

## Besonderheiten bei Stäben unter Stützenverrückungen und Längsbelastungen

Karl-Friedrich Garz

Stützenverrückungen (Verschiebungen und Verdrehungen) führen bei Stäben mit statisch unbestimmter Lagerung zu Zwängungen und damit zu Spannungen (Bild 1). Ursachen der Verrückungen können z. B. Temperaturänderungen anschließender Konstruktionsteile oder auch einfach Herstellungsgenauigkeiten (Imperfektionen) sein.

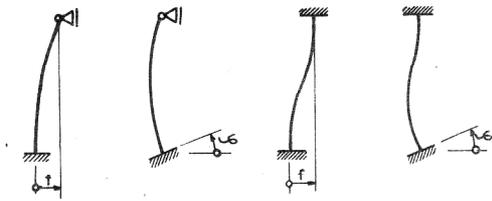


Bild 1

Der Biegemomentenverlauf läßt sich einfach mit Hilfe der Differentialgleichung

$$EIv'''' = 0; \quad M = -EIv'' \quad (1)$$

unter Beachtung der Randbedingungen oder mit Hilfe der Kraftgrößenmethode im Sinne der Theorie I. Ordnung bestimmen.

Besonderheiten treten auf, wenn zusätzlich Längskräfte hinzukommen (Bild 2). Man erwartet aus der Erfahrung mit anderen Einflüssen (Querlasten, Endmomente, Lastexzentrizitäten, Vorkrümmungen u. ä.), daß Druckkräfte ( $F > 0$ ) zu einer Vergrößerung und Zugkräfte ( $F < 0$ ) zur Verringerung der Verformungen und der Biegemomente führen. Es tritt hier aber teilweise das Gegenteil ein.

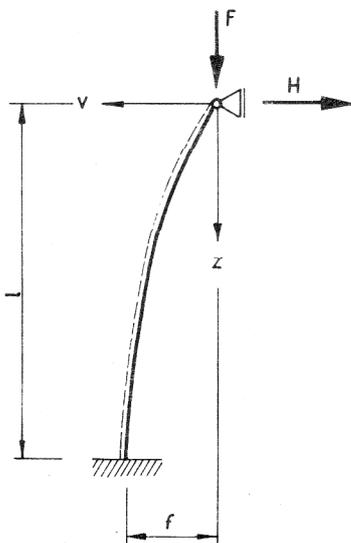


Bild 2

Die Verformungen einschließlich der gegebenen Stützenverrückungen sollen klein gegenüber der Stablänge sein, so daß die Theorie II. Ordnung (linearisierte Differentialgleichung der Biegelinie) zur Beschreibung ausreicht.

Die Grundlagen des hier zu behandelnden Problems sind bekannt [1], es fehlt aber die Auswertung und Diskussion der Ergebnisse.

### Einseitig eingespannter, einseitig gelenkig gelagerter Stab mit einer Stützenverschiebung

Für längsbelastete Stäbe gilt für die Durchbiegung  $v$  die Differentialgleichung

$$v'''' + \alpha^2 v'' = 0 \quad (2)$$

$$\text{mit } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

$EI$  konstante Biegesteifigkeit des Stabes

Als weitere Abkürzungen sollen verwendet werden

$$\epsilon = \alpha l = l \sqrt{\frac{F}{EI}} \quad \text{als Stabkennzahl}$$

$$\xi = \frac{z}{l} \quad \text{als dimensionslose Stabkoordinate}$$

Die Lösung der Gl. (2) lautet damit allgemein

$$v = C_1 \sin \epsilon \xi + C_2 \cos \epsilon \xi + C_3 \xi + C_4 \quad (3)$$

Für die hier vorliegenden Randbedingungen

$$\begin{aligned} \xi = 0; \quad v = 0; \quad v'' = 0 \\ \xi = 1; \quad v = f; \quad v' = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

erhält man für die Durchbiegung

$$v(\xi) = f \frac{\sin \epsilon \xi - \epsilon \xi \cos \epsilon}{\sin \epsilon - \epsilon \cos \epsilon} \quad (5)$$

und damit aus

$$M = -EIv'' = \frac{-EI}{l^2} \frac{d^2 v}{d\xi^2}$$

das Biegemoment nach Theorie II. Ordnung

$$M(\xi) = \frac{EI f}{l^2} \frac{\epsilon^2 \sin \epsilon \xi}{\sin \epsilon - \epsilon \cos \epsilon} \quad (6)$$

Das Biegemoment und die Durchbiegung wachsen asymptotisch über alle Maßen für

$$\sin \epsilon - \epsilon \cos \epsilon = 0; \quad \epsilon = 4,4934,$$

d. h. für den Eigenwert des 3. Eulerfalls.

Es liegt ein Spannungsproblem vor.  
Für das Einspannmoment ( $\zeta = 1$ ) gilt in bezogener Schreibweise

$$\bar{M}_e = \frac{M_e l^2}{EI f} = \frac{\epsilon^2 \sin \epsilon}{\sin \epsilon - \epsilon \cos \epsilon} \quad (7)$$

Das größte Feldmoment erhält man aus

$$\frac{dM}{d\zeta} = 0; \quad \cos \epsilon \zeta = 0; \quad \epsilon \zeta = \frac{\pi}{2}$$

an der Stelle  $\zeta = \frac{\pi}{2\epsilon}$  zu

$$\max \bar{M} = \frac{\epsilon^2}{\sin \epsilon - \epsilon \cos \epsilon} \quad (8)$$

Es tritt nur auf, wenn

$$\zeta < 1; \text{ d. h. } \frac{\pi}{2\epsilon} < 1; \quad \epsilon > \frac{\pi}{2}; \quad F > 0,122 F_{Ki},$$

sonst ist das Einspannmoment maßgebend.

$F_{Ki}$  ist die Knicklast des 3. Eulerfalls.

Wenn die Längsbelastung Zug ist, ist zu beachten

$$F < 0; \quad \epsilon \rightarrow i\epsilon; \quad \epsilon^2 \rightarrow -\epsilon^2$$

$$\sin \epsilon \rightarrow i \sin \epsilon; \quad \cos \epsilon \rightarrow \cos \epsilon,$$

wobei  $\epsilon$  wiederum positiv gezählt wird.

Es ist dann stets das Einspannmoment

$$\bar{M}_e = \frac{\epsilon^2 \sin \epsilon}{\epsilon \cos \epsilon - \sin \epsilon} \quad (8a)$$

maßgebend.

Die Auswertung der Beziehungen (7), (8) und (8a) ist als Diagramm in Bild 3 dargestellt. Der bezogene Lastparameter ist dabei

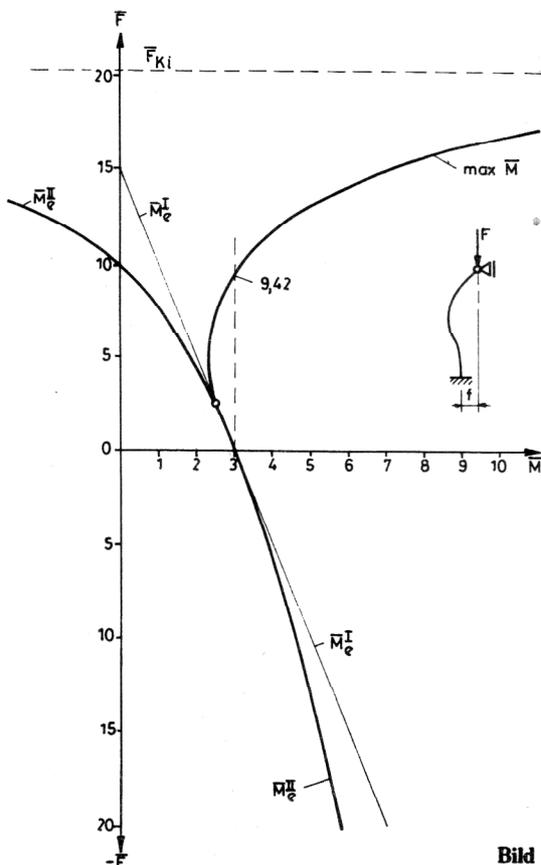


Bild 3

$$\bar{F} = \epsilon^2 = \frac{F l^2}{EI} \quad (9)$$

Das Bild zeigt, daß das Einspannmoment bei Zugbelastung gegenüber dem längskraftfreien Fall unbegrenzt zunimmt und bei Druck abnimmt. Es wird für  $\epsilon = \pi$  Null, das entspricht der Knicklast des 2. Eulerfalls. Beim Druckstab wird das maximale Moment erst für  $\bar{F} > 9,42$  größer als das Einspannmoment des Stabes ohne Längskraft. Das bedeutet, daß bei einer Sicherheit  $\nu_{Ki} > 2,14$  gegenüber der idealen Knicklast  $F_{Ki}$  das maßgebende Moment stets kleiner ist als beim Stab ohne Druckkraft. Das Ergebnis wird anschaulich verständlich, wenn man die für die unterschiedlichen F-Bereiche typischen Momentenverteilungen im Bild 4 betrachtet.

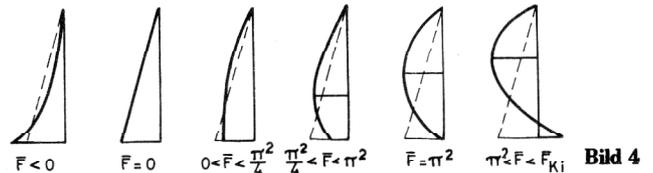


Bild 4

Eine modifizierte Theorie I. Ordnung liefert für das Einspannmoment die lineare Beziehung

$$\bar{M}_e^I = 3 - \frac{1}{5} \bar{F} \quad (10)$$

und damit für Zugstäbe ein sicheres Ergebnis. Dabei wird bei der Ermittlung des Momentes die Biegelinie infolge der Stützenverrückung  $f$  berücksichtigt, die Verformungsänderung infolge der Längskraft  $F$  jedoch wie üblich vernachlässigt.

Für die Steifigkeit des Stabes ist die der Verschiebung  $f$  zugeordnete Kraft  $H$  (Bild 2) maßgebend.

Für den längskraftfreien Stab gilt

$$H_0 = \frac{3EI}{l^3} f \quad (11)$$

Hieraus läßt sich die bezogene Federkonstante

$$\bar{H}_0 = \frac{H l^3}{EI f} = 3 \quad \text{definieren.} \quad (12)$$

Für den längsbelasteten Stab ergibt die Theorie II. Ordnung für die Querkraft

$$Q = H + Fv'; \quad Q = M' = -EIv''''$$

Mit den Ableitungen von  $v$  nach Gl. (5) erhält man daraus

$$\bar{H} = \frac{H l^3}{EI f} = \frac{\epsilon^3 \cos \epsilon}{\sin \epsilon - \epsilon \cos \epsilon} \quad (13)$$

Die Auswertung in Bild 5 zeigt, daß die Steifigkeit für Druckkräfte zunächst abnimmt und dann mit geändertem Vorzeichen asymptotisch wächst. Für  $\epsilon = \frac{\pi}{2}$ , d. h. der Knicklast des 1. Eulerfalls bietet der Stab gegen eine Verschiebung der Stütze keinen Widerstand. Zukräfte vergrößern die Steifigkeit. Mit der oben beschriebenen modifizierten Theorie I. Ordnung erhält man in guter Näherung

$$\bar{H}^I = 3 - \frac{6}{5} \bar{F} \quad (14)$$

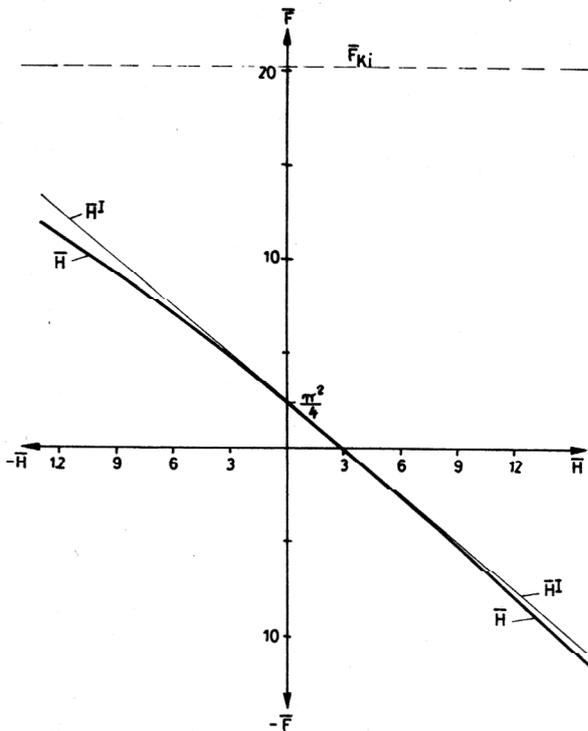


Bild 5

**Einseitig eingespannter, einseitig gelenkig gelagerter Stab mit einer Stützenverdrehung (Bild 6)**

Dieser Fall lässt sich auf das im vorigen Abschnitt ausführlich behandelte Problem des Stabes mit Stützenverschiebung zurückführen.

Für kleine Verformungen gilt nach Bild 6

$$\varphi l = \frac{f}{\cos \varphi} \cong f.$$

Alle Ergebnisse für die Stützenverrückung  $f$  gelten daher auch für die Stützenverdrehung  $\varphi$ , wenn in den Beziehungen  $f$  durch  $\varphi l$  ersetzt wird.

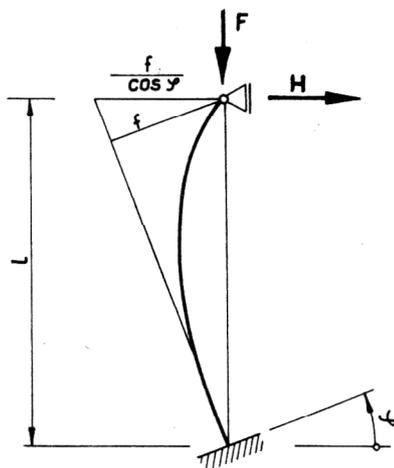


Bild 6

**Beiderseits eingespannter Stab mit einer Stützenverschiebung (Bild 7)**

Mit den entsprechend veränderten Randbedingungen erhält man aus Gl. (3) die Verschiebungen  $v$  und durch Differenzieren den Momentenverlauf zu

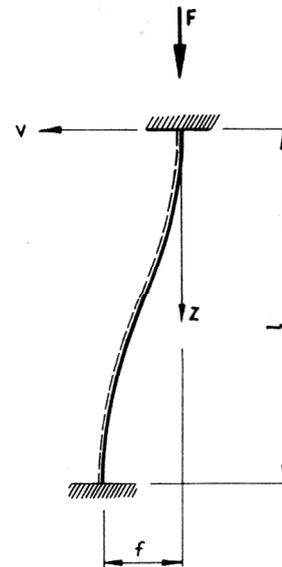


Bild 7

$$\bar{M}(\zeta) = \frac{Ml^2}{Elf} = \frac{\epsilon^2 [\sin \epsilon \sin \epsilon \zeta - (1 - \cos \epsilon) \cos \epsilon \zeta]}{2(1 - \cos \epsilon) - \epsilon \sin \epsilon} \quad (15)$$

Für den Eigenwert des 4. Eulerfalls  $\epsilon = 2\pi$  ergibt sich unabhängig von  $\zeta$  ein unbestimmter Ausdruck. Es liegt im Sinne des Kriteriums von Klöppel/Lie [2] ein Verzweigungsproblem vor.

Das Ergebnis der Auswertung für das maßgebende Moment ist in Bild 8 dargestellt. Für die Kräfte  $F < 0,25 F_{Ki}$  ist das Einspannmoment  $M_e$  für  $\zeta = 1$  (für  $\zeta = 0$  entgegengesetztes Vorzeichen) maßgebend. Für  $\pi^2 < F < 4\pi^2$  wird das Feldmoment

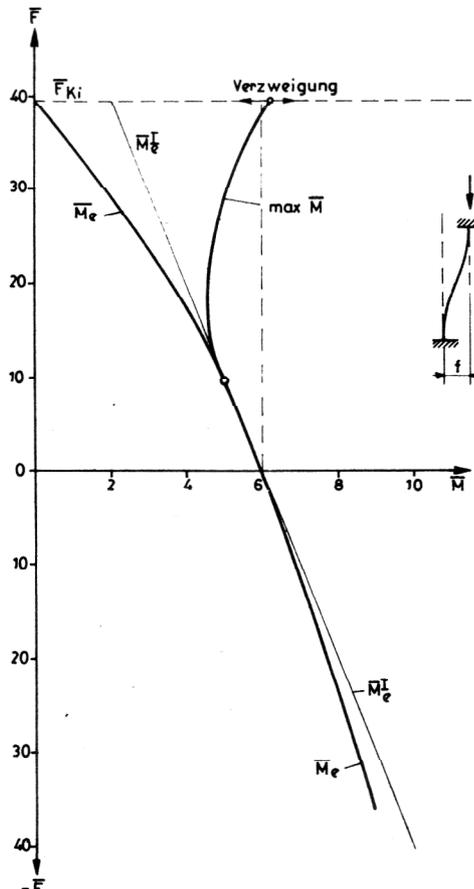


Bild 8

max M das größere. Es tritt für  $\epsilon = \pi$  bei  $\zeta = 1$  auf und wandert mit steigendem  $\epsilon$  nach  $\zeta = 0,75$ . In der Stabmitte ( $\zeta = 0,5$ ) ist das Moment unterhalb der Verzweigungslast stets Null (Antimetrie).

Für Druckstäbe erreicht das maßgebende Moment nur in der Nähe der Verzweigungslast die Größe des Einspannmomentes des längskraftfreien Stabes.

Zugkräfte vergrößern das stets maßgebende Einspannmoment. Die Theorie I. Ordnung liefert hierfür mit

$$\bar{M}_e^I = 6 - \frac{1}{10} \bar{F} \quad (16)$$

eine sichere Abschätzung.

### Beiderseits eingespannter Stab mit einer Stützenverdrehung (Bild 9)

Mit wiederum veränderten Randbedingungen erhält man im vorliegenden Falle für das Biegemoment

$$\bar{M}(\zeta) = \frac{Ml}{EIf} = \frac{\epsilon [(1 - \cos \epsilon) \sin \epsilon \zeta - (\epsilon - \sin \epsilon) \cos \epsilon \zeta]}{2(1 - \cos \epsilon) - \epsilon \sin \epsilon} \quad (17)$$

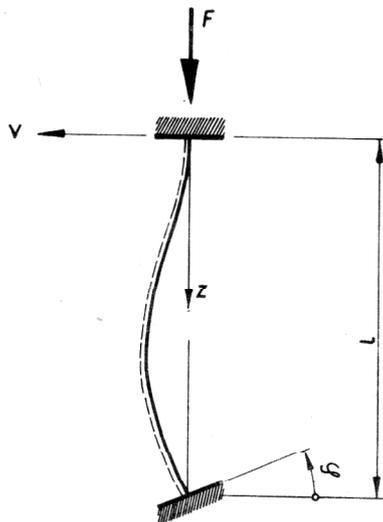


Bild 9

Der Nenner entspricht der Knickbedingung des 4. Eulerfalles. Es liegt ein Spannungsproblem vor mit der Asymptote  $\epsilon = 2\pi$  für die Durchbiegung und das Biegemoment.

Das Einspannmoment an der Stelle  $\zeta = 0$  soll für die Auswertung mit  $M_0$ , das an der Stelle  $\zeta = 1$  mit  $M_e$  bezeichnet werden. Das größte Feldmoment ist max. M. Es tritt nur für  $\epsilon > 2,33$ , d. h. für  $F > 0,14 F_{K1}$  auf und ist dann maßgebend. Bis zu  $F = 0,53 F_{K1}$  bleibt das größte Moment beim Druckstab unter dem des längskraftfreien Stabes.

Zugkräfte vergrößern das maßgebende Einspannmoment  $M_e$  an der verdrehten Stütze. Die Theorie I. Ordnung liefert für die Einspannmomente

$$\bar{M}_0^I = -2 - \frac{1}{30} \bar{F} \quad (18)$$

$$\bar{M}_e^I = 4 - \frac{2}{15} \bar{F} \quad (19)$$

Die Gl. (19) gibt eine sichere Abschätzung für das maßgebende Moment für Zugstäbe an.

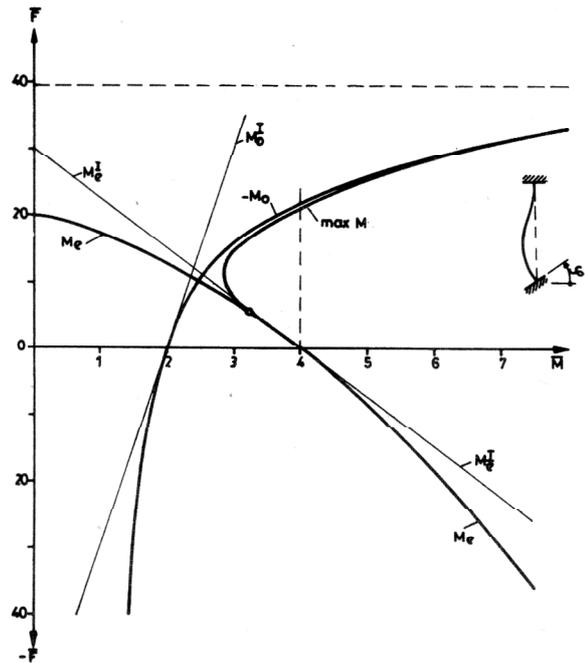


Bild 10

### Zusammenfassung

Bei statisch unbestimmt gelagerten Stäben treten bei Stützenverrückungen und gleichzeitiger Längsbeanspruchung Besonderheiten auf. Zugkräfte vergrößern die Beanspruchungen aus den Stützenverrückungen, Druckkräfte führen teilweise zur Entlastung.

Das für den Spannungsnachweis von Druckstäben übliche Verfahren [3], die Biegemomente nach der Theorie II. Ordnung mit Hilfe eines von  $\nu_{K1}$  abhängigen Vergrößerungsfaktors aus denen der Theorie I. Ordnung zu gewinnen, ist hier ungeeignet. Es ist bei Druckstäben nicht zulässig, Stützenverrückungen als geometrische Ersatzimperfektionen anzunehmen, da sie zu einer unbeabsichtigten Entlastung führen können.

Bei der Berechnung von Stabsystemen mit Hilfe der Verrückungsgrößenmethode nach Theorie II. Ordnung ist zu beachten, daß die Steifigkeiten der Stäbe im hohen Maße von den Längskräften abhängen und daß bei Zugstäben infolge der Knotenverrückungen eine Vergrößerung der Schnittgrößen auftritt.

### LITERATUR

- [1] Chwalla, E.: Die neuen Hilfstafeln zur Berechnung von Spannungsproblemen der Theorie zweiter Ordnung und von Knickproblemen. Bauing. 34 (1959) S. 128.
- [2] Bürgermeister, G. u. H. Steup: Stabilitätstheorie, Bd. 1. Akademie-Verlag Berlin.
- [3] TGL 13503 Stabilität von Stahltragwerken.

### Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. sc. techn. Karl-Friedrich Garz  
Technische Hochschule Otto von Guericke  
Sektion Maschinenbau  
3010 Magdeburg  
PSF 124