

Zur Analyse rheologischer Materialfunktionen des Spriggs-6-Parameter-Modells

Dr. Roland Lipp, Dipl.-Ing. Oleg Smirnow, Prof. Dr. Ernst-Otto Reher

1. Einführung

Rheologische Stoffgesetze zur Beschreibung des Fließverhaltens polymerer Stoffe können die gemessenen Materialfunktionen genauer widerspiegeln, wenn sie auf Spektralverteilungen von Stoffeigenschaften basieren.

Es existieren bereits zahlreiche Modelle in differentieller oder integraler Form, mit denen Relaxationszeitspektren darstellbar sind. Ein Modell, welches von einer speziellen Form des Relaxationszeitspektrums ausgeht, ist das Spriggs-Modell [1], [2].

Wie auch bei anderen Spektralmodellen bereitet die Parameteridentifikation der rheologischen Stoffparameter aus den Materialfunktionen, die gemessen wurden, erhebliche Schwierigkeiten.

Es kommt darauf an, möglichst viele Materialfunktionen zur Parameteridentifikation heranzuziehen. Für das Spriggs-Modell sind aus der Literatur bisher nur stationäre Lösungen der Materialfunktionen bekannt. Es soll deshalb versucht werden, die allgemeinen Materialfunktionen sowohl für die einfache Scherströmung als auch für Dehnströmungskinematen herzuleiten, verallgemeinert darzustellen und die Lösungen für das Spannungswachstum dimensionslos anzugeben.

Die Kinematiken der einfachen Scherströmung und der Dehnströmungen sind durch die Formen des Deformationsgeschwindigkeitstensors

$$e = \frac{\dot{\gamma}(t)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad e = \dot{\epsilon}(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2} - 1 \end{pmatrix}$$

definiert.

α ist ein formaler Parameter, wobei gilt

$\alpha = 1$ einachsige Dehnung

$\alpha = 2$ zweiachsige begrenzte Dehnung

$\alpha = 4$ zweiachsige gleiche Dehnung

2. Allgemeine Materialfunktionen des Spriggs-Modells

Das 6-Parameter-Modell von Spriggs lautet

$$\tau = \sum_{i=1}^{\infty} \tau^i, \quad \tau^i(1 + \lambda^i F_{1+k, 2/3(1+k), 0}) = 2 \eta_0^i (1 + \Phi F_{1+\delta, 2/3(1+\delta), 0}) e, \quad (1)$$

$$\lambda^i = \lambda i^{-\beta}, \quad \eta_0^i = \frac{\eta_0}{i^\beta Z(\beta)}, \quad (2)$$

$$F_{a,b,c} r = \dot{r} + r \cdot \omega - \omega \cdot r - a(e \cdot r + r \cdot e) + b(e : r) \delta + c(\delta : r) e$$

$\eta_0, \lambda, \Phi, \beta, k, \delta$ – Modellkonstanten,

$$Z(\beta) = \sum_{i=1}^{\infty} i^{-\beta}. \quad (3)$$

Betrachtet man eine einzelne Komponente der Spannungen des Spriggs-Modells, dann läßt sich das Modell aus dem 8-Parameter-Oldroyd-Modell vereinfachen. Gleiches gilt für einfachere Modelle wie z. B. das Jeffrey-Modell.

Für die Bezeichnungen gelte:

Oldroyd-Modell	Spriggs	=	diese Arbeit	Jeffrey
η_0	η_0	=	η_0	η_0
λ_1	λ	=	λ	λ_1
λ_2	λ'	=	Φ	λ_2
μ_1	$(1 + \epsilon)\lambda$	=	$(1 + k)\lambda$	$a \lambda_1$
μ_2	$(1 + \epsilon')\lambda'$	=	$(1 + \delta)\Phi$	$a \lambda_2$
ν_1	$\frac{2}{3}(1 + \epsilon)\lambda'$	=	$\frac{2}{3}(1 + k)\lambda$	0
ν_2	$\frac{2}{3}(1 + \epsilon')\lambda'$	=	$\frac{2}{3}(1 + \delta)\Phi$	0
μ_0	0	=	0	0
–	α	=	β	–

Außerdem wird definiert:

$$1 - \frac{1}{3}(1 + k)^2 = \bar{c}^2$$

$$1 - \frac{1}{3}(1 + k)(1 + \delta) = d^2$$

Entsprechend der Überlegungen zu der einheitlichen Darstellung von Materialfunktionen, [3], können unabhängige Differentialgleichungen für folgende Größen erhalten werden:

1. Scherung

$$\eta_1^i = \frac{\tau_{12}^i}{\dot{\gamma}} = \frac{p_1^i}{\dot{\gamma}} = \Pi_1^i \eta_0 \quad (4)$$

$$\eta_2^i = \frac{\tau_{11}^i - \tau_{22}^i}{\dot{\gamma}} = \frac{p_2^i}{\dot{\gamma}} = \Pi_2^i \eta_0 \quad (5)$$

$$\eta_3^i = \frac{\tau_{22}^i - \tau_{33}^i}{\dot{\gamma}} = \frac{p_3^i}{\dot{\gamma}} = \Pi_3^i \eta_0 \quad (6)$$

2. Dehnung

$$\eta_{4,\alpha}^i = \frac{(\tau_{11}^i - \tau_{22}^i)\alpha}{\dot{\epsilon}} = \frac{p_{4,\alpha}^i}{\dot{\epsilon}} = \Pi_{4,\alpha}^i \eta_0 \quad (7)$$

$$\eta_{5,\alpha}^i = \frac{(\tau_{33}^i - \tau_{22}^i)\alpha}{\dot{\epsilon}} = \frac{p_{5,\alpha}^i}{\dot{\epsilon}} = \Pi_{5,\alpha}^i \eta_0 \quad (8)$$

Außerdem gilt

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_j^i \quad j = 1(1)5 \quad (9)$$

und

$$\Pi_j = \sum_{i=1}^{\infty} \Pi_j^i \quad (10)$$

Die Vereinfachung des Spriggs-Modells für die angegebenen Kinematiken führt zu den Differentialgleichungen

$$\tau = \sum_{i=1}^{\infty} \tau^i \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \tau_{11}^i + \lambda^i \dot{\tau}_{11}^i - (\lambda^i + \frac{1}{3}(1+k)\lambda^i) \tau_{12}^i \dot{\gamma} = \\ - \eta_0^i (\Phi + \Phi(1+\delta)) \frac{1}{3} \dot{\gamma}^2 \\ \tau_{22}^i + \lambda^i \dot{\tau}_{22}^i + (\lambda^i + \frac{5}{3}(1+k)\lambda^i) \tau_{12}^i \dot{\gamma} \\ = \eta_0^i (\Phi - \Phi(1+\delta)) \frac{1}{3} \dot{\gamma}^2 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tau_{33}^i + \lambda^i \dot{\tau}_{33}^i + \frac{2}{3}(1+k)\lambda^i \tau_{12}^i \dot{\gamma} \\ = \eta_0^i \frac{2}{3}(1+\delta)\Phi \dot{\gamma}^2 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \tau_{12}^i + \lambda^i \dot{\tau}_{12}^i + \frac{1}{2}((\lambda^i - (1+k)\lambda^i) \tau_{11}^i \\ - (\lambda^i + (1+k)\lambda^i) \tau_{22}^i) \dot{\gamma} = \eta_0^i (\dot{\gamma} + \Phi \dot{\gamma}) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \tau_{11}^i + \lambda^i \dot{\tau}_{11}^i + (-\frac{4}{3}(1+k)\lambda^i \dot{\epsilon} \tau_{11}^i \\ - \frac{1}{3}\alpha(1+k)\lambda^i \dot{\epsilon} \tau_{22}^i + (\frac{\alpha}{2} - 1) \frac{2}{3}(1+k)\lambda^i \dot{\epsilon} \tau_{33}^i \end{aligned} \quad (15)$$

$$= 2\eta_0^i [\dot{\epsilon} + \lambda^i \dot{\epsilon} - (2(1+\delta)\Phi - (\frac{\alpha^2}{2} - \alpha + 2) \frac{2}{3}(1+\delta)\Phi) \dot{\epsilon}^2]$$

$$\begin{aligned} \tau_{22}^i + \lambda^i \dot{\tau}_{22}^i + \frac{2}{3}(1+k)\lambda^i \dot{\epsilon} \tau_{11}^i \\ + (\frac{\alpha}{2}(1+k)\lambda^i - \frac{\alpha}{3}(1+k)\lambda^i) \dot{\epsilon} \tau_{22}^i \\ + (\frac{\alpha}{2} - 1) \frac{2}{3}(1+k)\lambda^i \dot{\epsilon} \tau_{33}^i = 2\eta_0^i [-\frac{\alpha}{2}(\dot{\epsilon} + \Phi \dot{\epsilon}) \end{aligned} \quad (16)$$

$$- (\frac{\alpha^2}{2}(1+\delta)\Phi - (\frac{\alpha^2}{2} - \alpha + 2) \frac{2}{3}(1+\delta)\Phi) \dot{\epsilon}^2]$$

$$\begin{aligned} \tau_{33}^i + \lambda^i \dot{\tau}_{33}^i + \frac{2}{3}(1+k)\lambda^i \dot{\epsilon} \tau_{11}^i \\ - (\frac{\alpha}{3})(1+k)\lambda^i \dot{\epsilon} \tau_{22}^i + (\frac{\alpha}{2} - 1) (-\frac{4}{3}(1+k)\lambda^i \dot{\epsilon} \tau_{33}^i = \\ 2\eta_0^i [(\frac{\alpha}{2} - 1)(\dot{\epsilon} + \Phi \dot{\epsilon}) \end{aligned} \quad (17)$$

$$- ((\alpha - 2)^2 \frac{1}{2}(1+\delta)\Phi - (\frac{\alpha^2}{2} - \alpha + 2) \frac{2}{3}(1+\delta)\Phi) \dot{\epsilon}^2]$$

Die Umwandlung der Gleichungssysteme (1) und (2) ergibt die allgemeinen Materialfunktionen

$$p_j = \sum_{i=1}^{\infty} p_j^i \quad (18)$$

$$(\lambda^i)^2 \ddot{p}_1^i + \lambda^i (2 - \lambda^i \frac{\ddot{\gamma}}{\dot{\gamma}}) \dot{p}_1^i + (1 + (\lambda^i c \dot{\gamma})^2 - \lambda^i \frac{\ddot{\gamma}}{\dot{\gamma}}) p_1^i =$$

$$\eta^i (\lambda^i \Phi \ddot{\gamma} + \Phi (1 - \lambda^i \frac{\ddot{\gamma}}{\dot{\gamma}}) \dot{\gamma} + (1 + \lambda^i \Phi d^2 \dot{\gamma}^2) \dot{\gamma})$$

$$(\lambda^i)^3 \ddot{p}_2^i + 3(1 - \lambda^i \frac{\ddot{\gamma}}{\dot{\gamma}}) (\lambda^i)^2 \dot{p}_2^i + (3 + (\lambda^i c \dot{\gamma})^2 - (\lambda^i)^2 \frac{\ddot{\gamma}}{\dot{\gamma}})$$

$$- 6\lambda^i \frac{\ddot{\gamma}}{\dot{\gamma}} + 3(\lambda^i \frac{\ddot{\gamma}}{\dot{\gamma}})^2) \lambda^i p_2^i + (1 + (\lambda^i c \dot{\gamma})^2 - (\lambda^i)^2 \frac{\ddot{\gamma}}{\dot{\gamma}})$$

$$- 3\lambda^i \frac{\ddot{\gamma}}{\dot{\gamma}} + 3(\lambda^i \frac{\ddot{\gamma}}{\dot{\gamma}})^2) p_2^i \quad (19)$$

$$= 2\eta_0^i \dot{\gamma}^2 (\lambda^i - \Phi + \frac{1}{3}(1+k)(k-\delta)\Phi (\lambda^i \dot{\gamma})^2)$$

$$(\lambda^i)^3 \ddot{p}_3^i + 3(1 - \lambda^i \frac{\ddot{\gamma}}{\dot{\gamma}}) (\lambda^i)^2 \dot{p}_3^i + (3 + (\lambda^i c \dot{\gamma})^2 - (\lambda^i)^2 \frac{\ddot{\gamma}}{\dot{\gamma}})$$

$$- 6\lambda^i \frac{\ddot{\gamma}}{\dot{\gamma}} + 3(\lambda^i \frac{\ddot{\gamma}}{\dot{\gamma}})^2) \lambda^i p_3^i + (1 + (\lambda^i c \dot{\gamma})^2 - (\lambda^i)^2 \frac{\ddot{\gamma}}{\dot{\gamma}})$$

$$- 3\lambda^i \frac{\ddot{\gamma}}{\dot{\gamma}} + 3(\lambda^i \frac{\ddot{\gamma}}{\dot{\gamma}})^2) p_3^i \quad (20)$$

$$= \eta_0^i \dot{\gamma}^2 \lambda^i ((k - \delta) (\Phi \lambda^i \ddot{\gamma} - \lambda^i \Phi (\dot{\gamma})^2 + \frac{2-k}{3} \lambda^i \Phi \dot{\gamma}^2 + \Phi \frac{\ddot{\gamma}}{\dot{\gamma}}) + k - \delta \frac{\Phi}{\lambda^i})$$

$$\begin{aligned} & (\lambda^i)^2 \ddot{p}_{4,\alpha}^i + (2 + \lambda^i ((\alpha - 2)(1 - k) \dot{\epsilon} - \frac{\ddot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}})) \lambda^i \dot{p}_{4,\alpha}^i \\ & + (1 + \lambda^i ((\alpha - 2)(1 + k) \dot{\epsilon} - \frac{\ddot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}}) + A) p_{4,\alpha}^i \\ & = (2 + \alpha) \eta_0^i \dot{\epsilon} (1 + \Phi ((\alpha - 2)(1 + \delta) \dot{\epsilon} - \frac{\ddot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}}) + B \\ & + \lambda^i \Phi \frac{\ddot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}} + \Phi \frac{\ddot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}} (2 + \lambda^i ((\alpha - 2)(1 + \delta) \dot{\epsilon} - \frac{\ddot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}}))) \end{aligned} \quad (21)$$

$$A = \begin{cases} -\frac{2}{3} \alpha (\lambda^i)^2 (1 + k)^2 \dot{\epsilon}^2 = \frac{4}{3} (1 + k)^2 \dot{\epsilon}^2, & \alpha = 2 \\ \frac{4}{3} (1 - \alpha) (\lambda^i)^2 (1 + k)^2 \dot{\epsilon}^2 = 0, & \alpha = 1 \\ \frac{\alpha}{3} (\alpha - 4) (\lambda^i)^2 (1 + k)^2 \dot{\epsilon}^2 = 0, & \alpha = 4 \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} 0, & \alpha = 1, \alpha = 4 \\ -\frac{4}{3} \lambda^i \Phi (1 + k) (1 + \delta) \dot{\epsilon}^2, & \alpha = 2 \end{cases}$$

$$p_{5,1}^i = 0, \quad p_{5,1} = 0, \quad (22)$$

$$p_{5,4}^i = p_{4,4}^i, \quad p_{5,4} = p_{4,4} \quad (23)$$

$$(\lambda^i)^2 \ddot{p}_{5,2}^i + \lambda^i \dot{p}_{5,2}^i + (1 + 2(1 + k) \lambda^i \dot{\epsilon} - \lambda^i \frac{\ddot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}}) \cdot \quad (24)$$

$$(\lambda^i \dot{p}_{5,2}^i + p_{5,2}^i) + \frac{4}{3} (1 + k)^2 (\lambda^i)^2 \dot{\epsilon}^2 p_{4,2}^i =$$

$$\begin{aligned} & 2 \eta_0^i \dot{\epsilon} (2 \Phi \dot{\epsilon} (1 + \delta) (1 + 2(1 + k) \lambda^i \dot{\epsilon} - \lambda^i \frac{\ddot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}}) + \lambda^i \Phi \frac{\ddot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}} \\ & + (2 - \lambda^i \frac{\ddot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}}) \Phi \frac{\ddot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}} + 1 - \frac{4}{3} (1 + k) (1 + \delta) \lambda^i \Phi \dot{\epsilon}^2 \end{aligned}$$

3. Spannungswachstum in der einfachen Scherströmung und der Dehnströmung für das Spriggs-Modell

Die Anwendung der unter Punkt 2 hergeleiteten allgemeinen Materialfunktionen wird für den Fall des Spannungswachstums nachfolgend dargestellt. Dabei ist es

$$\Pi_{4,1} = \frac{3}{Z(\beta)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 - (1 + \delta) \Gamma W + [((\delta - k) W - 1) + \Gamma i^\beta] \exp[-i^\beta + (1 + k) W] T}{i^\beta - (1 + k) W} \quad (29)$$

möglich, eine dimensionslose Darstellung zu finden, die auf den folgenden dimensionslosen Größen beruht.

$$\Gamma^i = i^\beta \Gamma = \frac{\Phi}{\lambda^i} \quad W^i = i^\beta W = \lambda^i \dot{\gamma}$$

$$T^i = i^\beta T = \frac{t}{\lambda^i} \quad (25)$$

Die rheologischen Modellparameter k , δ und β stellen ursprünglich dimensionslose Größen dar.

Die Gleichungen (18) bis (21) werden für das Spannungswachstum mit den Anfangsbedingungen

$$p_j^i(-0) = 0 \quad p_j^i(+0) = 0$$

$$\dot{\gamma}(-0) = 0 \quad \dot{\gamma}(+0) = \dot{\gamma}_0$$

$$\dot{\epsilon}(-0) = 0 \quad \dot{\epsilon}(+0) = \dot{\epsilon}_0$$

angewendet.

Es ergeben sich folgende Lösungen:

$$\Pi_1 = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{i^\beta + \Gamma (dW)^2}{i^{2\beta} + (cW)^2} + e^{-i^\beta T} \right.$$

$$\left. \left[\frac{(c^2 - \Gamma d^2 i^\beta) W}{c(i^{2\beta} + (cW)^2)} \sin(cWT) \right. \right. \quad (26)$$

$$\left. + \left(\frac{\Phi}{\lambda} \Gamma - \frac{i^\beta + \Gamma (dW)^2}{c^{2\beta} + (cW)^2} \right) \cos(cWT) \right\}$$

$$\Pi_2 = \frac{2W}{Z(\beta)} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{1 - i^\beta \Gamma + \frac{1}{3} (1 + k) (k \cdot \delta) \cdot i^{-\beta} \Gamma W^2}{i^{2\beta} + (cW)^2} \right.$$

$$\left. + e^{-i^\beta T} \left[\frac{(1 + k) (\delta - k) \Gamma}{3 c^2 i^\beta} - \frac{c^2 - d^2 \Gamma i^\beta}{c^2 (i^{2\beta} + (cW)^2)} \cos(cWT) \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1}{cW} \left(\Gamma - \frac{i^\beta + d^2 \Gamma W^2}{i^{2\beta} + (cW)^2} \right) \sin(cWT) \right\} \quad (27)$$

$$\Pi_3 = \frac{W}{Z(\beta)} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{\frac{1}{3} i^{-\beta} (2 - k) (\delta - k) \Gamma W^2 + k - \delta \Gamma i^\beta}{i^{2\beta} + (cW)^2} \right.$$

$$\left. + e^{-i^\beta T} \left[\frac{(2 - k) (\delta - k) \Gamma}{3 c^2 i^\beta} - \frac{k (c^2 - d^2 \Gamma i^\beta)}{c^2 (i^{2\beta} + (cW)^2)} \cos(cWT) \right. \right.$$

$$\left. + \frac{k}{cW} \left[\Gamma - \frac{i^\beta + d^2 W^2 \Gamma}{i^\beta + (cW)^2} \sin(cWT) \right] \right\} \quad (28)$$

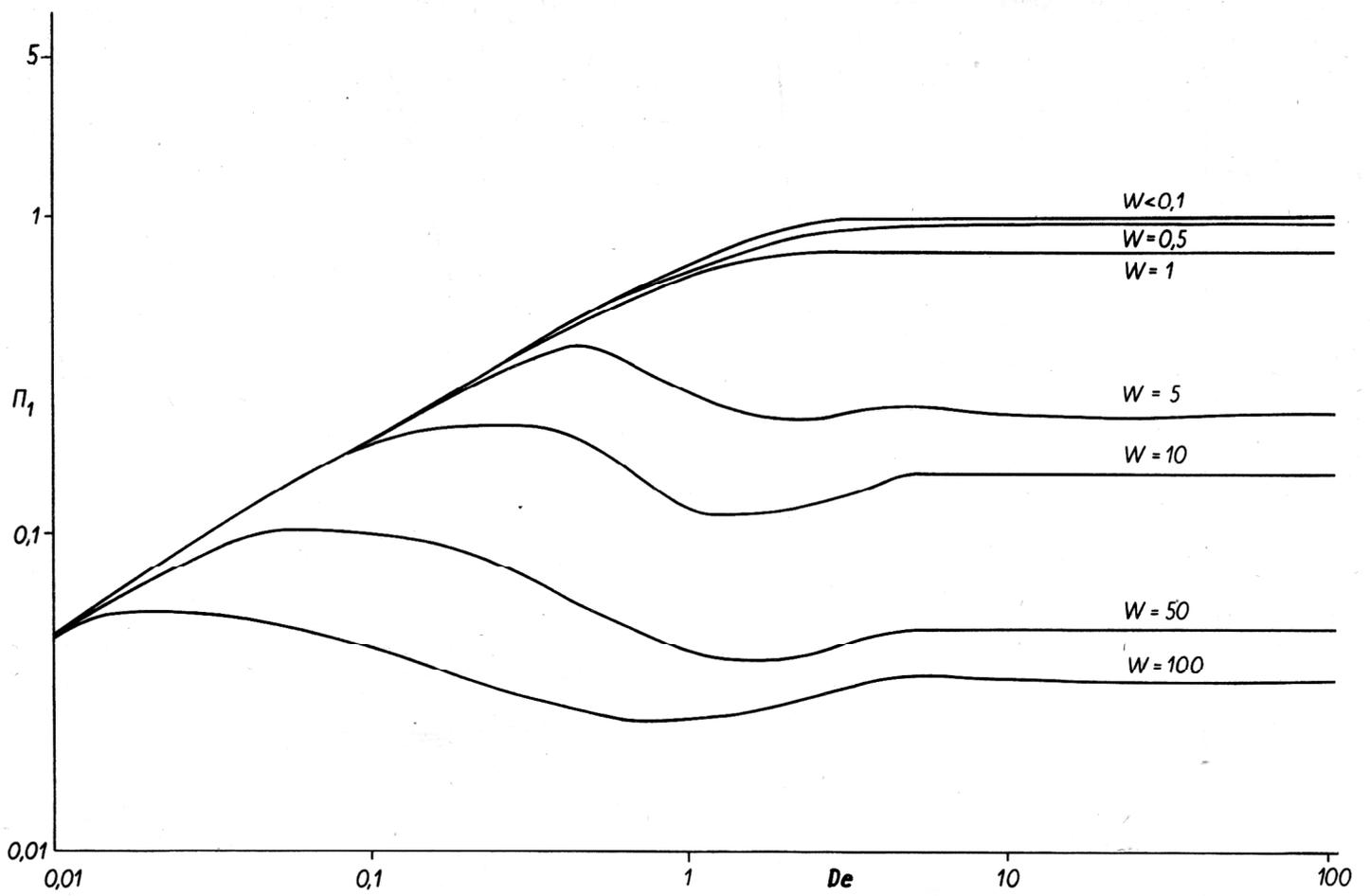
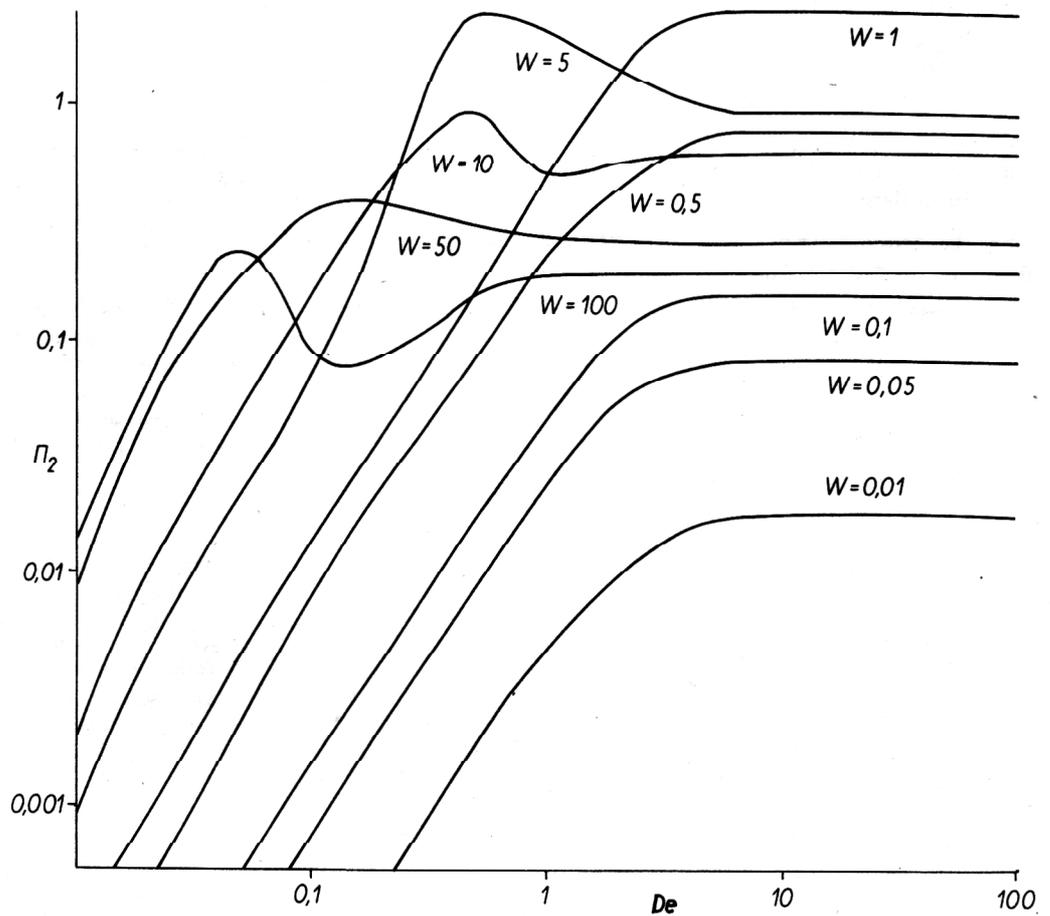
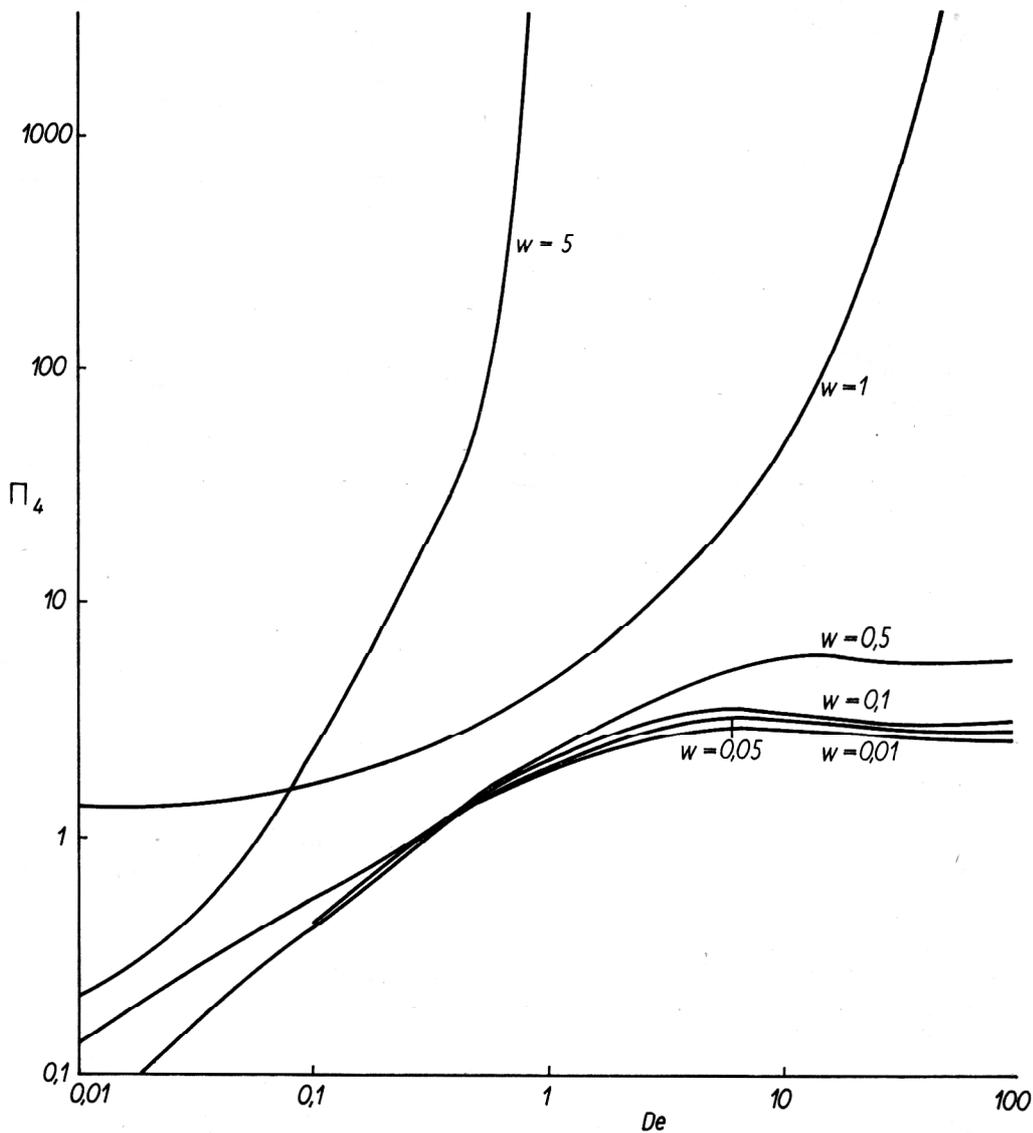


Bild 1
Spannungswachstum der Scherspannung ▲

Bild 2
Spannungswachstum der ersten Normalspannungsdifferenz in der Scherung ▼





Die Darstellung der Verläufe für das Anfahrverhalten in der Scherung und der Dehnung sind in den Bildern 1 bis 3 an einem Beispiel erkennbar.

Über die Anwendung des Spriggs-Modells und insbesondere der abgeleiteten Materialfunktionen wird in späteren Beiträgen berichtet.

Bild 3
Spannungswachstum der ersten Normalspannung in der Dehnung

LITERATUR

- [1] Spriggs, T. W.: CES Vol. 20 (1965) 931 – 940.
- [2] Spriggs, T. W.; Huppler, J. D.; Bird, R. B.: Transactions of the society of rheology 10 : 1, 191 – 213 (1966).
- [3] Lipp, R.; Bergmann, J.; Reher, E.-O.: Acta Polymerica 32 (1981) H. 4, 221 – 224.

Anschrift der Verfasser:

Dr. Roland Lipp,
Dipl.-Ing. Oleg Smirnow
Prof. Dr. Ernst-Otto Reher
Technische Hochschule „Carl Schorlemmer“
4200 Merseburg
Geusaer Straße