' = \frac{w^0 h^3 E_m}{q_0 b^4}$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/q_0, \quad \hat{u}' = u/s^2, \quad \hat{v}' = v/s^2,$$

$$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \left(\frac{x}{h}, \frac{y}{h}, \frac{z}{h} \right) \quad (5.2)$$

$$(\hat{\psi}_i, \hat{\Phi}_i) = \left(\frac{\psi_i E_m}{q_0}, \frac{\Phi_i E_m}{q_0} \right),$$

$$\hat{w}_{,x}^0 = \frac{w^0_{,x} E_m}{q_0}, \quad R = \frac{a}{b}, \quad a_L = \frac{h_L}{h}$$

h_L : Lagedicke, E_m : E-Modul der Matrix

Als Elastizitätsmodul wurden die in Tabelle 1 angegebenen Werte gewählt.

Zunächst wurde die Abhängigkeit der Durchbiegung vom Verhältnis $s = a/h$ mittels beider Theorien berechnet (Bild 4). Dabei wird deutlich, daß die Lösung der MSDT gegenüber der SDT zu höheren Werten abweicht. Eine Verbesserung des SDT-Modells durch Berücksichtigung eines Scherkorrekturfaktors ($K = \pi^2/12$) zeigt eine Annäherung zur Lösung der MSDT. Diese Tatsache läßt die Schlußfolgerung zu, daß die MSDT infolge der Berücksichtigung lokaler Schereffekte besser mit der exakten elastischen Lösung übereinstimmt.

Die Abhängigkeit der Verschiebungen und Deformationen von $s = a/h$ ist in Bild 5 dargestellt. Dabei zeigt sich, daß mit wachsender Dicke die Verschiebungen bzw. Deformationen beachtlich von der linearen Verteilung über den Querschnitt abweichen. Erst in einer Größenordnung von $s > 50$ werden die Lösungen entsprechend der linearen Ansätze brauchbar.

Ein Vergleich der MSDT und SDT für die Verschiebungen ist in Bild 6 zu finden. Mit wachsender relativer Länge (s) des Verbundes tritt eine Annäherung der Lösungen ein. Für kleine s weicht die Lösung der MSDT stärker vom linearen Verhalten ab.

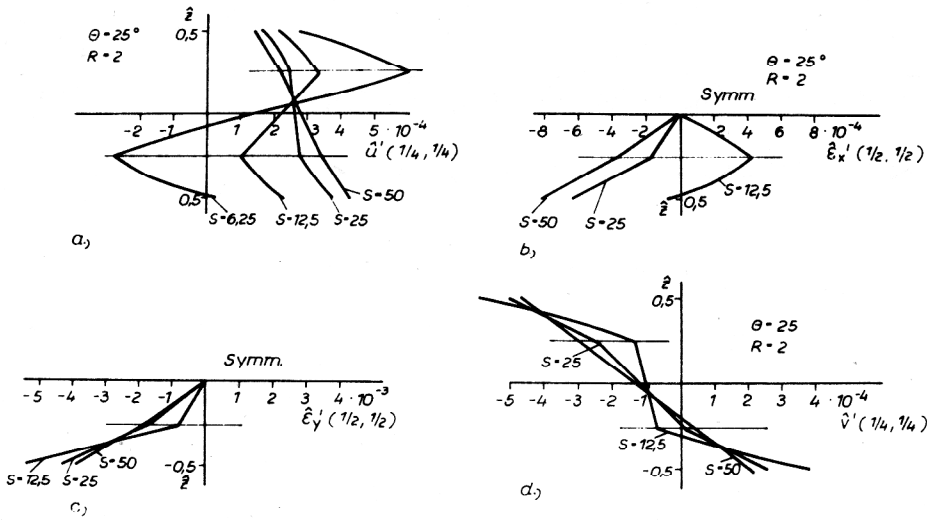


Bild 5
Abhängigkeit der Verschiebungen bzw. Deformationen von $s = a/h$

Bild 6
Vergleich der MSDT und SDT für Verschiebungen und Deformationen

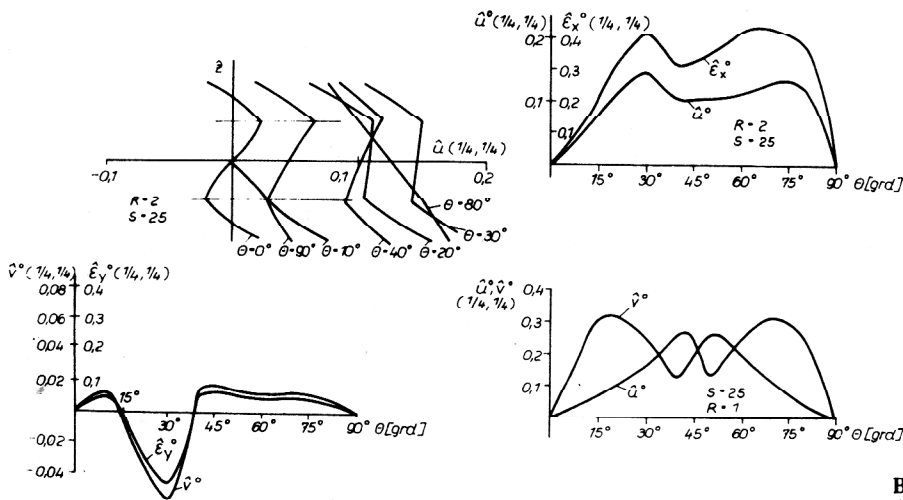
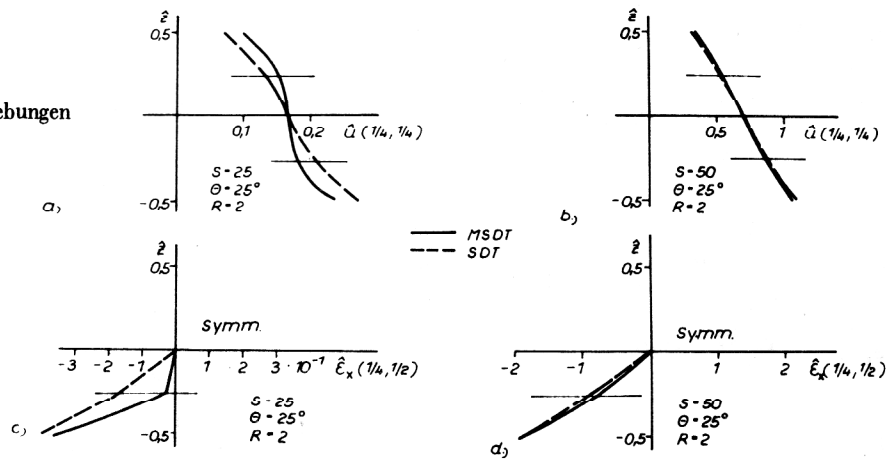


Bild 7
Abhängigkeit vom Faserbettungswinkel (Θ)

Die Abhängigkeit der Verschiebungen und Deformationen vom Faserbettungswinkel (Θ) ist in Bild 7 dargestellt. Es wird zunächst deutlich, daß die Mittelflächenverschiebungen bzw. -deformationen für die Winkel $\Theta = 0^\circ/90^\circ$ verschwinden. Die Ursache liegt darin begründet, daß für diese Werte die Kopplungskoeffizienten B_{16} , B_{26} Null sind. Dadurch werden die Gleichungen, die mit der Biegung bzw. mit Normaleffekten zusammenhängen, im DGL-System (vgl. [1], (4.35)) entkoppelt. Auf Grund der Belastungsfunktionen sind also nur die mit der Biegung zusammenhängenden Funktionen ungleich Null. Für alle anderen Winkelwerte bewirkt der Kopplungs-

effekt das Auftreten von Mittelflächenverschiebungen. Die Größe der Maxima und Minima ist neben den Koordinaten des betrachteten Punktes von den geometrischen Größen abhängig. Im Falle $R = 1$ gilt für symmetrische Punkte wie $x = 1/4$, $y = 1/4$ die Beziehung $\hat{u}(\Theta) = \hat{v}(90^\circ - \Theta)$.

Anhang

$$a_1' = \bar{Q}_{11} u^o_{,xx} + 2\bar{Q}_{16} u^o_{,xy} + \bar{Q}_{66} u^o_{,yy} + \bar{Q}_{16} v^o_{,xx} + (\bar{Q}_{66} + \bar{Q}_{12}) v^o_{,xy} + \bar{Q}_{26} v^o_{,yy} \quad (\text{A } 1)$$

$$a_2' = \bar{Q}_{11} \psi_{x,xx} + 2\bar{Q}_{16} \psi_{x,xy} + \bar{Q}_{66} \psi_{x,yy} + \bar{Q}_{16} \psi_{y,xx} + (\bar{Q}_{66} + \bar{Q}_{12}) \psi_{y,xy} + \bar{Q}_{26} \psi_{y,yy}$$

$$C_i^{(k)} = S_{55} a_i^{(k)} + S_{45} b_i^{(k)}$$

$$d_i^{(k)} = S_{45} a_i^{(k)} + S_{44} b_i^{(k)} \quad i = 0, 1, 2 \quad (\text{A } 2)$$

$$C_1^{(k)} = A^{(k-1)}(z = h_{k-1}) + C_1^{(k-1)} \quad (\text{A } 3)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } A^{(k)} &= \int_{h_{k-1}}^z (\bar{S}_{55}^{(k)} \frac{3}{2h} A'_{55} f(z) (w^o_{,x} + \psi_x) - w^o_{,x}) dz \\ &= \int_{h_{k-1}}^z \bar{A}^{(k)} dz \end{aligned}$$

$$e_o^{(k)} = \int_0^{h_{k-1}} (\bar{C}_o + C_2 z^2) dz - (\bar{C}_o^{(k)} h_{k-1} + C_2^{(k)} \frac{h_{k-1}^3}{3}) + u^o$$

$$e_1^{(k)} = \bar{C}_o^{(k)}, \quad e_3^{(k)} = C_2^{(k)}/3 \quad (\text{A } 4)$$

$$\bar{C}_o^{(k)} = \frac{3}{2h} A'_{55} (w^o_{,x} + \psi_x) \bar{S}_{55}^{(k)} - w^o_{,x}, \quad C_2^{(k)} = -\frac{6}{h^3} A'_{55} (w^o_{,x} + \psi_x) \bar{S}_{55}^{(k)}$$

$f_i^{(k)}$ – analog

LITERATUR

- | | |
|--|--|
| [1] Lauke, B.: Dissertation, AdW der DDR, Berlin 1979. | [13] Whitney, J. M.: Journ. Comp. Mat. 6 (1972) S. 426. |
| [2] Hamburger, W. J.: 1955 Edgar Marburg Lecture, Philadelphia. | [14] Achenbach, J. D.; Sun, C. T.; Herrmann, G.: Journ. Appl. Mech. 40 (1968) S. 689, Ser. E. |
| [3] Treloar, L. R. G.: „The Physics of Rubber Elasticity“, Oxford, Clarendon Press, 1949. | [15] Sun, C. T.: Journ. Appl. Mech. 38 (1971) March S. 231 – 238. |
| [4] Whitney, J. M.; Riley, M. B.: AIAA Journ. 4 (1966) S. 1537. | [16] Sun, C. T.; Achenbach, J. D.; Herrmann, G.: Journ. Appl. Mech. 90 Ser. E (1968) Sept. S. 467 – 475. |
| [5] Hashin, Z.: „Theory of Fibre Reinforced Materials“ University of Pennsylvania, 1972, March. | [17] Biot, M. A.: Journ. of Math. a. Mech. 12 (1963) S. 793. |
| [6] Wang, A. S. D.; Chou, P. C.: J. Appl. Mech. 94 (1972) June S. 611. | [18] Noor, A. K.: Fibre Science a. Technology 8 (1975) S. 81. |
| [7] Ashton, J. E.; Whitney, J. M.: „Theory of Laminated Plates“, Technomic Publishing Co., 1970. | [19] Mau, S. T.; Tong, P.; Pian, H. H.: J. Com. Mat. 6 (1972) April, S. 304 – 311. |
| [8] Lechnickij, S. G.: „Anisotropnye plastinki“, Moskva 1957. | |
| [9] Yang, P. C.; Norris, C. H.; Stavsky, Y.: Int. Journ. Solids a. Structures 2 (1966) S. 665. | |
| [10] Whitney, J. M.; Pagano, N. J.: J. Appl. Mech. 37 (1970) S. 1031. | |
| [11] Ambarcumjan, S. A.: Teorija anisotropnych plastin“, Nauka, Moskva 1967. | |
| [12] Pryor, C. W.; Barker, R. M.: AIAA Journ. 9 (1971) S. 912. | |

Anschrift der Verfasser:

Dr. rer. nat. B. Lauke
 Prof. Dr. sc. nat. R. Barthel
 Akademie der Wissenschaften der DDR
 Institut für Technologie der Fasern
 8012 Dresden
 PSF 411