

Die Knicklast des gelenkig gelagerten Stabes mit Kragarm unter tangententreuer Belastung

Reiner Hartung

0. Einleitung

Die Stabilitätsuntersuchung nichtkonservativer Systeme erfordert die Anwendung des kinetischen Stabilitätskriteriums. Bei diesem voraussetzungslos gültigen kinetischen Kriterium wird das bewegte System untersucht und die kleinste kritische Last ermittelt, bei der nicht mehr jede kleine Störung zu einer Bewegung in der nächsten Umgebung der Gleichgewichtslage führt. Im Gegensatz dazu ist das statische Kriterium an die Voraussetzung der Existenz nichttrivialer Gleichgewichtslagen gebunden und stellt somit für die Frequenz $\omega = 0$ einen Sonderfall des kinetischen Stabilitätskriteriums dar.

Erstmals wurde von Beck in [1] nachgewiesen, daß man für den nichtkonservativen Belastungsfall des einseitig eingespannten Stabes mit tangentialer Einzellast am freien Ende die 8,13fache kritische Last im Vergleich zur richtungstreuen Belastung erhält. Er widerlegte mit Hilfe des kinetischen Stabilitätskriteriums die Auffassung, daß für diesen Belastungsfall keine Knickgefahr bestehe.

Eine umfassende Behandlung der Theorie für nichtkonservative Probleme wird von den Autoren in [2] und [3] erbracht. Jedoch werden in der Literatur nur einige Grundfälle hinsichtlich Belastung und Lagerung behandelt. Bei dem vorliegenden Fall (Bild 1) ist zu erkennen, daß in Abhängigkeit von der Länge des Kragarmes, bei konstanter Gesamtlänge des Stabes, zwei Grundfälle existieren müssen, und zwar der einseitig eingespannte Stab mit tangentialer Endlast und der beidseitig gelenkig gelagerte Stab. Da für den einseitig eingespannten Stab mit tangentialer Endbelastung das statische Stabilitätskriterium zu völlig falschen Ergebnissen führt, wird für den vorliegenden Fall das allgemein gültige kinetische Stabilitätskriterium angewandt.

1. Differentialgleichung und Lösungsansätze

Für den in Bild 1 dargestellten Stab erhält man nach dem D'Alembertschen Prinzip für kleine Schwingungen des Stabes folgende Differentialgleichungen:

$$EI_1 y_1^{IV} + F y_1^{II} + \rho_1 A_1 \ddot{y}_1 = 0 \quad (1)$$

$$EI_2 y_2^{IV} + F y_2^{II} + \rho_2 A_2 \ddot{y}_2 = 0 \quad (2)$$

Dabei bedeuten ()' die Ableitungen nach der Länge x und () $\dot{}$ die Ableitungen nach der Zeit t . Die Trägheitsmomente, die Flächen und die Dichten ρ sollen abschnittsweise konstant sein.

Durch Trennung der Variablen mit dem Produktansatz (3) bekommt man für jeden Abschnitt jeweils zwei gewöhnliche Differentialgleichungen mit den allgemeinen Lösungen für den Weganteil (4) und den Zeitanteil (5).

$$y(x,t) = Y(x) T(t) \quad (3)$$

$$Y(x) = C_1 \text{Cosh}(\lambda_1 x) + C_2 \text{Sinh}(\lambda_1 x) + C_3 \cos(\lambda_2 x) + C_4 \sin(\lambda_2 x) \quad (4)$$

$$T(t) = C_5 e^{i\omega t} + C_6 e^{-i\omega t} \quad (5)$$

Als Abkürzungen wurden dabei verwendet:

$$\lambda_1 = \sqrt{\sqrt{(\alpha/2)^2 + u \omega^2} - \alpha/2}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\sqrt{(\alpha/2)^2 + u \omega^2} + \alpha/2}$$

$$\alpha = F/(EI) ; \quad u = \rho A/(EI)$$

Die Exponentialausdrücke in (5) lassen erkennen, daß die Schwingung solange begrenzt bleibt, solange ω im

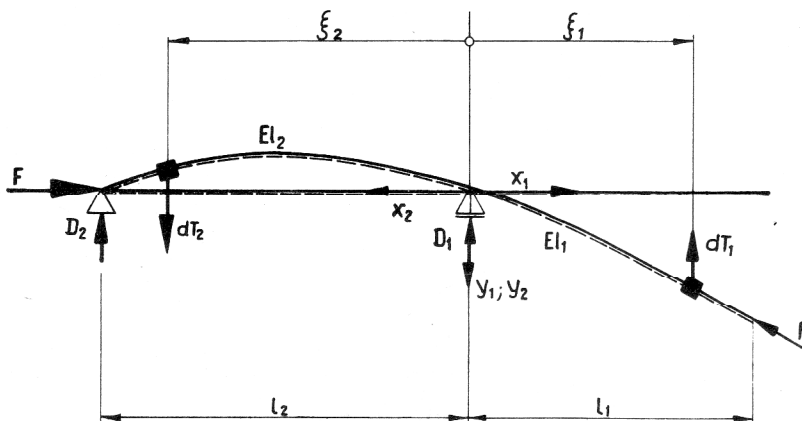


Bild 1
Gelenkig gelagerter Druckstab mit Kragarm im ausgeknickten Zustand

reellen Bereich liegt. Diesen reellen Bereich ermittelt man mit Hilfe der Gleichung (4), indem die Bestimmung der Konstanten C_1 bis C_4 durch die Rand- und Übergangsbedingungen erfolgt. Die so erhaltenen Gleichungen besitzen nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn sie voneinander linear abhängig sind. Der Zusammenhang zwischen Stabkraft F und Schwingungsfrequenz ω wird grafisch in Form von Eigenwertkurven dargestellt. Diese Eigenwertkurven kennzeichnen den reellen Bereich für ω .

Für den gelenkig gelagerten Stab mit Kragarm lauten die beiden allgemeinen Lösungen:

$$Y_1(x_1) = C_1 \text{Cosh}(\lambda_1 x_1) + C_2 \text{Sinh}(\lambda_1 x_1) + C_3 \cos(\lambda_2 x_1) + C_4 \sin(\lambda_2 x_1) \quad (6)$$

$$Y_2(x_2) = C_5 \text{Cosh}(\lambda_3 x_2) + C_6 \text{Sinh}(\lambda_3 x_2) + C_7 \cos(\lambda_4 x_2) + C_8 \sin(\lambda_4 x_2) \quad (7)$$

mit

$$\alpha_1 = F/(EI_1); \quad u_1 = \rho_1 A_1/(EI_1)$$

$$\alpha_2 = F/(EI_2); \quad u_2 = \rho_2 A_2/(EI_2)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{(\alpha_1/2)^2 + u_1 \omega^2 - \alpha_1/2}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{(\alpha_1/2)^2 + u_1 \omega^2 + \alpha_1/2}$$

$$\lambda_3 = \sqrt{(\alpha_2/2)^2 + u_2 \omega^2 - \alpha_2/2}$$

$$\lambda_4 = \sqrt{(\alpha_2/2)^2 + u_2 \omega^2 + \alpha_2/2}$$

2. Ermittlung der Eigenwertgleichung

Die Auswertung der Rand- und Übergangsbedingungen

$$Y_1(0) = Y_1'(l_1) = Y_1''(l_1) = 0$$

$$Y_2(0) = Y_2'(l_2) = Y_2''(l_2) = 0$$

$$Y_1'(0) = -Y_2'(0)$$

$$EI_1 Y_1''(0) = EI_2 Y_2''(0)$$

führt zu einem homogenen Gleichungssystem. Nach der Auflösung der Eigenwertdeterminante erhält man die zweiparametrische Eigenwertgleichung (8) mit den Eigenwerten α und ω .

$$\begin{aligned} & (\lambda_3^2 + \lambda_4^2)(\lambda_1^3 \lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2^4) \text{Sinh}(\lambda_1 l_1) \text{Sinh}(\lambda_3 l_2) \sin(\lambda_2 l_1) \\ & - (\lambda_3^2 + \lambda_4^2)(\lambda_1^4 \lambda_2 + \lambda_2^5) \text{Sinh}(\lambda_3 l_2) \\ & - (\lambda_3^2 + \lambda_4^2) 2 \lambda_1^2 \lambda_3^2 \text{Cosh}(\lambda_1 l_1) \text{Sinh}(\lambda_3 l_2) \cos(\lambda_2 l_1) \\ & + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3 l_1 / I_2 \text{Cosh}(\lambda_1 l_1) \text{Cosh}(\lambda_3 l_2) \sin(\lambda_2 l_1) \\ & - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_1 \lambda_2^3 \lambda_3 l_1 / I_2 \text{Sinh}(\lambda_1 l_1) \text{Cosh}(\lambda_3 l_2) \cos(\lambda_2 l_1) \\ & - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_4 l_1 / I_2 \text{Cosh}(\lambda_1 l_1) \text{Sinh}(\lambda_3 l_2) \sin(\lambda_2 l_1) \cot(\lambda_4 l_2) \\ & + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_1 \lambda_2^3 \lambda_4 l_1 / I_2 \text{Sinh}(\lambda_1 l_1) \text{Sinh}(\lambda_3 l_2) \cos(\lambda_2 l_1) \cot(\lambda_4 l_2) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

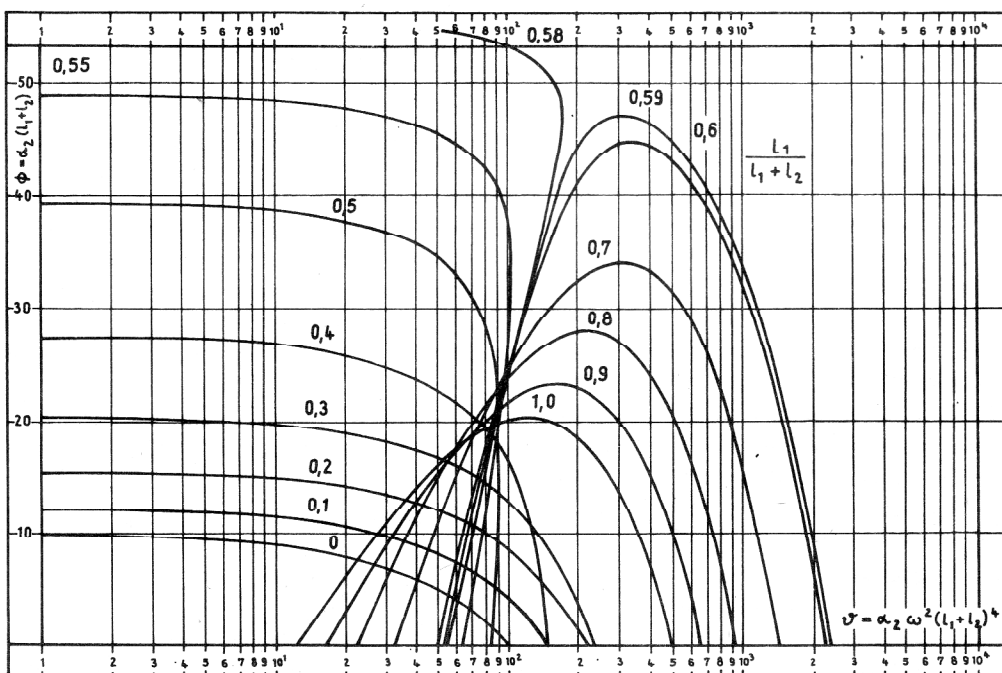
Bei Verwendung der Abkürzungen

$$\Phi = \frac{F}{EI_1} l^2; \quad \kappa = \frac{A_2 I_2}{A_1 I_1}$$

$$\vartheta = u_1 \omega^2 l^4$$

nimmt die Eigenwertgleichung folgende Form an:

Bild 2
Eigenwerte ϑ in Abhängigkeit von Φ und vom Längenverhältnis γ



$$\Phi^2 + 2\vartheta + 2\vartheta \operatorname{Cosh}(\lambda_1 l_1) \cos(\lambda_2 l_1) + \sqrt{\vartheta} \Phi \operatorname{Sinh}(\lambda_1 l_1) \sin(\lambda_2 l_1) + \sqrt{\frac{\vartheta l_1^4 (4\vartheta + \Phi^2)}{4\vartheta\kappa + \Phi^2}} (\lambda_2 \operatorname{Sinh}(\lambda_1 l_1) \cos(\lambda_2 l_1) - \lambda_1 \operatorname{Cosh}(\lambda_1 l_1) \sin(\lambda_2 l_1)) \left(\frac{\lambda_3}{\operatorname{Tanh}(\lambda_3 l_2)} - \frac{\lambda_4}{\tan(\lambda_4 l_2)} \right) = 0 \quad (9)$$

Wird die Biegesteifigkeit des Abschnittes 2 unendlich groß ($\kappa = \infty$), so ergibt sich aus (9) die Eigenwertgleichung des eingespannten Stabes mit tangentialer Endlast [1].

3. Auswertung der Eigenwertgleichung

Für die Eigenwertgleichung (9) gibt es bei jeder Belastung unendlich viele diskrete Eigenfrequenzen. Um den Wert der kritischen Last zu bestimmen, ist es erforderlich, durch Variieren von Φ den Punkt zu suchen, bei dem $\vartheta = 0$ ist oder bei dem die erste und die zweite Nullstelle zusammenfallen. Die Vereinigung der kleinsten Eigenwerte ϑ_1 und ϑ_2 vollzieht sich bei $\Phi = \Phi_k$. Wird der Lastparameter $\Phi > \Phi_k$, so erfolgt der Übergang in den komplexen Bereich und das mechanische System wird dynamisch instabil.

Die Auswertung der Gleichung (9) erfolgte mit Hilfe eines EDV-Programms. Bei der Annahme von gleichen Trägheitsmomenten und Flächen ($\kappa = 1$) für die beiden Abschnitte erhält man die im Bild 2 dargestellten Eigenwertkurven. Der Stab, der in Abhängigkeit von der Länge l_1 statisch bzw. dynamisch instabil werden kann, verfügt beim Übergang zur statischen Instabilität über keine Bewegung mehr.

4. Ergebnisse

Bezeichnet man das Verhältnis der Länge l_1 zur Gesamtlänge des Stabes mit γ , so wird der Stab bei dem Längenverhältnis γ von 0,6 bis 1,0 nur dynamisch instabil. Die Anwendung des statischen Stabilitätskriteriums würde in diesem Fall zu falschen Ergebnissen führen. Alle Eigenwertkurven mit dem Längenverhältnis von 0 bis 0,5 schneiden die Lastachse. Die Eigenwertkurve für den beidseitig gelenkig gelagerten Stab ($\gamma = 0$) schneidet die Lastachse bei $\Phi_k = \pi^2$ und die Eigenwertkurve für den einseitig eingespannten Stab ($\gamma = 1$) ergibt den in [1] errechneten Wert von $\Phi_k = 20,05$ (Bild 3). Bei dem Längenverhältnis γ von 0,584 ergeben sich zwei mögliche Werte für Φ_k , die die Eigenwertgleichung erfüllen. Der kleinste Wert von $\Phi_k = 50,33$, bei dem das System dynamisch instabil würde, stellt die kritische Größe dar. Infolge der beiden Eigenwerte entsteht im Bild 3 ein sprunghafter Übergang zwischen statischer und dynamischer Instabilität. Analoge Ergebnisse wurden in [4], [5] und [6] erzielt. König hat in [4] den einseitig eingespannten Stab, bei dem der Lastangriff sich im Bereich zwischen richtungs- und tangententreuer Belastung bewegt, untersucht (Bild 4). Die Untersuchungen ergaben bei einem Winkel von $\varphi = \varphi_0/2$ zwei kritische Eigenwerte

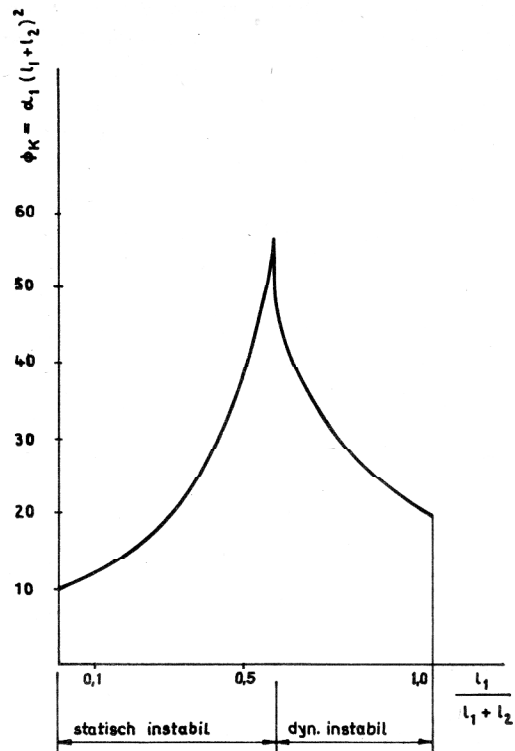


Bild 3 Die kritischen Werte Φ_k in Abhängigkeit vom Längenverhältnis γ

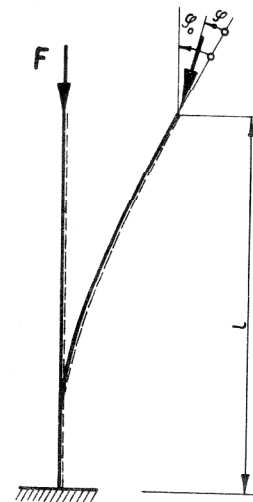


Bild 4 Kraftrichtungswinkel für den einseitig eingespannten Stab

und damit einen sprunghaften Übergang von statischer zu dynamischer Instabilität. Chang beschäftigt sich in [5] und [6] mit der Stabilität elastisch gestützter Träger unter nichtkonservativer Belastung. In diesem Fall treten in Abhängigkeit von der Federsteifigkeit sprunghafte Übergänge zwischen statischer und dynamischer Instabilität auf.

Würde die Kraft F beim Ausknicken ihre Richtung nicht ändern, so müßte die Knicklast aus der Knickbedingung (10) errechnet werden.

$$\alpha_1 l_1 / \tan \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_1 / \tan \alpha_2 l_2 - 1 = 0 \quad (10)$$

$$\text{mit } \alpha_1^2 = F/(EI_1); \quad \alpha_2^2 = F/(EI_2)$$

Definiert man den Knicklängenbeiwert β entsprechend der Beziehung (11), wobei $I_1 = I_2$ sein soll, so ergeben

5. Zusammenfassung

Die Untersuchungen zeigen, daß für die Ermittlung der Knicklast des gelenkig gelagerten Stabes mit Kragarm unter tangentialer Belastung die Anwendung des allgemeingültigen kinetischen Stabilitätskriteriums unbedingt erforderlich ist. Bei einem Längenverhältnis γ von 0,584 erfolgt ein Umschlag von dynamischer zu statischer Instabilität. Diese Tatsache, die bereits für den elastisch gestützten Träger und den einseitig eingespannten Stab unter nichtrichtungstreuer Kraftwirkung gefunden wurde, stellt ein wichtiges Ergebnis dar. Ein Vergleich der richtungstreuen mit der tangentialen Belastung zeigt, daß die richtungstreue Belastung kleinere kritische Lasten ergibt. Darin liegt für die praktische Anwendung die Wirtschaftlichkeit der Erkenntnisse.

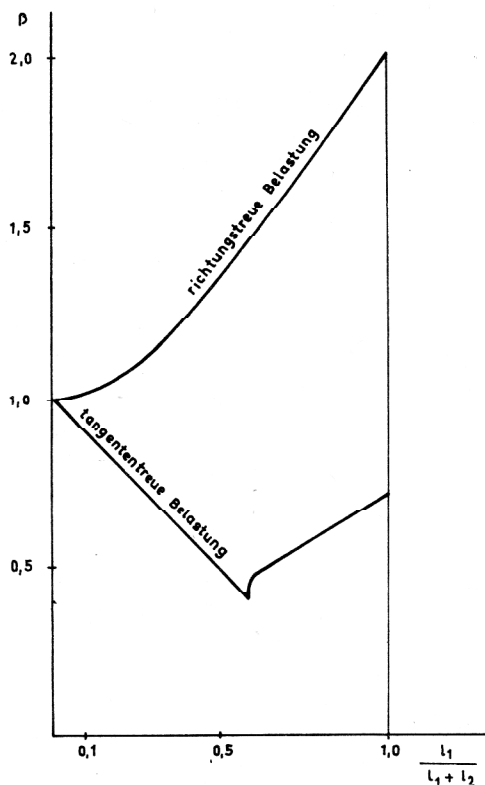


Bild 5
Knicklängenbeiwerte bei tangentialer und richtungstreuer Belastung

sich die im Bild 5 dargestellten Verläufe für richtungs- und tangentialer Belastung.

$$\beta = \frac{\pi}{l_1 + l_2} \sqrt{\frac{EI}{F_{Ki}}} \quad (11)$$

Der Vergleich beider Belastungsarten verdeutlicht, daß die richtungstreue Belastung höhere Knicklängenbeiwerte und damit kleinere kritische Lasten ergibt.

LITERATUR

- [1] Deck, M.: Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes. ZAMP III/15, 1952.
- [2] Ziegler, H.: Die Stabilitätskriterien der Elastostatik. Ingenieur-Archiv XX. Band (1952).
- [3] Leipholz, H.: Grundzüge einer Stabilitätstheorie für elastische Systeme unter nichtkonservativer Belastung Ingenieur-Archiv XXXIV. Band (1965).
- [4] König, H.: Die Knickkraft beim einseitig eingespannten Stab unter nichtrichtungstreuer Kraftwirkung. Der Stahlbau 5 (1960).
- [5] Chang, A.: Über die Stabilität elastisch gestützter Träger unter nichtkonservativer Belastung. Der Stahlbau 10 (1968).
- [6] Chang, A.: Der elastisch gestützte Träger unter nichtkonservativer Belastung. Dissertation TU Berlin 1967.

Anschrift des Verfassers:

Dr.-Ing. Reiner Hartung
Technische Hochschule Otto von Guericke
Sektion Maschinenbau
3010 Magdeburg
PSF 124