

Näherungsweise Zusammenhang zwischen subkritischem Rißwachstum und Ermüdung von Glas im Fall nichtintegrierbarer Funktionen

Christian Ullner

1. Problemstellung

Das Ermüdungsverhalten von Glas und anderen anorganischen spröden Werkstoffen wird vom subkritischen Wachstum vorhandener Mikrorisse bestimmt [1], [2]. Durch Messung der Geschwindigkeit makroskopischer Risse in speziellen Proben (DCB-Probe [1], DT-Probe [3]) als Funktion des Spannungsintensitätsfaktors kann das Ermüdungsverhalten des betreffenden Werkstoffes berechnet werden, sofern das Wachstum von Mikro- und Makrorissen als vergleichbar vorausgesetzt wird [4], [5]. Die Vorhersage des Ermüdungsverhaltens beruht auf einer Integration der Rißwachstumsleichung bis zum Erreichen des Bruchkriteriums

$$\frac{da}{dt} = V \left\{ K[\sigma(t), a] \right\} \quad (1)$$

$$a = a_0 \quad \text{für } t = t_0$$

$$V = V_c$$

$$) \quad \text{für } t = t_B$$

$$K = K_c$$

a Rißlänge

t Zeit

V Rißgeschwindigkeit

K Spannungsintensitätsfaktor

σ äußere Belastung

a_0 Anfangsrißlänge

t_0 Anfangszeitpunkt

t_B Endzeitpunkt (Bruchzeit)

V_c, K_c kritische Werte von V und K

Die in Gl. (1) gewählte Form dient der Darstellung des funktionellen Zusammenhangs der beteiligten Größen:

$V\{K\}$ gemessene Rißwachstumsfunktion

$K[\sigma, a]$ spezielle Form des Spannungsintensitätsfaktors

$\sigma(t)$ zeitliche Belastungsfunktion, z. B.

$\sigma = \sigma_0$ (statische Ermüdung) oder

$\sigma = \dot{\sigma} t$ (in der keramischen Fachliteratur als dynamische Ermüdung bezeichnet).

In der Literatur sind bisher lediglich die einfachen Fälle behandelt worden, die eine geschlossene analytische Integration erlauben, z. B. [6]:

Potentielle Rißwachstumsfunktion $V = V_c \left(\frac{K}{K_c} \right)^n$ (2)
 n -Materialkonstante

Spannungsintensitätsfaktor K in der angenäherten Form $K = K_I = Y \sigma \sqrt{a}$ (3)

Y geometrische Konstante

dynamische Ermüdung $\sigma = \dot{\sigma} t$ (4)
 $\dot{\sigma}$ Spannungsanstieg

In der vorliegenden Arbeit wird auf einen einfachen näherungsweise Zusammenhang zwischen Rißwachstum und Ermüdung aufmerksam gemacht, der zur Berechnung der Ermüdungskurven im Fall nichtintegrierbarer Funktionen verwendet werden kann. Eine Fehlerabschätzung der Näherung zeigt die Grenzen ihrer Anwendbarkeit.

2. Vorschlag einer Näherungslösung als Ergebnis von Modellrechnungen

Die Rißwachstumsleichung, Gl. (1), wurde für eine Reihe von Fällen numerisch integriert [4]. In Bild 1 werden die Ergebnisse zusammenfassend veranschaulicht. Rißwachstumskurve, statische und dynamische Ermüdungskurve sind in einem Diagramm enthalten. Als Rißwachstumsfunktion ist die typische 3-Bereichskurve [7] gewählt. Infolge des logarithmischen Maßstabs für Abszisse und Ordinate bedeuten die Geraden Potenzfunktionen der Rißgeschwindigkeit vom Spannungsintensitätsfaktor K_I (Gl. (2)). Verwendet man als Ordinatenwerte die normierten Größen

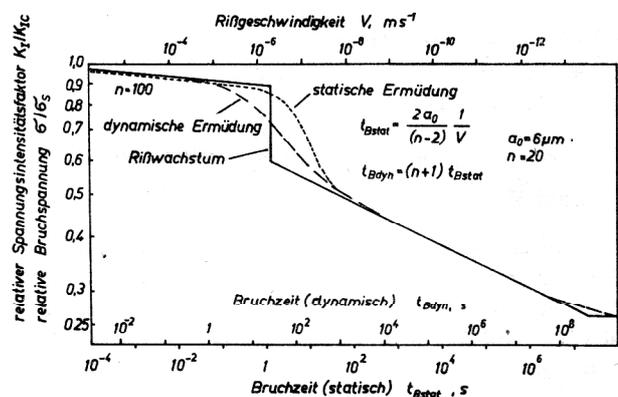


Bild 1
Ergebnis der numerischen Integration der Rißwachstumsleichung mit drei Bereichen

$$K_N = \frac{K_I}{K_{Ic}} \quad (5)$$

(K_{Ic} kritischer Spannungsintensitätsfaktor)

$$\text{bzw. } \sigma_N = \frac{\sigma}{\sigma_S} \quad (6)$$

(σ_S rißwachstumsfreie Festigkeit),

so gilt für ausgedehnte Bereiche in Bild 1 näherungsweise eine Proportionalität zwischen Bruchzeit und reziproker Rißgeschwindigkeit. In diesen Bereichen werden die Ermüdungskurven lediglich von einem Teilstück der Rißwachstumskurve bestimmt. Beispielsweise ist die Bruchzeit für $\sigma_N = 0,4$ nahezu unabhängig vom Verlauf der Rißwachstumskurve oberhalb von $\sigma_N = 0,6$. Aus Bild 1 ist auch ersichtlich ($\sigma_N \approx 0,7$), daß kleine Werte des Anstieges

$$n = \frac{d(\ln v)}{d(\ln K_I)} \quad (7)$$

und starke Änderungen dieser Größe

$$D = \frac{dn}{d(\ln K_I)} \quad (8)$$

zu merklichen Abweichungen zwischen den Kurven führen.

Auch für andere Rißwachstumsfunktionen, die von der potentiellen Funktion abweichen und keine geschlossene Integration erlauben, ergab sich näherungsweise ein linearer Zusammenhang zwischen t_B und $1/V$.

Diese Besonderheit des Integrationsprozesses beruht auf dem stark instabilen Charakter des Rißwachstums von Glas: Eine merkliche Rißverlängerung erfolgt erst unmittelbar vor dem Bruch, so daß lediglich ein Teil der Rißwachstumskurve wirksam wird.

Das in Bild 1 veranschaulichte Ergebnis der Modellrechnungen weist auf die folgende Näherungslösung für Ermüdungskurven im Fall nichtintegrierbarer Funktionen hin: Die Rißwachstumskurve wird stückweise durch die integrierbare Potenzfunktion ersetzt. Die Ermüdungskurven ergeben sich daher als stückweise zusammengesetzte analytische Lösungen dieser veränderten Rißwachstumsfunktion, wobei der Anstieg n nur im Fall eines potentiellen Rißwachstums konstant ist.

Es ist daher die analytische Integration für ein stückweis potientiell Rißwachstum durchzuführen. Darauf aufbauend erfolgt eine Fehlerabschätzung der vorgeschlagenen Näherung in Abhängigkeit des Anstieges n und seiner Änderung D .

3. Integration eines stückweis potentiellen Rißwachstums

Es wird zunächst eine gewöhnliche Differentialgleichung für den Spannungsintensitätsfaktor K_I abgeleitet. Unter Verwendung der Gl. (3) für K_I und der normierten Größen K_N und σ_N entsprechend der Gln. (5) und (6) erhält man

$$K_N = \frac{K_I}{K_{Ic}} = \frac{Y \sigma \sqrt{a}}{Y \sigma_S \sqrt{a_0}} = \sigma_N \sqrt{\frac{a}{a_0}} \quad (9)$$

K_N ist eine Funktion von $a(t)$ und $\sigma_N(t)$. Seine Ableitung nach der Zeit beträgt

$$\frac{dK_N}{dt} = \frac{\partial K_N}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial K_N}{\partial \sigma_N} \frac{d\sigma_N}{dt}$$

Die partiellen Differentialquotienten können aus Gl. (9) berechnet werden. Für die Rißgeschwindigkeit wird ein stückweise potientiell Rißwachstum angesetzt:

$$V_i = \left(\frac{da}{dt} \right)_i = V_{ci} K_N^{n_i} \text{ für } K_{N_{i-1}} \leq K_N \leq K_{N_i} \quad (10)$$

Daraus ergibt sich für K_N eine Differentialgleichung vom Bernoullischen Typ

$$\frac{dK_N}{dt} - \frac{V_{ci}}{2a_0} \sigma_N^2 K_N^{n_i-1} - \frac{K_N}{\sigma_N} \frac{d\sigma_N}{dt} = 0 \quad (11)$$

im Zeitintervall $t_{i-1} < t < t_i$.

$$t = t_{i-1} : K_N = K_{N_{i-1}} ; \sigma_N = \sigma_{N_{i-1}} ; \frac{a}{a_0} = \left(\frac{K_{N_{i-1}}}{\sigma_{N_{i-1}}} \right)^2$$

$$t = t_i : K_N = K_{N_i} ; \sigma_N = \sigma_{N_i} ; \frac{a}{a_0} = \left(\frac{K_{N_i}}{\sigma_{N_i}} \right)^2$$

Die Integration der Gl. (11) von t_{i-1} bis t_i führt auf [8]:

$$\left(\frac{\sigma_{N_i}}{K_{N_i}} \right)^{n_i-2} = \left(\frac{\sigma_{N_{i-1}}}{K_{N_{i-1}}} \right)^{n_i-2} - \frac{(n_i-2) V_{ci}}{2a_0} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma_N^{n_i} dt \quad (12)$$

Diese Gleichung, die für einen beliebigen zeitlichen Belastungsverlauf $\sigma_N(t)$ gültig ist, kann als Ausgangspunkt einer Reihe allgemeiner Aussagen über den Zusammenhang zwischen Rißwachstum und Ermüdung verwendet werden.

4. Ermüdungsgleichungen für begrenztes potientiell Rißwachstum

Zunächst werden die Bruchzeiten für ein einheitliches potientiell Rißwachstum von der Ermüdungsgrenze K_{No} bis zum kritischen Wert $K_{Nc} = 1$ berechnet (einheitlicher Anstieg n).

$$t = t_o : K_N = K_{No} ; \sigma_N = \sigma_{No} ; \frac{a}{a_0} = 1 = \left(\frac{K_{No}}{\sigma_{No}} \right)^2$$

$$t = t_B : K_N = K_{Nc} = 1 ; \sigma_N = \sigma_{NB} ; \frac{a}{a_0} = \frac{a_c}{a_0} = \frac{1}{\sigma_{NB}^2}$$

Für statische Ermüdung ($\sigma_N = \sigma_{No} = \sigma_{NB} = \text{konst.}$) folgt aus Gl. (12)

$$t_{B \text{ stat}} = \frac{2a_0}{(n-2)V_c} \frac{1}{\sigma_{NB}^n} \left[1 - \left(\frac{\sigma_{NB}}{K_{Nc}} \right)^{n-2} \right] \quad (13)$$

$(K_{Nc} = 1)$

Für dynamische Ermüdung ($\sigma_N = \dot{\sigma}_s t$; $\sigma_{No} = \dot{\sigma}_s t_o$; $\sigma_{NB} = \dot{\sigma}_s t_B$) folgt aus Gl. (12)

$$t_{B \text{ dyn}} = \frac{2(n+1) a_o}{(n-2) V_c} \frac{1}{\sigma_{NB}^n} \left[\frac{1 - \left(\frac{\sigma_{NB}}{K_{Nc}}\right)^{n-2}}{1 - \left(\frac{\sigma_{No}}{\sigma_{NB}}\right)^{n+1}} \right] \quad (14)$$

$(K_{Nc} = 1)$

Die Ausdrücke in den eckigen Klammern bestimmen die Übergänge der Ermüdungskurven aus dem Ermüdungsbereich in den Bereich des potentiellen Rißwachstums (nur in Gl. (14)) und von diesem in den Bereich der rißwachstumsfreien Kurzzeitfestigkeit $\sigma_{NB} = 1$ (vgl. Bild 1).

Im folgenden wird nur die dynamische Ermüdung betrachtet. Aus Gl. (14) kann abgeschätzt werden, welcher Bereich der Rißwachstumskurve die Bruchzeit bis auf einen Fehler ϵ bestimmt. Dazu wird die Ermüdungsgrenze $K_{No} = \sigma_{No}$ (untere Grenze des wirksamen Bereiches) und der kritische Spannungsintensitätsfaktor K_{Nc} (obere Grenze des wirksamen Bereiches) als Variablen K_{No}^* und K_{Nc}^* angesehen und die Bruchzeit in der Form

$$t_{B \text{ dyn}}^{n+1} = \frac{2(n+1) a_o}{(n-2) v_c \dot{\sigma}_s^n \sigma_s^n} (1 \pm \epsilon) \quad (15)$$

verwendet. Ein Vergleich von Gl. (15) mit Gl. (14) führt auf die Grenzen der wirksamen Bereiche, wobei in der eckigen Klammer der Gl. (14) zur Berechnung von K_{No}^* der Zähler und zur Berechnung von K_{Nc}^* der Nenner vernachlässigt wurde.

$$\frac{K_{No}^*}{\sigma_{NB}} = [1 - (1 + \epsilon)^{-n}]^{-\frac{1}{n+1}} \quad (16)$$

$$\frac{K_{Nc}^*}{\sigma_{NB}} = [1 - (1 - \epsilon)^{-n}]^{-\frac{1}{n-2}} \quad (17)$$

Beispielsweise werden 98 % der Bruchzeit für $n=20$ von dem schmalen Bereich der Rißwachstumskurve $0,92 \sigma_{NB}$

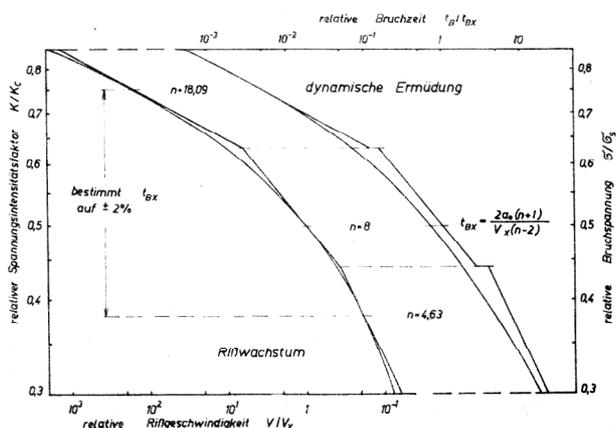


Bild 2
Methode der Fehlerabschätzung der vorgeschlagenen Näherung zur Berechnung von Bruchzeiten (rechter Teil) aus der Rißwachstumskurve (linker Teil)

$< K_N < 1,10 \sigma_{NB}$ bestimmt (ein weiteres Beispiel für $n = 8$ ist in Bild 2 enthalten).

Für hinreichend große n können die Ausdrücke in den eckigen Klammern in Gl. (13) und (14) näherungsweise gleich 1 gesetzt werden (Übergangsbereiche vernachlässigbar schmal). Da in der Darstellung von Bild 1 $\sigma_{NB} = K_N$ gewählt wurde und unter Berücksichtigung von Gl. (10), weisen die Gln. (13) und (14) die behauptete Proportionalität aus zwischen der Bruchzeit t_B und der reziproken Rißgeschwindigkeit $1/V$, unabhängig von der Art der Ermüdung

$$t_{B \text{ stat}} = \frac{2 a_o}{(n-2)} \frac{1}{V} \quad (18)$$

$$t_{B \text{ dyn}} = \frac{2(n+1) a_o}{(n-2)} \frac{1}{V} = (n+1) t_{B \text{ stat}} \quad (19)$$

Diese Gleichungen, die für potentielles Rißwachstum ohne Berücksichtigung der Lage der Ermüdungsgrenze und eines Anteils des überkritischen Bruches gelten, werden auf nichtpotentielles Rißwachstum erweitert, wobei der Anstieg n entsprechend Gl. (7) eine Funktion von K_N bzw. σ_{NB} bedeutet.

5. Fehlerabschätzung der Näherung

Die nichtpotentielle Rißwachstumskurve, die in der $\lg v - \lg K_N$ -Darstellung von der Geraden abweicht, wird durch 3 Tangenten ersetzt (linker Teil von Bild 2). Die mittlere Tangente führt auf die angenäherte Bruchzeit t_{BX} bei $\sigma_{NB} = 0,5$. Die benachbarten Tangenten berühren die wahre Rißwachstumskurve an den Grenzen des Bereiches der Kurve, der t_{BX} bis auf den Fehler ϵ bestimmt ($\epsilon = 0,01$ in Bild 2). Aus Gl. (19) ergeben sich die zu den Tangenten gehörenden dynamischen Ermüdungskurven (drei Geraden im rechten Teil von Bild 2).

Die exakte dynamische Ermüdungskurve der durch 3 Geraden angepaßten nichtpotentiellen Rißwachstumskurve kann unter Verwendung von Gl. (12) numerisch berechnet werden. Für

$$\sigma_{Ni} = \frac{\dot{\sigma}_s t_i}{\sigma_s} \quad (20)$$

und

$$\sigma_{NBi}^{n_i+1} = \frac{2(n+1) a_o \sigma_s \dot{\sigma}}{(n_i-2) V_{ci}}$$

ergibt sich nach Umrechnung

$$\left(\frac{\sigma_{Ni}}{K_{Ni}} \right) = \left(\frac{\sigma_{Ni-1}}{K_{Ni-1}} \right)$$

$$\left[\frac{1 + \left(\frac{\sigma_{Ni-1}}{K_{Ni-1}}\right)^3 \left(\frac{K_{Ni}}{\sigma_{NBi}}\right)^{n_i+1} \left(\frac{K_{Ni-1}}{K_{Ni}}\right)^{n_i+1}}{1 + \left(\frac{\sigma_{Ni}}{K_{Ni}}\right)^3 \left(\frac{K_{Ni}}{\sigma_{NBi}}\right)^{n_i+1}} \right]^{\frac{1}{n_i-2}} \quad (21)$$

Diese Gleichung ermöglicht die rekursive Berechnung der relativen Riverlngerung $\left(\frac{a}{a_0}\right)_i = \left(\frac{\sigma_{Ni}}{K_{Ni}}\right)^2$ (vgl. Gl. (9)).

Dabei ist ein Iterationsprozeß durchzuführen, der gute Konvergenzeigenschaften aufweist.

Entsprechend der Lage der 3 Tangenten sind n_1 , n_2 und n_3 sowie V_{c1} , V_{c2} und V_{c3} bekannt. Der Ausgangswert

beträgt $\frac{\sigma_{No}}{K_{No}} = 1$, der Endwert $\frac{\sigma_{N3}}{K_{N3}} = \frac{\sigma_{NB}}{K_{Nc}} = \sigma_{NB}$ ist

die Bruchspannung für einen vorgegebenen Spannungsanstieg σ . Daraus erhält man die Bruchzeit t_B . Durch Vergleich mit der angenäherten Bruchzeit t_{BX} ergibt sich eine Abschätzung des relativen Fehlers der Bruchzeit. Mit dem erhaltenen relativen Fehler werden unter Verwendung der Gln. (16) und (17) die Tangenten an der Rißwachstumskurve modifiziert und die Bruchzeit t_B erneut berechnet. Dieser Iterationsprozeß wird bis zur Unterschreitung einer vorgegebenen Fehlerschranke fortgesetzt.

Das Ergebnis der Fehlerabschätzung wird in Bild 3 dargestellt. Als leicht handhabbare und physikalisch sinnvolle Funktion wurde eine erweiterte Exponentialfunktion gewählt:

$$V = V_c \exp [A (K_N^M - 1)] \quad (22)$$

In der $\lg V - \lg K$ -Darstellung beträgt ihr Anstieg

$$n = \frac{d(\ln V)}{d(\ln K)} = AM K_N^M \quad (23)$$

und die differentielle Änderung des Anstieges

$$D = \frac{dn}{d(\ln K)} = M n. \quad (24)$$

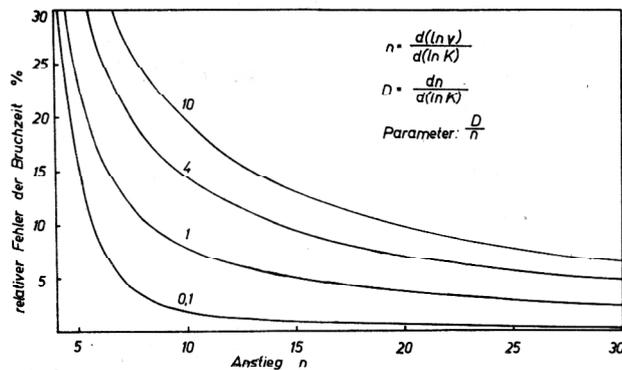


Bild 3
Ergebnis der Fehlerabschätzung der vorgeschlagenen Näherung

Die Potenz im Exponenten $M = D/n$ wurde als Parameter in Bild 3 gewählt. Für $D/n = 1$ bezieht sich die Fehlerabschätzung auf die gewöhnliche Exponentialfunktion, wie sie aus der Annahme eines thermisch-aktivierten Rißwachstums mit lastunabhngigem Aktivierungsvolumen folgt.

6. Anwendungsbeispiel

Die für die dynamische Ermüdung berechneten Fehler sind in vergleichbarer Größe auch bei Anwendung der Näherung für die statische Ermüdung zu erwarten. Beispielsweise erhält man für ein exponentielles Rißwachstum

$$v = v_0 \exp [A (K_N - 1)] \quad (25)$$

mit $n = A K_N = A \sigma_N$

als Näherung für die statische Ermüdung (Gl. 18)

$$t_{B \text{ stat}} = \frac{2 a_0}{(A \sigma_N - 2) V_c} \exp [-A (\sigma_N - 1)] \quad (26)$$

Andererseits ermöglicht exponentielles Rißwachstum für statische Ermüdung eine geschlossene Integration. Sie führt auf [9]:

$$t_{B \text{ stat}} = \frac{2 a_0 (A \sigma_N + 1)}{A^2 \sigma_N^2 v_c} \exp [-A (\sigma_N - 1)] \quad (27)$$

Ein Vergleich der Gln. (26) und (27) zeigt, daß der Fehler der Näherung nur geringfügig größer ist als der für die dynamische Ermüdung berechnete (Bild 3) und daß mit wachsendem Anstieg $n = A \sigma_N$ der Fehler gegen Null strebt.

Die Näherung für die dynamische Ermüdung (Gl. (19)) lautet im Fall eines exponentiellen Rißwachstums

$$t_{B \text{ dyn}} = \frac{2 a_0 (A \sigma_N + 1)}{(A \sigma_N - 2) V_c} \exp [-A (\sigma_N - 1)] \quad (28)$$

bzw.

$$\dot{\sigma} = \frac{\sigma_N \sigma_s}{t_{B \text{ dyn}}} = \frac{\sigma_N \sigma_s^3 Y^2 (A \sigma_N - 2) V_c}{2 (A \sigma_N + 1) K_{Ic}^2} \exp [A (\sigma_N - 1)] \quad (29)$$

wobei $K_{Ic} = Y \sigma_s \sigma_N \sqrt{a_0}$ verwendet wurde.

Eine andere Näherungsform erhält man, wenn in Gl. (19) für $t_{B \text{ stat}}$ die durch Integration erhaltene Form, Gl. (27), einsetzt

$$\dot{\sigma} = \frac{\sigma_N \sigma_s^3 Y^2 A^2 \sigma_N^2 V_c}{2 (A \sigma_N + 1)^2 K_{Ic}^2} \exp [A (\sigma_N - 1)] \quad (30)$$

7. Schluß

Es wurde gezeigt und an einem Beispiel demonstriert, daß auch im Fall nichtintegrierbarer Riwachstumskurven, die aus speziellen physikalischen Modellen folgen, eine Voraussage des Ermüdungsverhaltens möglich ist. Auf der Basis der Gleichungen (18) und (19) wird ein näherungsweise Zusammenhang zwischen Rißwachstumskurve, statischer Ermüdungskurve und dynamischer

Ermüdungskurve vorgeschlagen, so daß bei Kenntnis einer der drei Kurven auf die anderen beiden geschlossen werden kann.

Der Fehler, der durch Anwendung der vorgeschlagenen Näherung entsteht (Bild 3), ist im Vergleich zur großen Variationsbreite der Bruchzeiten gering. Für Glas betragen die Anstiege $n = 10 \dots 30$, so daß der Fehler unterhalb von 10 % liegt.

Eine Anwendbarkeit der Näherung ist nicht gegeben für kleine Anstiege $n < 5$ verbunden mit großen Änderungen von n , wie sie im Bereich 2 des Rißwachstums auftreten. Hierfür ist eine numerische Integration erforderlich.

LITERATUR

- [1] Wiederhorn, S. M., Bolz, L. H.: Stress Corrosion and Static Fatigue of Glass. J. Am. Ceram. Soc. 53 (1970) H. 10, S. 543 – 548.
- [2] Gehrke, E., Ullner, Ch., Berger, G., Hahnert, M.: Vergleichende experimentelle Untersuchungen zum Rißwachstum und zur dynamischen Ermüdung einiger Phosphat- und Boratgläser. Silikattechnik 33 (1982) H. 8.
- [3] Tseng, A. A., Berry, J. T.: A Three-Dimensional Finite Element Analysis of the Double-Torsion Test. Transactions of the ASME 101 (1979) H. 11, S. 328 – 335.
- [4] Ullner, Ch.: Theoretische Untersuchungen zum subkritischen Rißwachstum als Grundlage für das Ermüdungsverhalten von Glas. 8. Int. Baustoff- und Silikattagung, Weimar 1982, Tagungsberichte, H. 4, S. 163 – 169.
- [5] Gehrke, E.: Experimentelle Untersuchungen zum Ermüdungsverhalten an Gläsern als Grundlage einer modernen Festigkeitsprüfung. 8. Int. Baustoff- und Silikattagung, Weimar 1982, Tagungsberichte, H. 4, S. 170 – 176.
- [6] Evans, A. G., Johnson, H.: The Fracture Stress and Its Dependence on Slow Crack Growth. J. Mat. Sci. 10 (1975) H. 2, S. 214 – 222.
- [7] Wiederhorn, S. M.: Influence of Water Vapor on Crack Propagation in Soda-Lime-Glass. J. Am. Ceram. Soc. 50 (1967) H. 8, S. 407 – 414.
- [8] Smirnow, W. I.: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil 2, 7. Aufl. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966, S. 8 – 9.
- [9] Trantina, G. G.: Strength and Life Prediction for Hot-pressed Silicon Nitride. J. Am. Ceram. Soc. 62 (1979) H. 7 – 8, S. 377 – 380.

Anschrift des Verfassers:

Dr. Christian Ullner
Akademie der Wissenschaften der DDR
Zentralinstitut für anorganische Chemie
1199 Berlin
Rudower Chaussee 5