

Parameterresonanzen des durchströmten geraden Rohres bei stochastischen bzw. deterministischen Mediumpulsationen

S. Barthel, O. Becker

1. Einleitung

Das im Rohr strömende Medium führt sowohl bei zeitunabhängigen als auch bei pulsierenden Strömungsgrößen – Druck und Strömungsgeschwindigkeit – zu qualitativen Veränderungen im dynamischen Verhalten des Rohres. Im Fall zeitunabhängiger Strömungsgrößen kann das durchströmte Rohr durch Erreichen einer kritischen Geschwindigkeit des Mediums instabil werden; in [1] wurde nachgewiesen, daß diese für Metallrohre weit über den auftretenden Nenngeschwindigkeiten liegt und daher keine praktische Bedeutung besitzt. Im Fall pulsierender Strömungsgrößen entstehen parametererregte Schwingungen des durchströmten Rohres und es besteht die Gefahr des Auftretens von Parameterresonanzen, die insbesondere durch Werkstoffermüdung zu einem vorzeitigen Versagen des Rohres führen können.

Sind periodisch arbeitende Aggregate, wie z. B. Pumpen, als überwiegende Ursache für das Auftreten von Pulsationen der Strömungsgrößen anzusehen, dann können diese Pulsationen näherungsweise als deterministische Größen betrachtet und durch periodische Funktionen der Zeit beschrieben werden. Dieses Vorgehen liegt fast allen Untersuchungen über parametererregte Schwingungen des durchströmten Rohres zugrunde; man vergleiche hierzu bei [1] und [2] sowie bei den in [2] zitierten Arbeiten.

Da die Pulsationen der Strömungsgrößen jedoch aus vielfachen gleichzeitig wirkenden Ursachen herrühren, wobei der Entstehungs- und Ausbreitungsmechanismus nicht völlig bekannt ist, wird eine stochastische Modellierung der Pulsationen ein besseres Bild des Mediumverhaltens liefern. Hierauf wurde bereits von Chen [3] hingewiesen, wobei jedoch bisher nur eine Arbeit von Babin [4] über das durchströmte Rohr bei stochastischen Mediumpulsationen bekannt geworden ist. In der vorliegenden Arbeit werden Ergebnisse für das als Zweistützträger gelagerte gerade Rohr bei stochastischen Mediumpulsationen vorgestellt und mit denen bei deterministischen Mediumpulsationen verglichen.

2. Mathematisches Modell

2.1. Bewegung des Rohres

Das Rohr konstanten Querschnitts wird als Biegeträger entsprechend der technischen Biegetheorie betrachtet; Normalkräfte im Rohrmantel, Bettungseinflüsse, die Eigenlast und die innere Dämpfung werden vernachlässigt; die äußere Dämpfung wird proportional zur Schwinggeschwindigkeit des Rohres vorausgesetzt. Damit ergibt sich die Bewegungsgleichung des durch-

strömten Rohres in einheitenfreier Darstellung nach [2] als

$$v'''' + \ddot{v} + \kappa \dot{v} + 2\alpha_0 \beta (1 + \mu \Phi) \dot{v}' + [\pi_0 + \alpha_0^2 (1 + \mu \Phi)^2 + (1 - z) \alpha_0 \beta \mu \Phi'] v'' = 0. \quad (1)$$

Bei Lagerung als Zweistützträger nach Bild 1 gelten die Randbedingungen

$$v(0) = v''(0) = 0, \quad v(1) = v''(1) = 0. \quad (2)$$

Striche kennzeichnen Ableitungen nach z , Punkte Ableitungen nach τ und es wurden folgende einheitenfreie Größen eingeführt:

$$\begin{aligned} z &= s_0/L \\ \tau &= L^{-2} \sqrt{EI/(\mu_R + \mu_F)} \cdot t \\ v &= w/L \\ \alpha_0 &= V_0 L \sqrt{\mu_F/(EI)} \\ \pi_0 &= P_0 A_F L^2/(EI) \\ \beta &= \sqrt{\mu_F/(\mu_R + \mu_F)} \\ \kappa &= k_a L^2/\sqrt{EI(\mu_R + \mu_F)} \end{aligned} \quad (3)$$

In den Größen nach (3) bedeuten:

- s_0 – Ortskoordinate längs der unverformten Rohrachse
- t – Zeit
- w – Biegeauslenkung der Rohrachse
- L – Länge des Rohres
- EI – Biegesteifigkeit des Rohres
- A_F – lichter Rohrquerschnitt

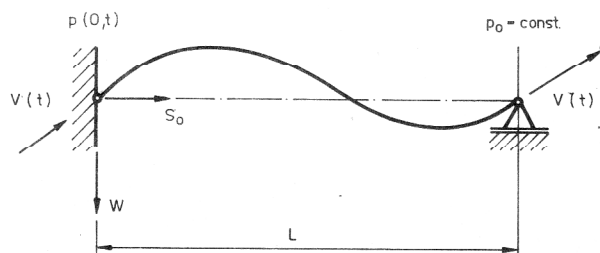


Bild 1
 Lagerung des Rohres als Zweistützträger

- μ_R – Masse je Längeneinheit für das Rohr
- μ_F – Masse je Längeneinheit für das Medium
- V_0 – Nenngeschwindigkeit des Mediums
- p_0 – Nenndruck des Mediums für $s_0 = L$
- k_a – Koeffizient der äußeren Dämpfung

Die in (1) auftretende reelle Zahl μ charakterisiert die Größenordnung der Geschwindigkeitspulsationen in Bezug auf die Nenngeschwindigkeit des strömenden Mediums; es wird daher für praktische Fälle i. allg. $\mu \ll 1$ sein. Die Art der Pulsationen kommt durch die Funktion $\Phi(\tau)$ zum Ausdruck.

2.2. Bewegung des Mediums

Die Bewegung des inkompressiblen, reibungsfreien Mediums im Rohr konstanten lichten Querschnitts wird durch ein Fadenmodell beschrieben. Der Vektor der Relativgeschwindigkeit wird als tangential zur verformten Rohrachse gerichtet vorausgesetzt und die Rückwirkung der Rohrbewegung auf die Relativbewegung des Mediums vernachlässigt. Bei $s_0 = L$ strömt das Medium in ein Reservoir, in dem der konstante Druck p_0 herrscht. Als Lösung der Kontinuitäts- und der Bewegungsgleichung folgt für die Relativgeschwindigkeit V und den Druck p in einheitenfreier Darstellung nach [2]

$$\begin{aligned} VL\sqrt{\mu_F/(EI)} &= \alpha_0 [1 + \mu\Phi(\tau)], \\ pA_F L^2/(EI) &= \pi_0 + \mu\alpha_0\beta(1-z)\Phi(\tau). \end{aligned} \quad (4)$$

Deterministische Pulsationen

Für diesen Fall wird $\Phi(\tau)$ als periodische Funktion der Zeit in der Form

$$\Phi(\tau) = \cos(\vartheta_0\tau + \varphi_0) \quad (5)$$

angenommen. Die Gln. (4) und (5) stellen einen speziellen Fall der in [2] betrachteten deterministischen, periodischen Pulsationen der Strömungsgrößen dar. In (5) ist ϑ_0 die einheitenfreie Pulsationskreisfrequenz und φ_0 ein entsprechender Phasenwinkel.

Stochastische Pulsationen

Für diesen Fall wird $\Phi(\tau)$ als stationärer Gauß-Prozess mit dem Erwartungswert Null, der Korrelationsfunktion

$$K_\Phi(\tau) = \sigma^2 \exp(-\rho|\tau|) \left[\cos \Theta\tau + \frac{\rho}{\Theta} \sin \Theta|\tau| \right] \quad (6)$$

und der Spektraldichte

$$S_\Phi(\omega) = \frac{2\sigma^2}{\pi} \frac{\rho\vartheta^2}{(\omega^2 - \vartheta^2)^2 + 4\rho^2\omega^2} \quad (7)$$

angenommen. Der Prozess $\Phi(\tau)$ kann mit Hilfe eines zeitinvarianten Formfilters

$$\Phi'' + 2\rho\Phi' + \vartheta^2\Phi = \nu\xi(\tau) \quad (8)$$

aus Gaußschem weißem Rauschen $\xi(\tau)$ erzeugt werden. Es kennzeichnet $E\{\dots\}$ die Bildung des Erwartungswertes, $\delta(\dots)$ die Diracsche Deltafunktion und es gilt:

$$E\{\xi(\tau) \cdot \xi(\tau + \tau^*)\} = \delta(\tau^*) \quad (9)$$

$$\vartheta^2 = \Theta^2 + \rho^2$$

$$\nu^2 = 4\sigma^2\rho\vartheta^2$$

Die in (6) bis (9) auftretenden einheitenfreien Größen bedeuten:

- Θ – vorherrschende Kreisfrequenz
- ρ – Korrelationsparameter
- σ^2 – Dispersion
- ω – Variable im Frequenzbereich

Bei $\rho \ll \Theta$ stellt $\Phi(\tau)$ einen Schmalbandprozess mit verborgener Periodizität dar. Die Maxima der Spektraldichte liegen in der Nähe von $\omega_{1,2} \approx \pm\Theta$; die Bandbreite ist proportional zu ρ . Bild 2 zeigt den prinzipiellen Verlauf von $S_\Phi(\omega)$ und den Einfluß von ρ .

Beim Grenzübergang $\rho \rightarrow 0$ wird $\Theta = \vartheta$ und aus (6) folgt $\lim_{\rho \rightarrow 0} K_\Phi(\tau) = \sigma^2 \cos \vartheta\tau$ (10)

als Korrelationsfunktion des stochastischen Prozesses

$$\Phi(\tau) = \sqrt{2} \sigma \cos(\vartheta\tau + \varphi). \quad (11)$$

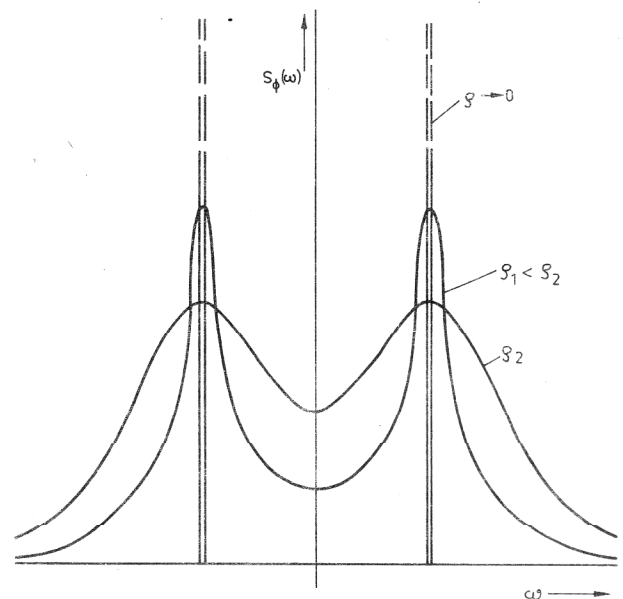


Bild 2
Spektraldichtefunktion (Prinzipiskizze)

In (11) ist φ eine auf $[0, 2\pi]$ gleichmäßig verteilte, zufällige Phase und ϑ stellt eine deterministische, einheitenfreie Kreisfrequenz dar, die ϑ_0 in (5) entspricht.

3. Ermittlung der Parameterresonanzbereiche

3.1. Diskretisierung des Problems

Die Bewegung des elastischen Kontinuums Rohr wird durch die partielle Dgl. (1) mit orts- und zeitabhängigen Koeffizienten und die Randbedingungen (2) beschrieben. Die Darstellung

$$v(z, \tau) \approx \sum_{i=1}^n v_i(z) q_i(\tau) \quad (12)$$

definiert ein Ersatzsystem mit n Freiheitsgraden, das den weiteren Untersuchungen zugrundegelegt wird. In (12) sind die $v_i(z)$ die den Randbedingungen (2) genügenden Eigenfunktionen des schwingenden Biegeträgers konstanter Steifigkeit und Massenbelegung, dessen Bewegungsgleichung aus (1) für $\kappa = \alpha_o = \pi_o = 0$ hervorgeht. Die λ_i bzw. $\omega_{io} = \lambda_i^2$ sind die entsprechenden Eigenwerte bzw. einheitenfreien Eigenkreisfrequenzen. Mit (12) folgt aus (1) das System gewöhnlicher Dgln.

$$\ddot{q}_i + \omega_{io}^2 q_i + \sum_{j=1}^n [d_{ij} \dot{q}_j + k_{ij} q_j] = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

mit den zeitabhängigen Koeffizientenmatrizen $D = \{d_{ij}\}$ und $K = \{k_{ij}\}$ mit

$$d_{ij}(\tau) = \kappa \delta_{ij} + 2\alpha_o \beta [1 + \mu \Phi(\tau)] u_{ij}, \quad (14)$$

$$k_{ij}(\tau) = \left\{ \pi_o + \alpha_o^2 [1 + \mu \Phi(\tau)]^2 \right\} r_{ij} + [\alpha_o \beta \mu \Phi(\tau)] p_{ij}. \quad (15)$$

In (14), (15) sind die δ_{ij} die Elemente der Einheitsmatrix; die übrigen Abkürzungen sind definiert als

$$u_{ij} = \frac{1}{c_i} \int_0^1 v_i v_j dz, \quad r_{ij} = \frac{1}{c_i} \int_0^1 v_i v_j' dz, \quad (16)$$

$$p_{ij} = \frac{1}{c_i} \int_0^1 (1-z) v_i v_j' dz, \quad c_i = \int_0^1 v_i^2 dz.$$

Das Dgl.-System (13) wird auf die Vektor-Dgl.

$$\dot{x} = G(\tau)x \quad (17)$$

transformiert. Mit der Nullmatrix O , der Einheitsmatrix I und der Diagonalmatrix $\Omega = \{ \omega_{io}^2 \}$ gilt

$$x = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n \ | \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dots \ \dot{q}_n]^T,$$

$$G = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -\Omega - K & -D \end{array} \right]. \quad (18)$$

Mittels des Zeitverhaltens der Lösungen von (13) bzw. (17) werden näherungsweise Aussagen über die Stabilität des spannungsfreien, unverformten Zustandes $v(z, \tau) \equiv 0$ des Rohres erhalten, so daß im weiteren die Lösung $x(\tau) \equiv 0$ auf Stabilität zu untersuchen ist. Hierbei ist zwischen deterministischen und stochastischen Pulsationen zu unterscheiden. Im ersten Fall sind $q_i(\tau)$ und $x(\tau)$ deterministische Größen, während sie im zweiten Fall stochastische Prozesse beschreiben.

3.2. Der Fall deterministischer Pulsationen

Unter Zugrundelegung der Definition der Instabilität, Stabilität und asymptotischen Stabilität für diskrete, deterministische Systeme (vgl. z. B. bei [5]) wird die Lösung $x(\tau) \equiv 0$ auf Stabilität bezüglich Störungen der An-

fangsbedingungen untersucht. Hierbei beschränkt man sich für fest vorgegebene Werte der Systemgrößen i. allg. auf die Ermittlung der Grenzkurven der Instabilitätsbereiche in der $\mu \vartheta_o$ -Ebene. In [1] wurde nachgewiesen, daß beim durchströmten Rohr für $\mu \ll 1$ nur die sog. Hauptinstabilitätsbereiche von praktischem Interesse sind, und daß die zugehörigen Grenzkurven mit der erweiterten Methode von Mettler hinreichend genau ermittelt werden können.

Für den hier betrachteten Lagerungsfall ergeben sich die Grenzkurven nach der in [2], [6] dargelegten Modifikation der erweiterten Methode von Mettler:

– bei einfachen Parameterresonanzen E_1^{ii} als

$$\vartheta_G(\mu) = 2\pi^2 i^2 - \alpha_o^2 - \pi_o \pm B \sqrt{\mu^2 - \mu_{\min}^2} \quad (19)$$

für $\mu_{\min} \leq \mu \ll 1$ mit

$$B = \alpha_o \sqrt{\alpha_o^2 + \beta^2 \pi^4 i^4 / 4}, \quad \mu_{\min} = \kappa / B; \quad (20)$$

– bei Kombinationsresonanzen vom Summentyp S_1^{ij} mit $i > j$ und $i - j$ ungerade als

$$\vartheta_G(\mu) = \pi^2 (i^2 + j^2) - \alpha_o^2 - \pi_o \pm B \sqrt{\mu^2 - \mu_{\min}^2} \quad (21)$$

für $\mu_{\min} \leq \mu \ll 1$ mit

$$B = 8\alpha_o \beta \frac{i^2 j^2}{(i^2 - j^2)^2}, \quad \mu_{\min} = \kappa / B; \quad (22)$$

– Kombinationsresonanzen vom Differenztyp D_1^{ij} treten nicht auf.

3.3. Der Fall stochastischer Pulsationen

Ist $\Phi(\tau)$ der in 2.2. beschriebene stochastische Prozeß, so wird (17) eine stochastische Differentialgleichung, deren Lösung $x(\tau) \equiv 0$ auf Stabilität untersucht werden soll. Aus der großen Anzahl der im stochastischen Fall bekannten Stabilitätsdefinitionen [7] wird hier die asymptotische Stabilität bezüglich der ersten und zweiten Momente $m_i(\tau) = E\{x_i(\tau)\}$ und $M_{ij} = E\{x_i(\tau) \cdot x_j(\tau)\}$ mit $ij = 1, 2, \dots, \bar{n} = 2n$ herausgegriffen. Dabei sei die Anfangsbedingung $x_o = x(\tau_o)$ von (17) Gaußverteilt und unabhängig von Φ . Es gelten nach [7] folgende Definitionen:

Definition 1:

Die Lösung $x \equiv 0$ heißt stabil bezüglich der ersten Momente, wenn für beliebiges $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart existiert, daß mit $\|\bar{m}(\tau_o)\| < \delta$ auch $\sup_{\tau_o \leq \tau < \infty} \|\bar{m}(\tau)\| < \epsilon$

ist bzw. asymptotisch stabil bezüglich der ersten Momente, wenn außerdem für hinreichend kleine Anfangsmomente $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\bar{m}(\tau)\| = 0$ gilt. Dabei ist

$$\bar{m}(\tau) = [m_1(\tau), m_2(\tau), \dots, m_{\bar{n}}(\tau)]^T,$$

$$\|\bar{m}(\tau)\|^2 = \sum_{i=1}^{\bar{n}} [m_i(\tau)]^2.$$

Dabei bezeichnet $E_N \{ \dots \}$ die Erwartungswertbildung mit (28); es gilt ferner

$$b_{0, \alpha_1=1, \bar{o}}^N = b_{0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0 \ 0 \dots 0}^N$$

$i \qquad \bar{n} \ \bar{n}+1 \ 1$

$$b_{0, \alpha_1=1, \alpha_j=1, \bar{o}}^N = b_{0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0 \ 0 \dots 0}^N$$

$i \qquad \qquad j \qquad \bar{n} \ \bar{n}+1 \ 1$

Die verallgemeinerten Quasimomentenfunktionen, die das Zeitverhalten der ersten und zweiten Momente des Prozesses $x(\tau)$ beeinflussen, wurden in [8] zu Vektoren $b_1^N(\tau)$ und $b_2^N(\tau)$ zusammengefaßt. $b_1^N(\tau)$ und $b_2^N(\tau)$ genügen dem folgenden Dgl.-System:

$$\begin{aligned} \dot{b}_1^N &= R_1^N b_1^N + f_1(\tau) \\ \dot{b}_2^N &= R_2^N b_2^N + Q(\tau) b_1^N + f_2(\tau) \end{aligned} \quad (31)$$

Die Matrizen R_1^N und R_2^N sind konstant, besitzen Blockstruktur und können nach einem relativ einfachen numerischen Algorithmus aus den Matrizen A , B_1 , B_2 , C und der Matrix der Varianz- und Kreuzvarianzfunktionen des Filterprozesses $y(\tau)$, $\{ \mu_{\bar{n}+p, \bar{n}+q} \}$ mit $p, q=1, 2$ zusammengesetzt werden. Einige Beispiele sind in [8] angegeben.

Nach [8], [10] gelten folgende Sätze:

1. Die Lösung $x \equiv 0$ ist in N -ter Näherung ($N \geq 2$) asymptotisch stabil bezüglich der ersten Momente, wenn die Realteile aller Eigenwerte der Matrix R_1^N negativ sind.
2. Die Lösung $x \equiv 0$ ist in N -ter Näherung ($N \geq 2$) asymptotisch stabil bezüglich der ersten und zweiten Momente, wenn die Realteile aller Eigenwerte der Matrizen A , R_1^2 sowie R_1^N und R_2^N (bei $N > 2$) negativ sind.

4. Numerische Resultate

Die Anwendung des Näherungsverfahrens nach der Quasimomentenmethode wird am Beispiel eines als Zweistützträger gelagerten geraden durchströmten Rohres gemäß Bild 1 demonstriert. Für die Systemgrößen $\alpha_0 = 0.5$, $\pi_0 = 0$, $\beta = 0.4$, $\kappa = 0.1$, $\rho = 0.1$, $\sigma = 1$

und einen zweigliedrigen Diskretisierungsansatz entsprechend (12) werden die Grenzkurven der Instabilitätsbereiche in der $\mu\vartheta$ -Ebene ermittelt. Nach Satz 2 liegt die Stabilität der Lösung $x \equiv 0$ bezüglich der ersten und zweiten Momente in N -ter Näherung vor, wenn die Realteile aller Eigenwerte der Matrizen A , R_1^2 , R_1^N und R_2^N negativ sind. A ist die Matrix des ungestörten Systems ($\mu = 0$); ihre Eigenwerte besitzen negative Realteile, wenn die Nenngeschwindigkeit des strömenden Mediums unterhalb des kritischen Wertes $\alpha_{okrit} = \pi^2 - \pi_0$ liegt. Zur Untersuchung der Matrizen R_1^N

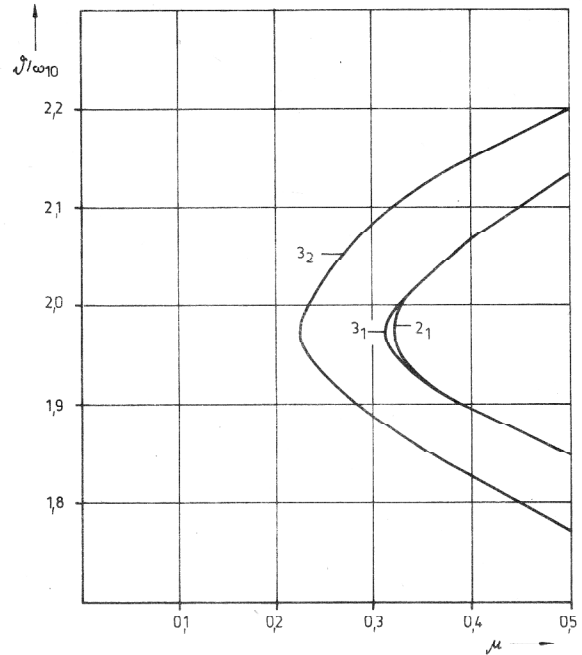


Bild 3
Näherungen für den Hauptinstabilitätsbereich E_1^{11} im stochastischen Fall für $\alpha_0 = 0.5$, $\pi_0 = 0$, $\beta = 0.4$, $\kappa = 0.1$, $\rho = 0.1$, $\sigma = 1$

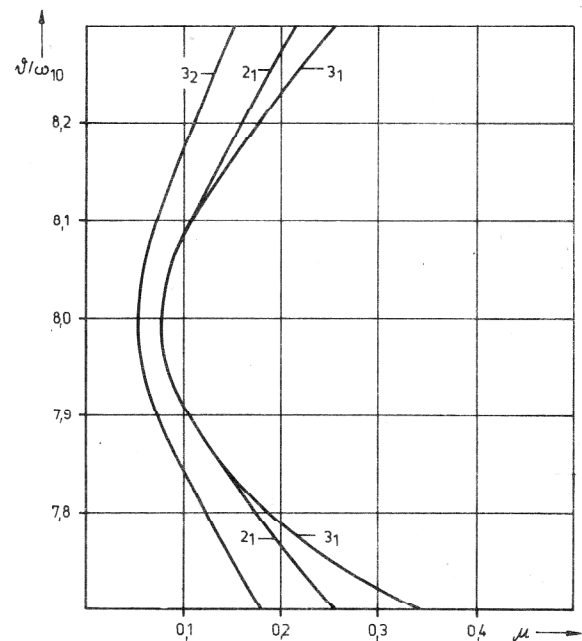


Bild 4
Näherungen für den Hauptinstabilitätsbereich E_1^{22} im stochastischen Fall für $\alpha_0 = 0.5$, $\pi_0 = 0$, $\beta = 0.4$, $\kappa = 0.1$, $\rho = 0.1$, $\sigma = 1$

($N \geq 2$) und R_2^N ($N > 2$) wurde ein FORTRAN-Programm geschrieben. Die damit berechneten Grenzkurven der Instabilitätsbereiche in der $\mu\vartheta$ -Ebene sind in den Bildern 3 bis 5 dargestellt. Das Stabilitätsgebiet liegt jeweils links von den Grenzkurven.

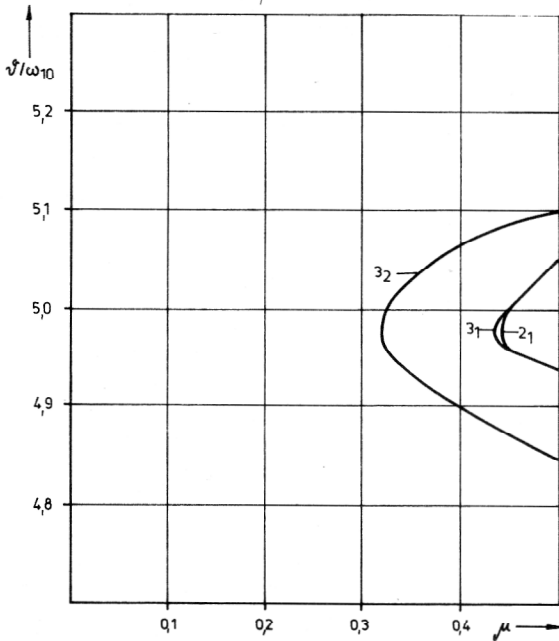


Bild 5
Näherungen für den Hauptinstabilitätsbereich S_1^{21} im stochastischen Fall für $\alpha_0 = 0.5$, $\pi_0 = 0$, $\beta = 0.4$, $\kappa = 0.1$, $\rho = 0.1$, $\sigma = 1$

Qualitativ ergeben sich für $\mu \ll 1$ ähnliche Resultate wie im Fall deterministischer Mediumpulsationen. Man erhält ebenfalls drei Instabilitätsbereiche; die in den Bildern 3 und 4 dargestellten Bereiche entsprechen den einfachen Parameterresonanzen E_1^{11} bzw. E_1^{22} ; der in Bild 5 dargestellte Bereich entspricht der Kombinationsresonanz vom Summentyp S_1^{21} ; Kombinationsresonanz vom Differenztyp D_1^{21} tritt nicht auf.

Die Kurven sind mit Ziffern N_i bezeichnet; sie geben Auskunft über die Ordnung der Näherung N und darüber, mit welcher Matrix R_1^N die jeweilige Kurve berechnet wurde. Bei diesem Beispiel weisen schon die wenigen berechneten Näherungen auf eine gute Konvergenz des Verfahrens hin. Die Kurve 3_2 gibt jeweils das kleinste Stabilitätsgebiet an. Sie ist für den betrachteten Lagerungsfall als gute Näherung für die Grenzkurve anzusehen.

In der Literatur [11] wurde bisher für analoge Systeme mit zwei Freiheitsgraden die Momentenstabilität nur in der Gauß-Näherung (Kurve 2_1) untersucht. Es ist festzustellen, daß diese Näherung für das durchströmte Rohr im betrachteten Lagerungsfall stets ein zu großes Stabilitätsgebiet ergibt, so daß man mit der Gauß-Näherung auf der unsicheren Seite liegt.

Der Einfluß des Korrelationsparameters ρ auf Lage und Form der Hauptinstabilitätsbereiche ist den Bildern 6 bis 8 zu entnehmen. Mit abnehmendem ρ , d. h. mit zunehmender Schmalbandigkeit des Prozesses $\Phi(\tau)$ verringern sich Schwellwert und Öffnungsbreite der Hauptinstabilitätsbereiche. Für $\rho \rightarrow 0$ erhält man auf Grund von (10) und (11) die Grenzkurven für den Fall deterministischer Pulsationen.

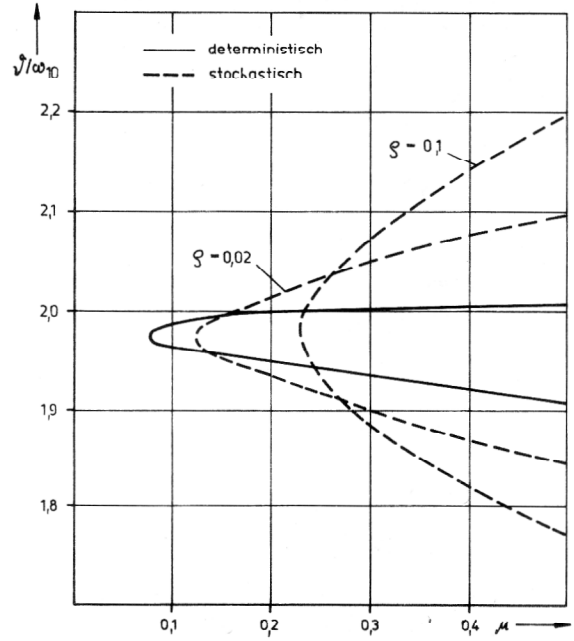


Bild 6
Hauptinstabilitätsbereich E_1^{11} bei deterministischer bzw. stochastischer Modellierung für $\alpha_0 = 0.5$, $\pi_0 = 0$, $\beta = 0.4$, $\kappa = 0.1$, $\sigma = 1$

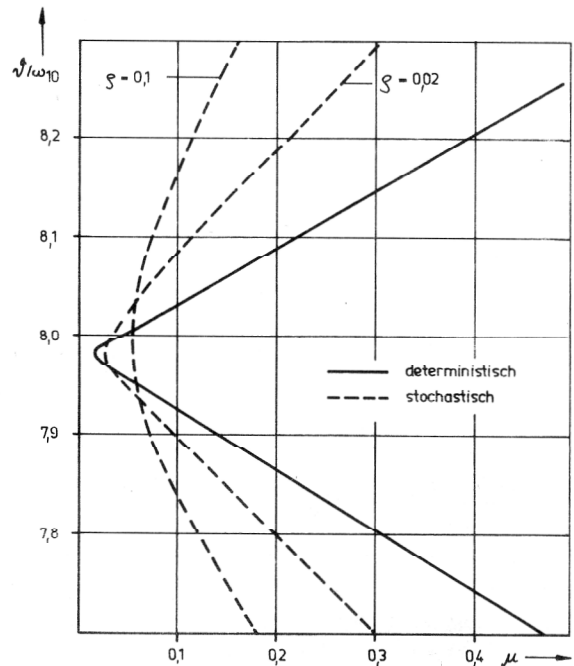


Bild 7
Hauptinstabilitätsbereich E_1^{22} bei deterministischer bzw. stochastischer Modellierung für $\alpha_0 = 0.5$, $\pi_0 = 0$, $\beta = 0.4$, $\kappa = 0.1$, $\sigma = 1$

Die Schwellwerte sind monoton fallende Funktionen von ρ und es gilt

$$\mu_{\min}^{\det} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \mu_{\min}^{\text{stoch}} < \mu_{\min}^{\text{stoch}}, \quad (32)$$

so daß sich ein Hauptinstabilitätsbereich bei stocha-

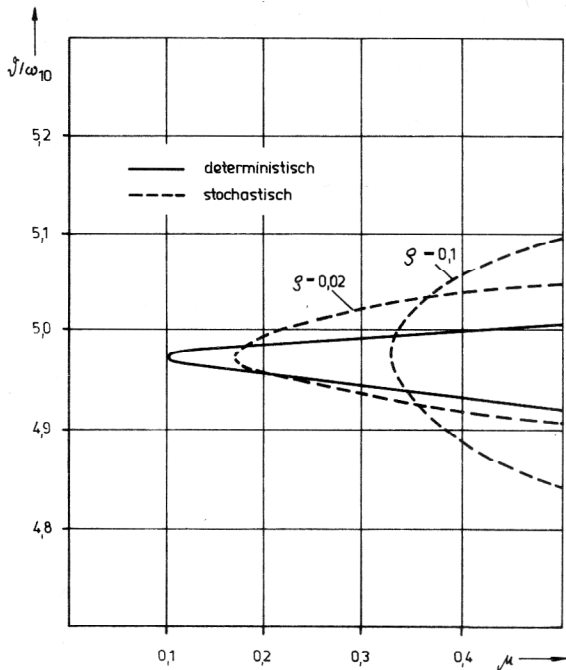


Bild 8
Hauptinstabilitätsbereich S_1^{21} bei deterministischer bzw. stochastischer Modellierung für $\alpha_0 = 0.5$, $\pi_0 = 0$, $\beta = 0.4$, $\kappa = 0.1$, $\sigma = 1$

stischer Modellierung hinsichtlich seines Auftretens, d. h. hinsichtlich der Erfüllung der Bedingung $\mu_{\min} \leq \mu \leq \mu_{\max}$ (mit μ_{\max} als bekannte obere Schranke für den Parameter μ) als ungefährlicher erweist als bei deterministischer Modellierung.

Von praktischem Interesse sind vor allem diejenigen Intervalle I der Pulsationsfrequenz, die zur Vermeidung von Parameterresonanzen auszuschließen sind. Diese Intervalle werden aber für vorgegebenes μ_{\max} wesentlich durch die Öffnungsbreite der Hauptinstabilitätsbereiche bestimmt. Sieht man von einem sehr schmalen Bereich $\mu \approx \mu_{\min}^{\text{stoch}}$ ab, dann sind zur Vermeidung von Parameterresonanzen die Bedingungen

$$\vartheta \notin I_{\text{det}} \text{ für } \mu_{\min}^{\text{det}} \leq \mu_{\max} \leq \mu_{\min}^{\text{stoch}}, \quad (33)$$

$$\vartheta \notin I_{\text{stoch}} \supset \tilde{I}_{\text{det}} \text{ für } \mu_{\min}^{\text{stoch}} \leq \mu_{\max}$$

für jeden Hauptinstabilitätsbereich zu erfüllen; vergl. Bild 9.

Da erst bei bekanntem μ_{\min}^{det} und $\mu_{\min}^{\text{stoch}}$ für vorgegebenes μ_{\max} entschieden werden kann, welche der beiden Bedingungen (33) zutrifft, müßte die Berechnung der Grenzkurven sowohl für das deterministische als auch für das stochastische Modell erfolgen, damit die auszuschließenden Frequenzintervalle mit Sicherheit erkannt werden können. Es werden jedoch die Schwellwerte sehr wesentlich durch die i. allg. nur ungenau bekannten Systemdämpfungen bestimmt, so daß die Schwellwerte und damit die Bedingungen (33) mit relativ großen Unsicherheiten behaftet sind. Außerdem kann man davon ausgehen, daß eine stochastische Modellierung für die

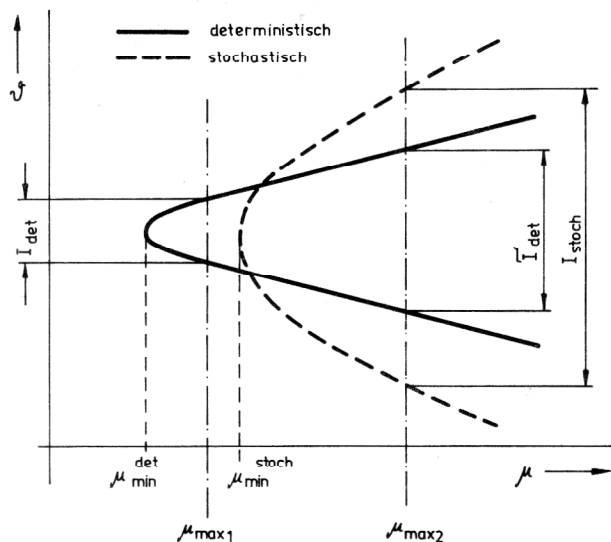


Bild 9
Schematische Darstellung der Grenzkurven für $\mu \ll 1$ mit auszuschließenden Frequenzbereichen

Pulsationen der Strömungsgrößen ein genaueres Bild der Mediumbewegung liefert. Damit kann man sich auf die Berechnung nach dem stochastischen Modell beschränken und liegt für die auszuschließenden Frequenzbereiche mit $\tilde{I}_{\text{det}} \subset I_{\text{stoch}}$ auf der sicheren Seite.

Ein Vergleich mit den Ergebnissen von Babin [4] für die Gauß-Näherung im Falle des geraden Rohres zeigt für die Hauptinstabilitätsbereiche E_1^{11} und S_1^{21} qualitative gute Übereinstimmung, während an Stelle von E_1^{22} in [4] mehrere Teilbereiche erhalten wurden, für deren Auftreten jedoch keine befriedigende Erklärung gefunden werden kann.

5. Schlußbemerkungen

Für das in der vorliegenden Arbeit vorgestellte Näherungsverfahren zur Stabilitätsuntersuchung stochastisch parametererregter Systeme konnte bereits bei einer Reihe von Testaufgaben [10] die Brauchbarkeit nachgewiesen werden. Die Frage der Konvergenz des Verfahrens muß im konkreten Fall stets neu untersucht werden. Jedoch wächst auch bei diesem Verfahren bereits für Systeme mit zwei Freiheitsgraden der numerische Aufwand mit wachsender Ordnung der Näherung schnell an, allerdings wesentlich langsamer als bei der in [11] vorgeschlagenen modifizierten Momentenmethode.

Für die Stabilitätsuntersuchung des durchströmten geraden Rohres ermöglicht das auf der Quasimomentenmethode beruhende Näherungsverfahren im Gegensatz zu [4], über die Gauß-Näherung hinausgehende Näherungen zu berechnen. Ein Vergleich mit den Ergebnissen bei deterministischer Modellierung ergab, daß man für die auszuschließenden Frequenzbereiche nach dem

stochastischen Modell auf der sicheren Seite liegt. Im weiteren besteht die Aufgabe, andere Lagerungsfälle des geraden Rohres und den Fall des gekrümmten Rohres in analoger Weise zu untersuchen.

LITERATUR

- [1] Becker, O.: Lineare Stabilitätstheorie des räumlich schwach gekrümmten Trägers mit Anwendung auf das durchströmte Rohr. Dissertation, TH Magdeburg 1982.
- [2] Becker, O.: Parameterresonanzen beim durchströmten geraden Rohr. Technische Mechanik 2 (1983), S. 16–24.
- [3] Chen, S.S.: Dynamic stability of a tube conveying fluid. Journal of the Engineering Mechanics Division (1971) S. 1469–1485.
- [4] Babin, O.A.: Trudy MEI. vvd. 578 (1982) S. 54–61.
- [5] Malkin, J.G.: Theorie der Stabilität einer Bewegung. Akademie-Verlag, Berlin 1959.
- [6] Becker, O.: Näherungsweise Ermittlung der Hauptinstabilitätsbereiche deterministisch schwach parametererregter Systeme, Wiss. Berichte der IH Zittau, IHZ-M-82-397.
- [7] Bunke, M.: Gewöhnliche Differentialgleichungen mit zufälligen Parametern. Akademie-Verlag, Berlin 1972.
- [8] Barthel, S.: Stabilitätsuntersuchung stochastisch parametererregter linearer Systeme mit der Quasimomentenmethode. Wiss. Berichte der IH Zittau, IHZ-M-82-396.
- [9] Sperling, L.: Analyse stochastisch erregter nichtlinearer Systeme mittels linearer Differentialgleichungen für verallgemeinerte Quasimomentenfunktionen. ZAMM 59 (1979) S. 169–176.
- [10] Barthel, S.: Untersuchung der Momentenstabilität linearer Systeme mit stochastischer Parametererregung. Wiss. Berichte der IH Zittau, IHZ-M-82-413.
- [11] Bolotin, V.V.: Slučajnye kolebanija uprugich sistem. „Nauka“, Moskva, 1979.