

Zur Wechselwirkung bei Mehrfachrissen

W. Sörgel, W. Günther

0. Einleitung

Der Bruch eines belasteten Bauteils wird im allgemeinen durch Inhomogenitäten, insbesondere Risse, ausgelöst. Zur Beurteilung der Bruchsicherheit von solchen Bauteilen ist u. a. die Kenntnis des Spannungs- und Verschiebungsfeldes in der Umgebung der Risse notwendig. Im Mittelpunkt bisheriger Untersuchungen standen vor allem allgemeine ebene und einfache räumliche Einzelrißmodelle, vgl. [1].

In einem spröden Bauteil ist jedoch bei Auftreten eines Risses mit weiteren Rissen in seiner Umgebung zu rechnen. Deshalb haben Untersuchungen zur Wechselwirkung von mehreren Rissen grundlegende Bedeutung.

Als ein einfaches Rißmodell, das qualitative Aussagen zur Wechselwirkung erlaubt, eignet sich die unendliche elastische Ebene mit zwei kollinearen Rissen ungleicher Länge bei statischer Belastung.

In den Arbeiten von Panasjuk, Savruk und Dacyšin [2], [3] wird auf der Grundlage der Funktionentheorie die Berechnung des Spannungs- und Verschiebungsfeldes, speziell der Spannungsintensitätsfaktoren, auf die Lösung eines singulären Integralgleichungssystem zurückgeführt.

Jedoch finden die für einzelne Belastungsfälle angegebenen Lösungen kaum Berücksichtigung bei bruchmechanischen Berechnungen, da eine umfangreiche Auswertung und Interpretation der Lösungsergebnisse nicht vorliegt.

Ziel dieser Arbeit ist es, das Problem ausgehend von dem Spannungsfeld des Einzelrisses mathematisch so zu formulieren, daß eine Erweiterung der Untersuchungen auf die beliebige Lage zweier Risse möglich ist.

Weiterhin ist die Lösung so auszuwerten, daß allgemeine Aussagen zur Wechselwirkung für praktische Berechnungen getroffen werden können.

Im Rahmen der linear elastischen Bruchmechanik reicht die Kenntnis der Spannungsintensitätsfaktoren als charakteristische Größe des Spannungsfeldes aus, um Aussagen zur Rißstabilität zu treffen. Infolgedessen beschränken sich die weiteren Ausführungen im wesentlichen auf die Berechnung dieser Faktoren.

1. Das Spannungsfeld für den Einzelriß in der unendlichen Ebene

Zum besseren Verständnis der mathematischen Formulierung des Problems soll zunächst das Spannungsfeld für den Einzelriß in der unendlichen Ebene kurz betrachtet werden.

Der Riß der Länge $2l$ wird nur an den Rißrändern durch die Normalspannung $\sigma(x)$ und die Schubspannung $\tau(x)$ belastet.

Diese Rißrandbelastungen können zu der komplexen Randbelastung

$$p(x) = \sigma(x) - i\tau(x) \quad |x| < l \quad (1)$$

zusammengefaßt werden.

Es wird nun die komplexe Verschiebungsdichte $g'(x)$ eingeführt

$$g'(x) = -\frac{2\mu}{\kappa+1} i(u^{\pm'}(x) + iv^{\pm'}(x)), \quad (2)$$

in die die Ableitungen der kartesischen Verschiebungskomponenten u, v eingehen:

$$u^{\pm'}(x) = \frac{\partial u^+}{\partial x} - \frac{\partial u^-}{\partial x}, \quad v^{\pm'}(x) = \frac{\partial v^+}{\partial x} - \frac{\partial v^-}{\partial x}. \quad (3)$$

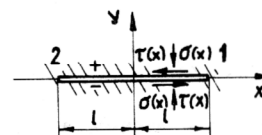


Bild 1
Einzelriß

Das (+) Zeichen weist dabei auf den oberen und das (-) Zeichen auf den unteren Rißrand hin. μ bezeichnet den Schubmodul und κ eine von der Querkontraktionszahl ν abhängige Größe.

Für den ebenen Verzerrungszustand (EVZ) bzw. ebenen Spannungszustand (ESZ) gilt:

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{für EVZ} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{für ESZ} \end{cases} \quad (4)$$

Entsprechend den Arbeiten [2], [3] kann unter Verwendung funktionentheoretischer Kenntnisse die Randbedingung in folgende Gestalt gebracht werden

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{g'(t)}{t-x} dt. \quad (5)$$

Diese Gleichung mit dem Cauchy-Kern $1/(t-x)$ ist eine singuläre Integralgleichung für die Bestimmung der komplexen Verschiebungsdichte $g'(x)$. Ihre Lösung ist exakt möglich [3]:

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{l^2-x^2}} \left[-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{l^2-t^2} p(t)}{t-x} dt + C \right], \quad (6)$$

wobei sich die reelle Konstante C aus der zusätzlichen Bedingung für die Verschiebung

$$\int_{-1}^1 g'(t) dt = g(1) - g(-1) = 0 \quad (7)$$

zu Null ergibt: $C = 0$.

Mit der bekannten komplexen Verschiebungsdichte läßt sich dann das Spannungsfeld berechnen:

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{g'(t)}{t-\bar{z}} + \frac{\overline{g'(t)}}{t-z} \right] dt, \quad (8)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{1}{t-z} + \frac{1}{t-\bar{z}} \right) g'(t) + \frac{z-\bar{z}}{(t-\bar{z})^2} \overline{g'(t)} \right] dt.$$

Die überstrichenen Größen \bar{z} und $\overline{g'(t)}$ sind dabei die konjugiert komplexen Größen zu z und $g'(t)$.

Der in der Literatur (vgl. [4]) häufig untersuchte Sonderfall der konstanten Rißrandbelastung $p(x) = \overset{\circ}{p} = \overset{\circ}{\sigma} - i\overset{\circ}{\tau} = \text{konst.}$ soll hier noch kurz betrachtet werden.

Für die Verschiebungsdichte erhält man aus Gl. (6):

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}} (\overset{\circ}{\sigma} - i\overset{\circ}{\tau}). \quad (9)$$

Die Integration liefert die komplexe Verschiebung längs des Rißrandes:

$$g(x) = -\sqrt{l^2 - x^2} (\overset{\circ}{\sigma} - i\overset{\circ}{\tau}). \quad (10)$$

Mit Berücksichtigung der Definition (2) führt die Trennung in Real- und Imaginärteil auf die Verschiebungssprünge in den Normal- und Tangentialverschiebungen

$$v^+ - v^- = -\frac{\kappa+1}{2\mu} \sqrt{l^2 - x^2} \overset{\circ}{\sigma}, \quad (11)$$

$$u^+ - u^- = -\frac{\kappa+1}{2\mu} \sqrt{l^2 - x^2} \overset{\circ}{\tau}.$$

Es ist ersichtlich, daß die Normalbelastung $\overset{\circ}{\sigma}$ (symmetrische Rißbelastung) einen Normalverschiebungssprung und die Schubbelastung $\overset{\circ}{\tau}$ (antisymmetrische Rißbelastung) einen Tangentialverschiebungssprung hervorruft. Die Verschiebungssprünge haben dabei eine elliptische Form:

$$\left(\frac{v^+ - v^-}{-\frac{\kappa+1}{2\mu} \overset{\circ}{\sigma} l} \right)^2 + \left(\frac{x}{l} \right)^2 = 1, \quad (12)$$

$$\left(\frac{u^+ - u^-}{-\frac{\kappa+1}{2\mu} \overset{\circ}{\tau} l} \right)^2 + \left(\frac{x}{l} \right)^2 = 1.$$

Für die Spannungskomponenten längs der x-Achse ($|x| > l$) ergeben sich aus Gl. (8) mit der Verschiebungsdichte (9) die einfachen Ausdrücke:

$$\sigma_x = \sigma_y = \overset{\circ}{\sigma} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - l^2}} \right), \quad (13)$$

$$\tau_{xy} = \overset{\circ}{\tau} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - l^2}} \right).$$

Sie enthalten die für Rißprobleme typische Wurzelsingularität an den Rißspitzen $x = \pm l$.

2. Die Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren (SIFen)

Die bekannten Kriterien der Rißbruchmechanik erfordern nicht die Kenntnis des gesamten Spannungsfeldes, sondern nur die Spannungsintensitätsfaktoren, die den Spannungs- und Verschiebungszustand in Rißspitzenumgebung charakterisieren. Es kann nun ein Zusammenhang zwischen der komplexen Verschiebungsdichte $g'(x)$ und diesen Faktoren gefunden werden. Ausgangspunkt für die Herleitung dieses Zusammenhangs ist die Lösung für die unendliche Ebene mit halbunendlichem Riß.

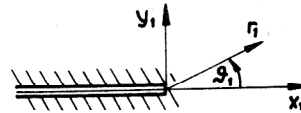


Bild 2
Halbunendlicher Riß

Die Verschiebungsableitungen lassen sich in folgender Gestalt aufschreiben (vgl. [5]):

$$2\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + i \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} r_1^{\frac{n}{2}-1} \left\{ A_n \left[\kappa e^{i(\frac{n}{2}-1)\vartheta_1} + (-1)^n e^{-i(\frac{n}{2}-1)\vartheta_1} \right] + \bar{A}_n \left(\frac{n}{2}-1 \right) e^{-i(\frac{n}{2}-1)\vartheta_1} (1 - e^{2i\vartheta_1}) \right\}. \quad (14)$$

Sie nehmen an der Rißspitze $r_1 \rightarrow 0$ durch das singuläre Glied $1/\sqrt{r_1}$ für $n = 1$ unendlich große Werte an.

Die komplexen Konstanten

$$A_n = a_n^R + i a_n^J \quad \text{bzw.} \quad \bar{A}_n = a_n^R - i a_n^J \quad (15)$$

enthalten die verallgemeinerten SIFen a_n^R und a_n^J .

Für die Verschiebungsableitung längs der Rißränder erhält man aus Gl. (14) für das obere Rißufer:

$$\vartheta_1 = \pi:$$

$$2\mu \left(\frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} + i \frac{\partial v_1^+}{\partial x_1} \right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} r_1^{\frac{n}{2}-1} A_n \left[\kappa e^{i\frac{\pi n}{2}} + (-1)^n e^{-i\frac{\pi n}{2}} \right] \quad (16)$$

und für das untere Rißufer:

$$\vartheta_1 = -\pi$$

$$\left(2\mu \frac{\partial u_1^-}{\partial x_1} + i \frac{\partial v_1^-}{\partial x_1} \right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} r_1^{\frac{n}{2}-1} A_n \left[\kappa e^{-i\frac{\pi n}{2}} + (-1)^n e^{i\frac{\pi n}{2}} \right]. \quad (17)$$

Aus der Differenz dieser beiden Gleichungen folgt schließlich eine analog zu (2) eingeführte komplexe Verschiebungsdichte

$$-i \frac{2\mu}{\kappa+1} (u_1^{\pm'} + iv_1^{\pm'}) = \sum_{n=1,3}^{\infty} n r_1^{\frac{n-1}{2}} A_n (-1)^{\frac{n+1}{2}} \quad (18)$$

Durch diese Reihendarstellung wird nun die komplexe Verschiebungsdichte $g'(x)$ eines beliebigen Rißproblems in Rißspitzenumgebung approximiert.

Für die Rißspitze 1 des Einzelrisses (Bild 1) gilt:

$$g'(x) \approx \sum_{n=1,3}^{\infty} n (1-x)^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{\frac{n+1}{2}} A_n \quad (19)$$

bzw.

$$g'(x) \approx -\frac{A_1}{\sqrt{1-x}} + 3\sqrt{1-x} A_3 - \dots \quad (20)$$

Analog dazu kann für die Rißspitze 2 die Approximation gefunden werden

$$g'(x) \approx \sum_{n=1,3}^{\infty} n (1+x)^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{\frac{n+1}{2}} A_n \quad (21)$$

Die zu $n=1$ gehörenden Konstanten a_1^R, a_1^J stehen mit den bekannten Spannungsintensitätsfaktoren K_I und K_{II} in Verbindung. Sie können aus (19) in folgender Weise berechnet werden

$$K_I - iK_{II} = \sqrt{2\pi} (a_1^R + ia_1^J) = -\sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x} g'(x) \quad (22)$$

Für die Rißspitze 2 ergibt sich analog

$$K_I - iK_{II} = \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1+x} g'(x) \quad (23)$$

3. Zwei kollineare Risse

Wir betrachten nun das eigentliche Problem, zwei kollineare Risse beliebiger Länge in der unendlichen Ebene. Die Risse liegen auf der x -Achse und haben eine Länge von $2l_1$ bzw. $2l_2$. Die Rißmittelpunkte sind Ursprung der Koordinatensysteme x_1, y_1 bzw. x_2, y_2 und haben einen Abstand d voneinander.

Die Rißränder sind durch Normal- und Schubspannungen $\sigma_1(x_1), \sigma_2(x_2)$ und $\tau_1(x_1), \tau_2(x_2)$ belastet.

Diese Randbelastungen bilden an jedem Riß eine Gleichgewichtsgruppe. Sie können zu den komplexen Größen $p_1(x_1)$ und $p_2(x_2)$ zusammengefaßt werden

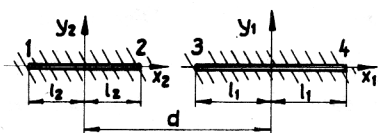


Bild 3
Zwei kollineare Risse

$$p_1(x_1) = \sigma_1(x_1) - i\tau_1(x_1) \quad |x_1| < l_1, \quad (24)$$

$$p_2(x_2) = \sigma_2(x_2) - i\tau_2(x_2) \quad |x_2| < l_2$$

Das Spannungsfeld für zwei kollineare Risse ergibt sich durch entsprechende Superposition der Spannungsausdrücke für den Einzelriß (vgl. Gl. (8)).

An den Rißrändern sind nun noch die Spannungsrandbedingungen zu erfüllen. Unter Beachtung der Transformationsbeziehung

$$x_2 = x_1 + d \quad \text{bzw.} \quad x_1 = x_2 - d \quad (25)$$

führt dies schließlich auf das singuläre Integralgleichungssystem für die komplexen Verschiebungsdichten $g'_1(x_1)$ und $g'_2(x_2)$:

$$\begin{aligned} \pi p_1(x_1) &= \int_{-l_1}^{l_1} \frac{g'_1(t)}{t-x_1} dt + \int_{-l_2}^{l_2} \frac{g'_2(t)}{t-x_1-d} dt \\ &\quad |x_1| < l_1, \\ \pi p_2(x_2) &= \int_{-l_1}^{l_1} \frac{g'_1(t)}{t-x_2+d} dt + \int_{-l_2}^{l_2} \frac{g'_2(t)}{t-x_2} dt \\ &\quad |x_2| < l_2. \end{aligned} \quad (26)$$

Bei weit voneinander entfernten Rissen, d. h. $d \gg l_1, l_2$, reduziert sich das Integralgleichungssystem auf zwei getrennte Integralgleichungen für Einzelrisse, da dann die regulären Integrale in Gln. (26), die die gegenseitige Rißbeeinflussung charakterisieren, vernachlässigt werden können.

Um die Eindeutigkeit der Rißrandverschiebungen zu sichern, müssen die gesuchten komplexen Verschiebungsdichten noch die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\int_{-l_1}^{l_1} g'_1(t) dt = 0, \quad \int_{-l_2}^{l_2} g'_2(t) dt = 0 \quad (27)$$

Ähnliche Gleichungssysteme treten auch bei Kontaktproblemen auf. Die analytische Lösung solcher Gleichungssysteme gelingt noch in geschlossener Form, jedoch mit einem relativ großen mathematischen Aufwand. Im weiteren wird zunächst der Lösungsweg kurz aufgezeigt. Danach erfolgt eine Auswertung der Lösung für den Sonderfall der konstanten Rißbelastung.

4. Lösung des Integralgleichungssystems

Bei der analytischen Lösung des Integralgleichungssystems (26) geht man von der Lösung der Integralgleichung (6) aus.

Damit kann z. B. die zweite Gleichung von (26) nach der Verschiebungsdichte $g'_2(x_2)$ aufgelöst werden

$$\begin{aligned} g'_2(x_2) &= \frac{1}{\pi \sqrt{l_2^2 - x_2^2}} \left[- \int_{-l_2}^{l_2} \frac{\sqrt{l_2^2 - t^2} p_2(t)}{t - x_2} dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_{-l_2}^{l_2} \frac{\sqrt{l_2^2 - t^2}}{t - x_2} \int_{-l_1}^{l_1} \frac{g'_1(s)}{s - t + d} ds dt \right] \end{aligned} \quad (28)$$

Wird nun im zweiten Integral die Integrationsreihenfolge vertauscht und über t integriert, so nimmt die Gl. (28) schließlich die Gestalt an:

$$g_2'(x_2) = \frac{1}{\pi \sqrt{l_2^2 - x_2^2}} \left[\int_{-l_2}^{l_2} \frac{\sqrt{l_2^2 - t^2} p_2(t)}{t - x_2} dt + \int_{-l_1}^{l_1} \frac{\sqrt{(s+d)^2 - l_2^2} g_1'(s)}{x_2 - s - d} ds \right]. \quad (29)$$

Setzt man diesen Ausdruck in die erste Gleichung von (26) ein, so ergibt sich nur noch eine Integralgleichung für $g_1'(x_1)$, die nach einigen Umformungen wieder auf eine analoge Form von (5) gebracht werden kann.

Die Lösung dieser Integralgleichung lautet schließlich:

$$g_1(x_1) = \frac{1}{\pi \sqrt{((x_1+d)^2 - l_2^2)(l_1^2 - x_1^2)}} \left[\int_{-l_1}^{l_1} \frac{\sqrt{((t+d)^2 - l_2^2)(l_1^2 - t^2)} p_1(t)}{t - x_1} dt + \int_{-l_2}^{l_2} \frac{\sqrt{((d-s)^2 - l_1^2)(l_2^2 - s^2)} p_2(s)}{s - x_1 - d} ds + D_1 \right]. \quad (30)$$

Auf völlig analogem Wege findet man die Verschiebungsdichte $g_2'(x_2)$. Sie unterscheidet sich von $g_1'(x_1)$ dadurch, daß l_1, x_1, p_1, d durch $l_2, x_2, p_2, -d$ ersetzt ist. Die noch zu bestimmenden Konstanten ergeben sich aus den zwei Bedingungen (27).

5. Auswertungen für konstante Rißbelastungen

Die folgenden Auswertungen beschränken sich auf den Sonderfall der konstanten Rißbelastung:

$$p_1(x_1) = p_2(x_2) = p = \sigma - i\tau = \text{konst.} \quad (31)$$

Diese Auswertungen schließen auch den Fall der Ebene mit schräger Belastung im Unendlichen und spannungsfreien Rißrändern ein, da dieser Fall entsprechend dem Superpositionsprinzip auf den betrachteten zurückgeführt werden kann. Im Bild 4 ist dies veranschaulicht.

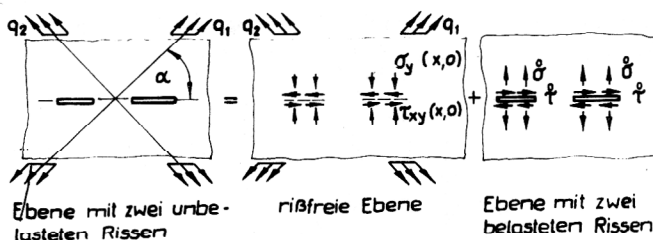


Bild 4
Vorgehensweise bei unbelasteten Rissen

Die einfache Berechnung der Spannungen längs der fiktiven Rißränder für die rißfreie Ebene führt auf

$$\sigma_y(x,0) - i\tau_{xy}(x,0) = \frac{1}{2} (q_1 + q_2 + (q_2 - q_1) e^{2i\alpha}). \quad (32)$$

Als Rißrandbelastungen für die rißbehaftete Ebene sind nun die entgegengesetzt gerichteten Spannungen anzusetzen:

$$\sigma - i\tau = -(\sigma_y(x,0) - i\tau_{xy}(x,0)). \quad (33)$$

Für die betrachtete konstante Belastung (31) vereinfacht sich der Ausdruck (30) zu

$$g_1'(x_1) = \frac{x_1(x_1+d) - \frac{l_1^2}{2} + \frac{D_1}{\pi p}}{\sqrt{((x_1+d)^2 - l_2^2)(l_1^2 - x_1^2)}} p. \quad (34)$$

Die verbleibende Konstante D_1 wird aus der ersten Gleichung von (27) bestimmt. Nach geeigneter Transformation führt diese Gleichung auf vollständige elliptische Integrale erster und zweiter Gattung ($K(k)$ und $E(k)$). Die Konstante D_1 ergibt sich schließlich zu:

$$\frac{2D_1}{\pi p} = d^2 - l_2^2 - (d^2 - (l_1 - l_2)^2) \frac{E(k)}{K(k)}, \quad (32)$$

wobei für die Modulwerte k gilt:

$$k = \sqrt{\frac{4l_1 l_2}{d^2 - (l_1 - l_2)^2}}. \quad (33)$$

Gemäß den Gln. (22) und (23) erhält man dann die Spannungsintensitätsfaktoren für den linken Riß im Bild 3

$$K_I^2 - iK_{II}^2 = \frac{p\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{(l_2 \pm d)^2 - l_1^2 - (d^2 - (l_1 - l_2)^2) \frac{E(k)}{K(k)}}{\sqrt{l_2((l_2+d)^2 - l_1^2)}} \quad (34)$$

und für den rechten Riß

$$K_I^4 - iK_{II}^4 = \frac{p\sqrt{\pi}}{2} \frac{(l_1 \mp d)^2 - l_2^2 - (d^2 - (l_1 - l_2)^2) \frac{E(k)}{K(k)}}{\sqrt{l_1((l_1 \mp d)^2 - l_2^2)}} \quad (35)$$

Dabei kennzeichnen die hochgestellten Indizes 1 und 2 bzw. 3 und 4 bei K_I und K_{II} die Spannungsintensitätsfaktoren für die Rißspitzen 1 und 2 bzw. 3 und 4 (vgl. Bild 3).

Die weiteren Auswertungen beziehen sich auf die symmetrische Rißbelastung $p = \sigma$ ($\tau = 0$). Dies bedeutet keine wesentliche Einschränkung, da die getroffenen Aussagen analog für die antisymmetrische Rißbelastung $p = -i\tau$ ($\sigma = 0$) gelten.

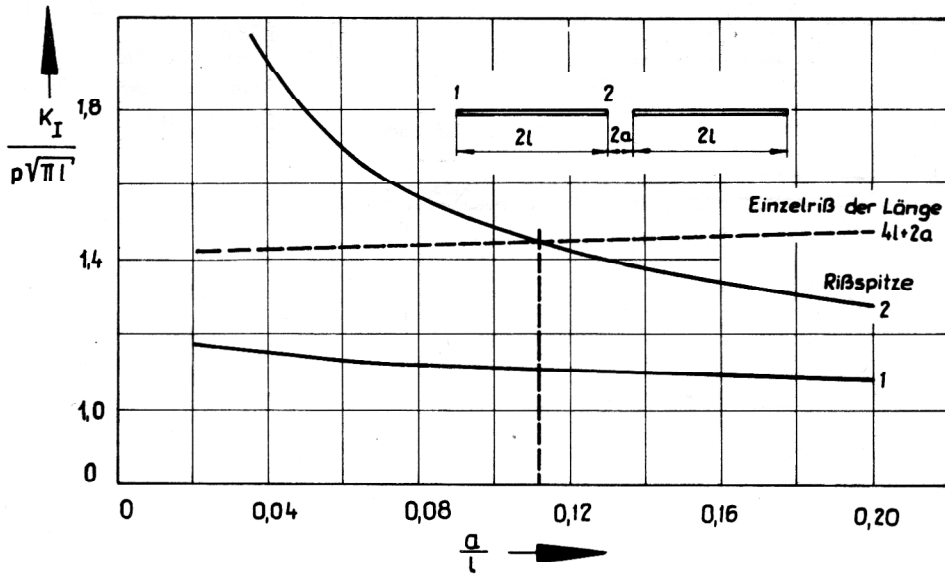


Bild 5
 Abhängigkeit der Spannungsintensitätsfaktoren für $l_1/l_2 = 1$

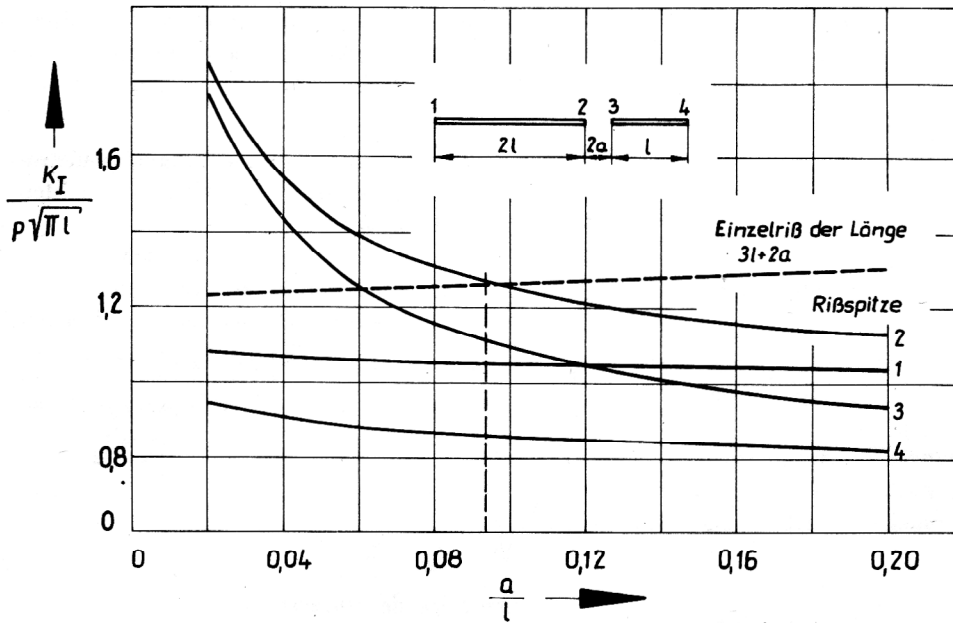


Bild 6
 Abhängigkeit der Spannungsintensitätsfaktoren für $l_1/l_2 = 0,5$

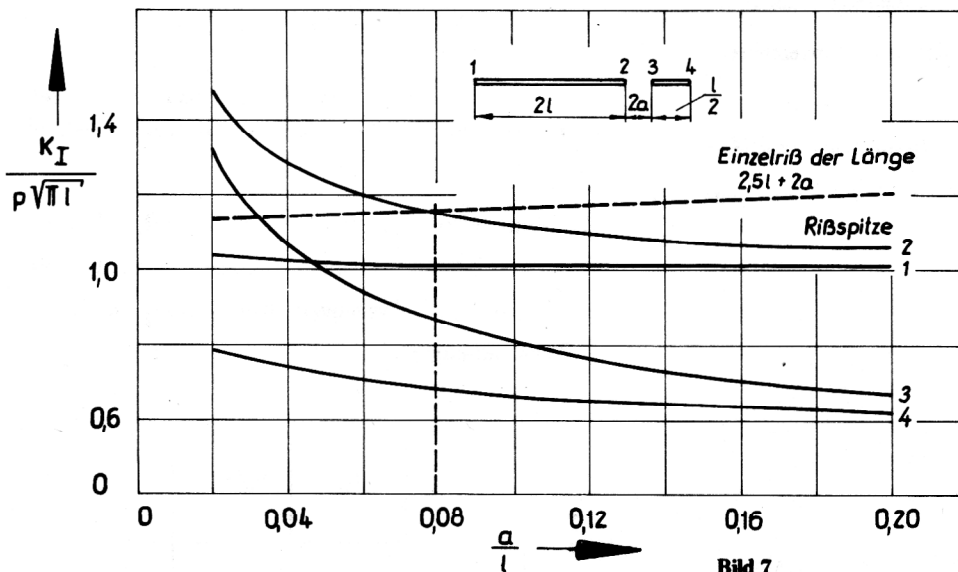


Bild 7
 Abhängigkeit der Spannungsintensitätsfaktoren für $l_1/l_2 = 0,25$

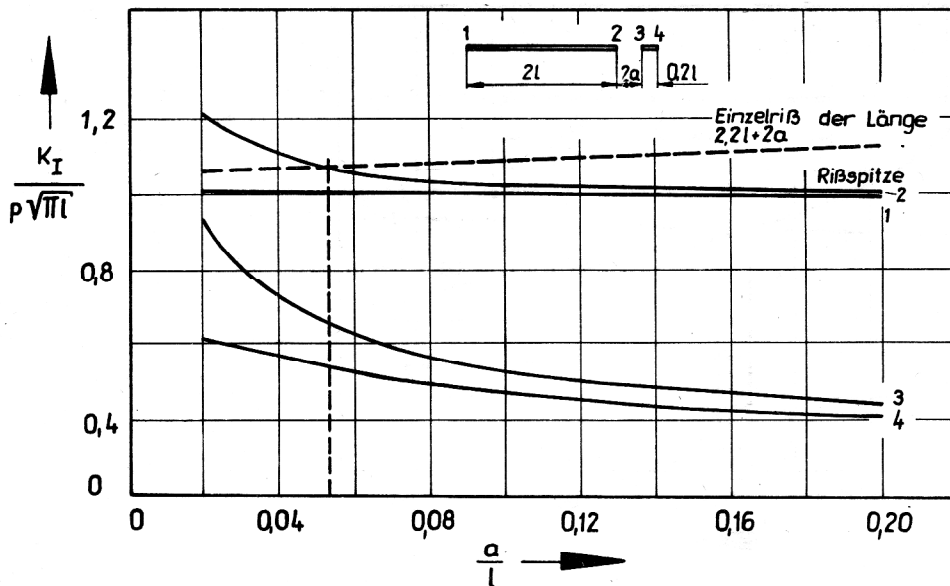


Bild 8
Abhängigkeit der
Spannungsintensitätsfaktoren
für $l_1/l_2 = 0,1$

In den Bildern 5 bis 8 ist die Abhängigkeit der bezogenen Spannungsintensitätsfaktoren

$$\bar{K}_I = \frac{K_I}{p \sqrt{\pi l_2}}$$

vom Abstand der beiden Risse $\frac{a}{l_2}$ für verschiedene

Verhältnisse $\frac{l_1}{l_2} \leq 1$ dargestellt.

Es lassen sich daraus folgende Schlussfolgerungen ableiten:

1. Die Spannungsintensitätsfaktoren für die „inneren“ Rißspitzen (Rißspitzen 2, 3) sind immer größer als für die „äußeren“ (Rißspitzen 1, 4).

Die Unterschiede in den Spannungsintensitätsfaktoren, die die Wechselwirkung zwischen den Rissen charakterisieren, werden mit zunehmender Brückenlänge $\frac{a}{l_2}$ schnell kleiner.

In der Tabelle 1 sind für die verschiedenen Rißlängenverhältnisse l_1/l_2 die Schrankenwerte der Brückenlänge $\frac{a}{l_2}$ angegeben, ab denen die Unterschiede

$1 - \bar{K}_I^4 / \bar{K}_I^3$ zwischen den Spannungsintensitätsfaktoren \bar{K}_I^2 und \bar{K}_I^1 bzw. \bar{K}_I^3 und \bar{K}_I^4 kleiner als 10 % sind.

Tabelle 1

$\frac{l_2}{l_1}$	1	0,5	0,25	0,1
$\frac{a}{l_2}$	0,29	0,17	0,08	0,04
$\frac{a}{l_2}$		0,25	0,18	0,12

Die Werte in Tabelle 1 zeigen, daß erst bei sehr eng benachbarten Rissen (Verhältnis der Brückenlänge

zur Länge des größten Risses kleiner als 30 %) die Wechselwirkung zwischen den Rissen bei praktischen Berechnungen zu berücksichtigen ist. Sind die Brückenlängen größer als die halbe Länge des großen Risses, können die Risse als Einzelrisse betrachtet werden.

2. Wie zu erwarten, tritt der größte Spannungsintensitätsfaktor an der „inneren“ Rißspitze des größten Risses (Rißspitze 2) auf.

Entsprechend den Kriterien der Rißbruchmechanik [5] beginnt die Rißausbreitung an dieser Spitze. Folglich können die weiteren Betrachtungen auf diesen Spannungsintensitätsfaktor \bar{K}_I^2 beschränkt werden.

Vergleicht man nun \bar{K}_I^2 mit dem Spannungsintensitätsfaktor für den Einzelriß der Länge $2(l_1 + l_2 + a)$

$$\bar{K}_I - \sqrt{1 + \frac{l_1}{l_2} + \frac{a}{l_2}}$$

so können folgende Aussagen nach den Kriterien der Rißbruchmechanik [5] getroffen werden:

- bei $\frac{\bar{K}_I^2}{\bar{K}_I} > 1$ bleibt nach Zerreißen der Brücke der Riß stabil,
- bei $\frac{\bar{K}_I^2}{\bar{K}_I} < 1$ breitet sich der Riß nach Zerreißen der Brücke weiter instabil aus.

Die entsprechenden Brückenabstände a/l_1 , die den Grenzfall $\bar{K}_I^2/\bar{K}_I = 1$ charakterisieren, sind für die verschiedenen Rißlängenverhältnisse l_1/l_2 in Tabelle 2 zusammengefaßt.

Tabelle 2

$\frac{l_1}{l_2}$	1	0,5	0,25	0,1
$\frac{a}{l_2}$	0,112	0,094	0,079	0,054

Aus den Zahlenwerten der Tabelle 2 ist ersichtlich, daß nur bei sehr eng benachbarten Rissen (Verhältnis der Brückenlänge zur Länge des größten Risses kleiner als 10 %) nach Aufreißen der Brücke der dann entstehende Einzelriß stabil bleibt.

6. Zusammenfassung

Zur Untersuchung der Wechselwirkung zwischen Rissen dient das Modell der unendlichen elastischen Ebene mit zwei kollinearen Rissen ungleicher Länge bei statischer Belastung. Ausgehend von dem Spannungsfeld für den Einzelriß führt die mathematische Formulierung des Problems auf ein singuläres Integralgleichungssystem für die komplexen Verschiebungsdichten längs der Rißränder. Die analytische Lösung des Integralgleichungssystems wird für den Sonderfall der konstanten Rißrandbelastung ausgewertet. Die Spannungsintensitätsfaktoren, die sich einfach aus den Verschiebungsdichten berechnen, werden für verschiedene Rißabstände und Rißgrößen ermittelt. Die Ergebnisse, die in Diagrammen zusammengestellt sind, zeigen, daß Wechselwirkungseffekte erst bei sehr eng benachbarten Rissen bedeutsam werden.

LITERATUR

- [1] Sih, G.C. (Herausg.): *Mechanics of Fracture*, vol. 1 – 4. Noordhoff Int. Publ., Leyden 1973 – 1977.
- [2] Savruk, M.P.: *Dvumernye zadaci uprugosti dlja tel s tresčinami*. Naukova dumka, Kiev 1981.
- [3] Panasjuk, V.V./Savruk, M.P./Dacyšin, A.P.: *Raspredele- nia naprjaženij okolo tresčin v plastinach i oboločkah*, Naukova dumka, Kiev 1976.
- [4] Hahn, H.G.: *Bruchmechanik*. Verlag B.G. Teubner, Stuttgart 1976.
- [5] Günther, W.: *Wiss. Beitr., IH Zwickau*, 2 (1976) 4, S. 86 – 96.
- [6] Fischer, K.-F./Günther, W.: *Maschinenbautechnik*, 31 (1982) 3, S. 132 – 135.

Anschrift der Autoren:
Doz. Dr.-Ing. W. Sörgel
Dr.-Ing. W. Günther
Ingenieurhochschule Zwickau
Abt. Mathematik/Naturwissenschaften
9541 Zwickau
Dr.-Friedrichs-Ring 2A