

# Bemerkungen zur Verwendung freier Schwingformansätze beim Rayleighschen Quotienten<sup>1)</sup>

Franz Holzweissig

## 0. Einleitung

Zur genäherten Berechnung der Eigenfrequenzen eines schwingenden Balkens mit veränderlichem Querschnitt macht man häufig von einer einfachen Variante des Ritzschen Verfahrens Gebrauch, die auf dem Rayleigh-Quotienten führt [1].

Bezeichnet man mit  $w(z)$  die Verschiebung eines Balkenelementes an der Stelle  $z$ , so lautet die potentielle Energie des schwingenden Balkens:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI(z) w''^2 dz; \quad \frac{dw}{dz} = w' \quad (1)$$

und seine kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A(z) \dot{w}^2 dz + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{w}_i^2 \quad (2)$$

Darin bedeuten  $I(z)$  und  $A(z)$  die Querschnittsgrößen Trägheitsmoment und Querschnittsfläche und  $m_i$  die auf dem Balken der Länge  $l$  sitzenden Punktmassen.

Der Ansatz harmonischer Eigenschwingungen

$$w(z, t) = \hat{w}(z) \sin(\omega t + \varphi)$$

führt bei Verwendung des Energieerhaltungssatzes mit

$$\hat{w} = \hat{p}v \text{ auf:}$$

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EI(z) v''(z) dz}{\int_0^l \rho A(z) v^2(z) dz + \sum_{i=1}^n m_i v_i^2(z_i)} \quad (3)$$

Zu jeder exakten Eigenschwingform  $v_k(z)$  läßt sich damit die entsprechende Eigenkreisfrequenz  $\omega_k$  berechnen.

Da die Eigenschwingformen in der Regel nicht genau bekannt sind, läßt sich diese Beziehung zum Abschätzen der niedrigsten Eigenkreisfrequenz  $\omega_1$  benutzen, wenn an Stelle der Eigenschwingform  $v(z)$  eine zulässige Funktion  $u(z)$  verwendet wird. Damit geht  $\omega$  in  $\omega_R$  über und es gilt  $\omega_1 < \omega_R$ .

Zulässige Funktionen sind solche, die mindestens zweimal differenzierbar sind und den homogenen kinematischen Randbedingungen genügen. Für Balkenschwingungen sind homogene kinematische Randbedingungen

$$u(z_R) = 0; \quad u'(z_R) = 0.$$

Die zusätzliche Erfüllung der dynamischen Randbedingungen durch  $u(z)$  verbessert die Näherung. Die Näherung wird dagegen schlecht, wenn die zulässige Funktion kinematische Randbedingungen erfüllt, die die Eigenfunktion  $v(z)$  nicht erfüllt, oder wenn sie Merkmale höherer Eigenfunktionen aufweist.

Diese bekannten Aussagen werden häufig angewendet. Es zeigt sich aber, daß die erzielte Näherung vor allem bei abgesetzten Balken unter Verwendung freier Ansätze, auch wenn sie den oben genannten Forderungen genügen, unbefriedigend sind. Dies sollen verschiedene Beispiele demonstrieren.

## 1. Abgesetzter Balken mit Kragarm

Bild 1 zeigt einen abgesetzten Balken mit Kragarm. Die exakte Berechnung führt auf die Eigenwertgleichung<sup>2)</sup>:

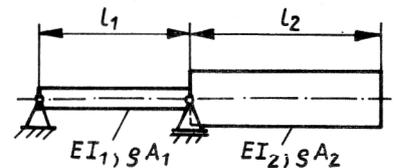


Bild 1  
Abgesetzter Balken mit Kragarm

$$(S_1 c_1 - C_1 s_1) (C_2 s_2 - S_2 c_2) + a \frac{I_1}{I_2} 2 S_1 s_1 (1 + C_2 c_2) = 0 \quad (4)$$

Darin bedeuten

$$S_i = \sinh \kappa_i; \quad s_i = \sin \kappa_i \quad (i = 1, 2)$$

$$C_i = \cosh \kappa_i; \quad c_i = \cos \kappa_i \quad (5)$$

$$\kappa_i^4 = \rho \frac{A_i l_i^4}{EI_i} \omega^2; \quad a = \frac{\kappa_1 l_2}{\kappa_2 l_1}$$

Für kreisförmigen Querschnitt mit  $d_2/d_1 = \delta$  wird für  $l_2 = 2l_1$  aus (4):

$$(S_1 c_1 - C_1 s_1) (C_2 s_2 - S_2 c_2) + 2 \frac{\sqrt{\delta}}{\delta^4} S_1 s_1 (1 + C_2 c_2) = 0$$

$$\kappa_2 = 2\kappa_1 / \sqrt{\delta} \quad (6)$$

Führt man als Bezugsgröße

$$\omega_1^{*2} = \frac{EI_1}{\rho A_1 l_1^4} = \frac{Ed_1^2}{16 \rho l_1^4} \quad (7)$$

2) Die exakten Lösungen aller Beispiele verdanke ich Herrn Dr. sc. techn. H. Sollmann.

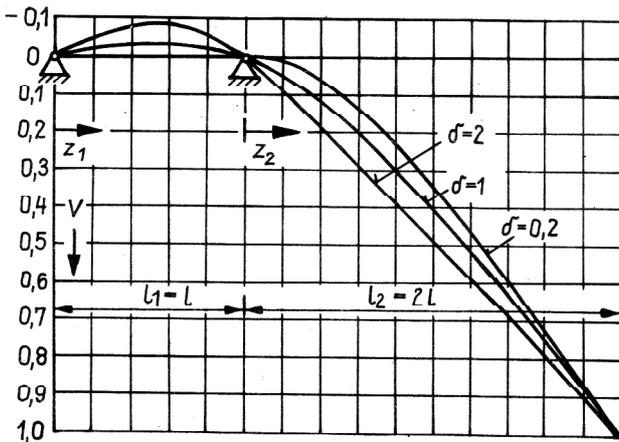
1) Herrn Prof. Dr. sc. techn. Udo Fischer zum 50. Geburtstag.

ein, so ergeben sich aus Gl. (6) für die Grundschwingung über  $\kappa_1$  die Werte für  $\omega_1^2/\omega_1^{*2}$  in Abhängigkeit von  $\delta$  (vgl. Bild 4).

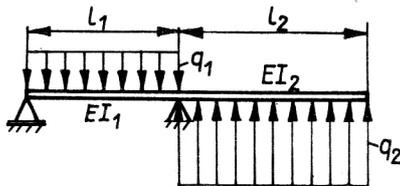
Für die Durchmesserverhältnisse  $\delta = 0,2; 1; 2$  sind die Schwingformen auf Bild 2 wiedergegeben.

Zum Vergleich soll die Berechnung mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten nach Gl. (3) unter Verwendung freier Ansätze erfolgen.

Zuerst wird die statische Biegelinie als Schwingformansatz  $u(z)$  eingeführt. Dabei muß darauf geachtet werden, daß sie entsprechend der niedrigsten Schwingform ausfällt, was man durch entsprechende Richtung der Gewichtbelastung erreicht. Es liegt also ein Modell nach Bild 3 zugrunde.



**Bild 2**  
Schwingformen des abgesetzten Balkens mit Kragarm



**Bild 3**  
Eigengewichtsbelastung des Balkens Bild 1

Damit ergibt sich als Ansatz:

$$EI_1 u_1 = -\frac{1}{6} (2q_2 + \frac{q_1}{2}) l z_1^3 + \frac{q_1}{24} z_1^4 + (\frac{q_1}{24} + \frac{q_2}{3}) l^3 z_1$$

$$EI_2 u_2 = -q_2 l^2 z_2^2 + \frac{q_2}{3} l z_2^3 - \frac{q_2}{24} z_2^4 - (\frac{q_1}{24} + \frac{2}{3} q_2) l^3 \delta^4 z_2$$

(8)

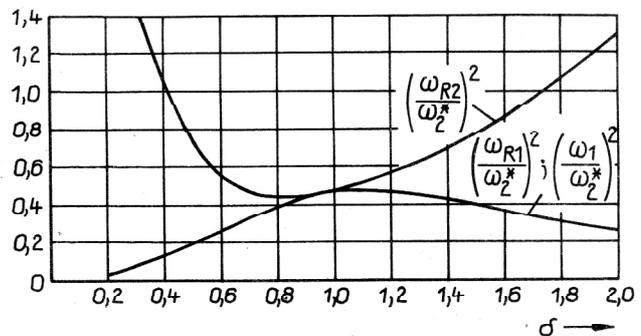
Setzt man  $u$  in Gl. (3) an Stelle von  $v$  ein, so ergibt sich mit

$$q_1 = \rho \pi \frac{d_1^2}{4}; \quad q_2 = \rho \pi \frac{d_2^2}{4}; \quad \omega_1^{*2} = \frac{E d_1^2}{16 \rho l_1^4} \quad (9)$$

$$\omega_{R1}^2 = \omega_1^{*2} \frac{(1,6083 + 0,1667\delta^2 + 1,3333\delta^4) \delta^2}{2,0543 + 0,1927\delta^2 + 3,0878\delta^4 + 0,1566\delta^6 + 1,1818\delta^8} \quad (10)$$

Auch die Werte  $\omega_{R1}^2/\omega_1^{*2}$  wurden berechnet (vgl. Bild 4). Es soll erwähnt werden, daß der Aufwand zum Aufstellen von Gl. (10) dem der exakten Lösung entspricht<sup>3)</sup>. Damit fällt dieser Ansatz für eine Näherungslösung aus. Man wird vielmehr einen freien Ansatz wählen, der in einfacher Weise die gestellten Forderungen erfüllt, wie beispielsweise der folgende

$$u(z) = \begin{cases} z_1 (1 - z_1^2/l_1^2) & \text{für } 0 \leq z_1 \leq l_1 \\ -z_2 (2 + 3z_2/l_1 - z_2^2/l_1 l_2) & \text{für } 0 \leq z_2 \leq l_2 \end{cases} \quad (11)$$



**Bild 4**  
Nach verschiedenen Verfahren berechnete niedrigste reduzierte Eigenkreisfrequenz des Balkens mit Kragarm

Unter Verwendung der Bezugskreisfrequenz  $\omega_1^*$  nach Gl. (9) erhält man gemäß [2]:

$$\omega_R^2 = \omega_1^{*2} \frac{105(1 + d_2^4 l_2 / d_1^4 l_1)}{\frac{2}{3} + \frac{d_2^2 l_2^3}{d_1^2 l_1^3} (\frac{35}{3} + \frac{77}{4} \frac{l_2}{l_1} + \frac{33}{4} \frac{l_2^2}{l_1^2})} \quad (12)$$

Mit  $\delta = d_2/d_1$ ;  $l_2 = 2l_1$  wird daraus

$$\omega_{R2}^2 = \omega_1^{*2} \frac{105 + 210\delta^4}{0,667 + 665,33\delta^2} \quad (13)$$

Die Ergebnisse der Gln. (6), (10), (13) wurden im Bild 4 über  $\delta$  aufgetragen. Es erlaubt folgende Diskussion:

Während die Werte für  $\omega_1^2/\omega_1^{*2}$  fast mit denen von  $\omega_{R1}^2/\omega_1^{*2}$  identisch sind, weichen die Ergebnisse  $\omega_{R2}^2/\omega_1^{*2}$  des einfachen Ansatzes stark ab. Auffallend

3) Die Berechnung des Rayleigh-Quotienten mit dem Ansatz der statischen Biegelinie verdanke ich Frau Dr. rer. nat. E. Junkert und Herrn Dr.-Ing. H. Kulow.

ist jedoch die gute Übereinstimmung für  $\delta = 1$  (glatter Stab). Eine Erklärung hierfür lässt sich mit Hilfe von Gl. (6) bei Betrachtung der Grenzfälle  $\delta = 0$  und  $\delta \rightarrow \infty$  geben.

Der Grenzfall  $\delta = 0$  kann auf zweierlei Art erreicht werden. Der erste Fall  $\delta = d_2/d_1 = 0$  entsteht durch  $d_2 = 0$ . Dies entspricht dem glatten zweifach gelenkig gelagerten Stab der Länge  $l_1$  mit der Frequenzgleichung

$$S_1 s_1 = 0; \quad \sin \kappa_1 = 0; \quad \kappa_1 = \pi; \quad \omega_{11}^2 / \omega_1^{*2} = \pi^4 \quad (14)$$

Der zweite Fall von  $\delta = d_2/d_1 = 0$  entsteht durch  $d_1 \rightarrow \infty$ . Dies bedeutet, daß ein glatter Stab mit dem Durchmesser  $d_2$  und der Länge  $l_2$  an einer unendlich großen, zweifach gestützten Masse angesetzt, also fest eingespannt ist. Seine Eigenkreisfrequenz beträgt:

$$\omega_{12}^2 = \lambda^4 \frac{Ed_2^2}{16\rho l_1^4} \quad (15)$$

Diese Eigenfrequenz geht mit  $d_2 \rightarrow 0$  ebenfalls nach Null.

Da der Rayleigh-Quotient immer der Frequenz der höheren Schwingform zustrebt, kann man den Grenzwert von Gl. (13) für  $\delta = 0$  nur mit Gl. (14) vergleichen, was aber physikalisch nicht sinnvoll ist, wie die Schwingformen Bild 2 zeigen.

Ähnlich verhält es sich für  $\delta \rightarrow \infty$ . Dies wird durch  $d_1 = 0$  oder  $d_2 \rightarrow \infty$  erreicht. Im ersten Fall ergibt sich nach Gl. (13) eine quadratische Abhängigkeit von  $d_2$

$$\omega_{R21}^2 = Kd_2^2 \quad (16)$$

Diese wird auch in Bild 2 deutlich. Physikalisch ist dieser Fall jedoch uninteressant. Für  $d_2 \rightarrow \infty$  stellt sich das physikalisch vorstellbare Modell einer an einem elastischen Stab angeschlossenen einfach gestützten unendlich großen Masse ein. Für dieses ist die Eigenfrequenz Null. Dieser Wert wird aber durch den Rayleigh-Quotienten nicht erreicht.

## 2. Abgesetzter, symmetrischer Balken

Bild 5 zeigt den symmetrischen abgesetzten Balken. Da die Überlegungen nur für die Grundschwingung gelten sollen, kann mit dem dargestellten Ersatzmodell gearbeitet werden.

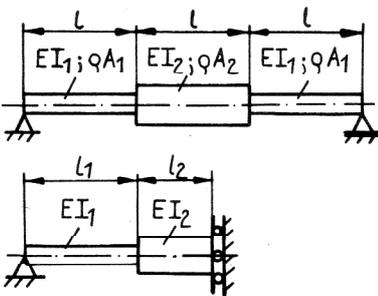


Bild 5  
Abgesetzter symmetrischer Balken

Die exakte Berechnung führt auf die Eigenwertgleichung

$$\left(1 - \frac{I_1}{I_2} a^2\right)^2 (C_1 S_2 s_1 c_2 - S_1 C_2 c_1 s_2) + \left(1 + \frac{I_1}{I_2} a^2\right)^2 (C_1 C_2 s_1 s_2 - S_1 S_2 c_1 c_2) + 4a \frac{I_1}{I_2} (S_1 S_2 s_1 s_2 - a^2 C_1 C_2 c_1 c_2) = 0 \quad (17)$$

Verwendet man wieder die Abkürzungen Gl. (5) und setzt das Durchmesserverhältnis  $\delta = d_2/d_1$ , sowie  $l_1 = l$ ;  $l_2 = l/2$ , so gilt:

$$\left(1 - \frac{1}{\delta^3}\right)^2 (C_1 S_2 s_1 c_2 - S_1 C_2 c_1 s_2) + \left(1 + \frac{1}{\delta^3}\right)^2 (C_1 C_2 s_1 s_2 - S_1 S_2 c_1 c_2) + 4 \frac{\sqrt{\delta}}{\delta^4} (S_1 S_2 s_1 s_2 - C_1 C_2 c_1 c_2) = 0$$

$$\kappa_2 = \kappa_1 / 2\sqrt{\delta} \quad (18)$$

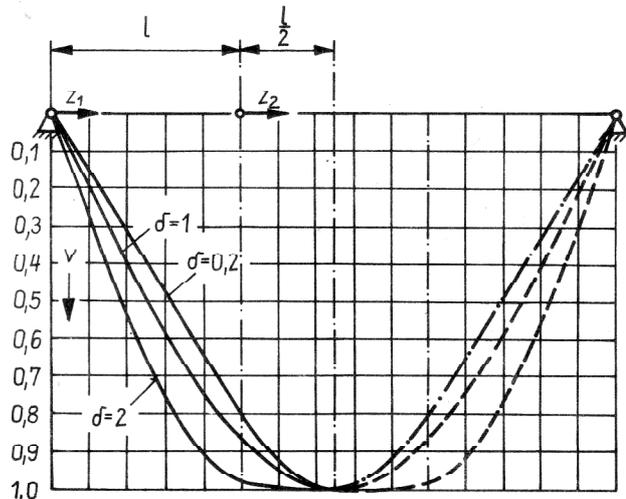


Bild 6  
Schwingformen des abgesetzten symmetrischen Balkens

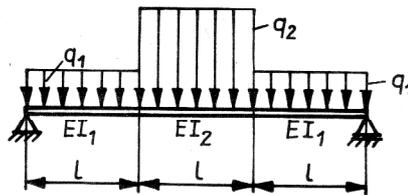


Bild 7  
Eigengewichtsbelastung des Balkens Bild 5

Führt man als Bezugsgröße die Eigenkreisfrequenz des glatten Stabes der Länge  $3l$ :

$$\omega_{*2}^2 = \frac{EI_1 \pi^4}{\rho A_1 (3l)^4} = \frac{\pi^4 Ed_1^2}{1296 \rho l_1^4} \quad (19)$$

ein, so lassen sich aus Gl. (18) über  $\kappa_1$  die Werte für  $\omega_1^2 / \omega_{*2}^2$  in Abhängigkeit von  $\delta$  berechnen. Zugehörige Schwingformen zeigt Bild 6.

Für die Bestimmung der statischen Biegelinie als Schwingformansatz gilt das Modell Bild 7.

Mit  $q_1 = \pi d_1^2/4$ ;  $q_2 = \pi d_2^2/4$ ;  $\delta = d_2/d_1$

ergibt sich nach aufwendiger Rechnung:

$$\omega_{R1}^2 = \frac{EI_1}{\rho A_1 l^4} \cdot \frac{Z}{N} \quad (20)$$

$$Z = \delta^4 (0,25000 + 0,58333\delta^2 + 0,60833\delta^4 + 0,41666\delta^6 + 0,16667\delta^8)$$

$$N = 0,04167 + 0,18263\delta^2 + 0,33463\delta^4 + 0,39616\delta^6 + 0,36109\delta^8 + 0,22598\delta^{10} + 0,09643\delta^{12} + 0,02778\delta^{14}$$

Bezieht man wieder auf  $\omega_{R1}^{*2}$ , Gl. (19), so ergeben sich die Werte  $\omega_{R1}^2/\omega_{R1}^{*2}$  in Abhängigkeit von  $\delta$ .

Für einen freien Ansatz liegt es nahe, die dynamische Biegelinie des glatten Stabes zu verwenden

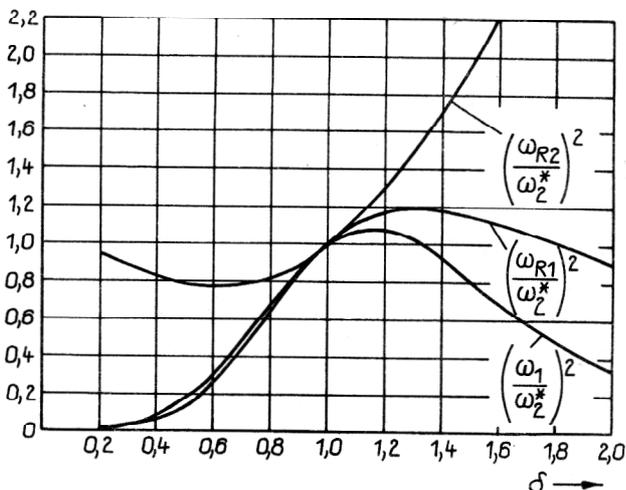
$$u(z) = \sin(\pi z/3l) \quad (21)$$

man erhält nach [2]:

$$\omega_{R2}^2 = \frac{\pi^4}{1296} \cdot \frac{Ed_1^2}{\rho l_1^4} \cdot \frac{(\lambda - \sin\lambda)(1 - \delta^4) + \pi\delta^4}{(\lambda - \sin\lambda)(1 - \delta^2) + \pi\delta^2} \quad (22)$$

Mit  $\omega_{R2}^{*2}$  nach Gl. (19) und  $\lambda = 2\pi/3l = 2\pi/3$  ergeben sich die Werte  $\omega_{R2}^2/\omega_{R2}^{*2}$  in Abhängigkeit von  $\delta$ .

Die Auftragung dieser Ergebnisse liefert Bild 8. Man erkennt zunächst eine gute Übereinstimmung des Biegelinienansatzes im Bereich  $\delta < 1$ , die für  $\delta > 1$  schlechter wird. Für den freien Ansatz ist, wie auch bei dem Beispiel Bild 1 nur in unmittelbarer Nähe von  $\delta = 1$  eine gute Näherung zu erreichen. Die Gründe hierfür sind die gleichen wie dort beschrieben.

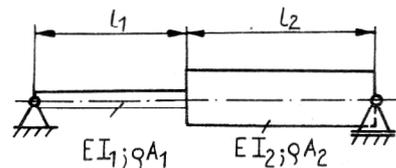


**Bild 8**  
Nach verschiedenen Verfahren berechnete niedrigste reduzierte Eigenkreisfrequenz des symmetrischen Balkens

### 3. Abgesetzter Balken mit zwei Feldern

Bild 9 zeigt das dritte Beispiel zu den abgesetzten Balken. Die exakte Eigenwertgleichung lautet:

$$\left(1 - \frac{I_1}{I_2} a^2\right)^2 (C_1 C_2 s_1 s_2 + S_1 S_2 c_1 c_2) - \left(1 + \frac{I_1}{I_2} a^2\right)^2 (C_1 S_2 s_1 c_2 + S_1 C_2 c_1 s_2) - 4 \frac{I_1}{I_2} a (S_1 C_2 s_1 c_2 + a^2 C_1 S_2 c_1 s_2) = 0 \quad (23)$$



**Bild 9**  
Abgesetzter Balken mit zwei Feldern

Mit Gl. (5) und  $\delta = d_2/d_1$ ,  $l_1 = l_2 = l$  sowie Kreisquerschnitt folgt:

$$\left(1 - \frac{1}{\delta^3}\right)^2 (C_1 C_2 s_1 s_2 + S_1 S_2 c_1 c_2) - \left(1 + \frac{1}{\delta^3}\right)^2 (C_1 S_2 s_1 c_2 + S_1 C_2 c_1 s_2) - 4 \frac{\sqrt{\delta}}{\delta^4} (S_1 C_2 s_1 c_2 + C_1 S_2 c_1 s_2) = 0 \quad (24)$$

$$\kappa_2 = \kappa_1 / \sqrt{\delta}$$

Als Bezugsgröße dient wieder die Eigenkreisfrequenz des glatten Stabes der Länge  $2l$

$$\omega_{R3}^{*2} = \frac{EI_1 \pi^4}{\rho A_1 (2l)^4} = \frac{\pi^4 Ed_1^2}{256 \rho l_1^4} \quad (25)$$

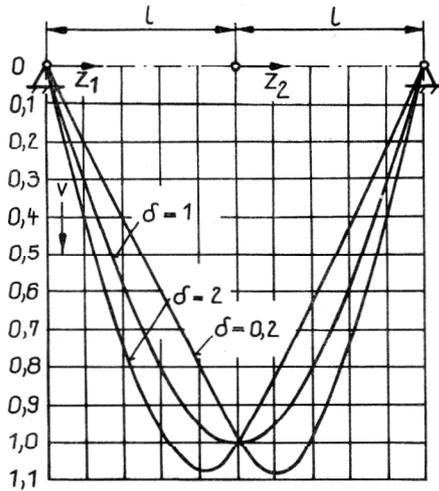
Aus Gl. (24) wurden die Eigenwerte  $\kappa_1$  und damit die Frequenzverhältnisse  $\omega_1^2/\omega_3^{*2}$  in Abhängigkeit von  $\delta$  berechnet (Bild 12). Zugehörige Schwingformen zeigt Bild 10.

Für den Biegelinienansatz mit der Befestigungsannahme nach Bild 11 findet man

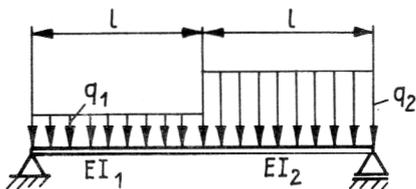
$$\omega_{R1}^2 = \frac{EI_1}{\rho A_1 l^4} \cdot \frac{Z}{N} \quad (26)$$

$$Z = \delta^4 [0,0208 + 0,0625\delta^2 + 0,1\delta^4 + 0,0625\delta^6 + 0,0208\delta^8]$$

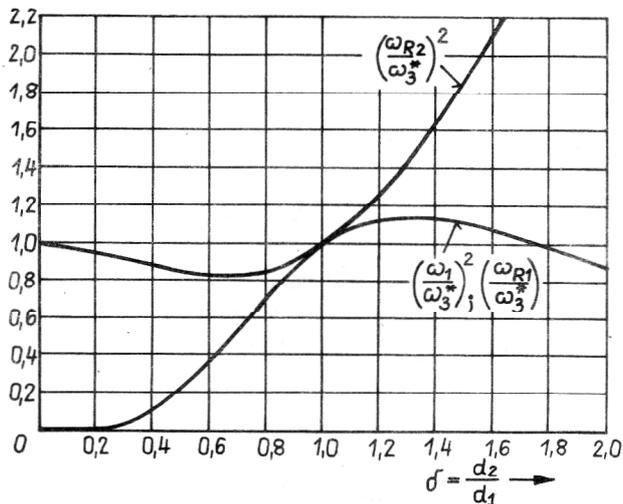
$$N = 0,000579 + 0,00291\delta^2 + 0,00756\delta^4 + 0,01081\delta^6 + 0,01082\delta^8 + 0,00756\delta^{10} + 0,00291\delta^{12} + 0,000579\delta^{14}$$



**Bild 10**  
Schwingformen des abgesetzten Balkens mit zwei Feldern



**Bild 11**  
Eigengewichtsbelastung des Balkens Bild 9



**Bild 12**  
Nach verschiedenen Verfahren berechnete niedrigste reduzierte Eigenkreisfrequenz des Balkens mit zwei Feldern

Verwendet man als Bezugsgröße wieder Gl. (25), so findet man die Werte  $\omega_{R1}^2/\omega_3^{*2}$  als Funktion von  $\delta$  (Bild 12). Sie sind im Rahmen der Zeichnungsgenauigkeit deckungsgleich mit  $\omega_1^2/\omega_3^{*2}$ .

Als freier Ansatz soll wieder die exakte Schwingform des glatten Stabes dienen

$$u(z) = \sin(\pi z/2l)$$

Man erhält nach [3]

$$\omega_{R2}^2 = \frac{\pi^4 E d_1^2}{256 \rho l^4} \cdot \frac{(1 + \delta^4)}{(1 + \delta^2)} \quad (27)$$

Mit der Bezugsfrequenz Gl. (25) findet man die auf Bild 12 eingetragenen Werte für  $\omega_{R2}^2/\omega_3^{*2}$ .

Man erkennt aus Bild 12 wiederum eine sehr gute Übereinstimmung des exakten Verlaufes mit der Näherung durch die Biegelinie. Der freie Ansatz liefert nur in der Nähe von  $\delta = 1$  brauchbare Werte.

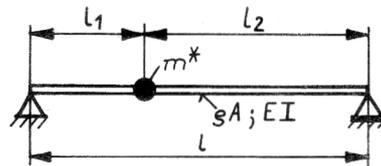
#### 4. Beispiele für glatte Balken mit Einzelmassen

Es liegt die Vermutung nahe, daß auch für glatte Balken mit Einzelmassen ähnliche Erscheinungen wie beim abgesetzten Balken auftreten. Führt man jedoch die im Abschnitt 1 angestellten Überlegungen durch, so bestätigt sich dies nicht. Drei Beispiele sollen deshalb die Verwendbarkeit des Rayleigh-Quotienten hierfür demonstrieren.

Bild 13 zeigt einen zweifach gestützten glatten Balken mit Einzelmasse. Die exakte Eigenwertgleichung lautet mit  $l_2/l_1 = \lambda$ ;  $m^*/m = \mu$ ;  $m = \rho A(l_1 + l_2)$ ;

$$K = \mu(1 + \lambda)\kappa_1; \quad \kappa_2 = \lambda\kappa_1;$$

$$\begin{aligned} (s_1 c_2 + c_1 s_2)(C_1 S_2 + S_1 C_2) - \frac{K}{2} S_2 s_2 (C_1 s_1 - S_1 c_1) \\ + S_1 s_1 (C_2 s_2 - S_2 c_2) = 0 \end{aligned} \quad (28)$$



**Bild 13**  
Zweifach gestützter glatter Balken mit Einzelmasse

Dabei wurden wieder die Abkürzungen Gl. (5) verwendet.

Aus dieser Beziehung lassen sich über  $\kappa_1$  die reduzierten Eigenkreisfrequenzen  $\omega_1^2/\omega_4^{*2}$  berechnen. Als Bezugsfrequenz gilt die Eigenkreisfrequenz des Stabes ohne Einzelmasse.

$$\omega_4^{*2} = \frac{EI\pi^4}{\rho A l^4} \quad (l = l_1 + l_2) \quad (29)$$

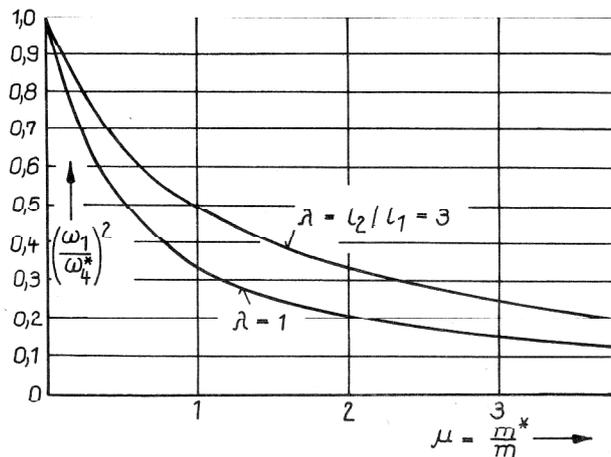
Für  $\lambda = 1$  ergeben sich die Werte  $\omega_{11}^2/\omega_4^{*2}$  und für  $\lambda = 3$  die Werte  $\omega_{12}^2/\omega_4^{*2}$ . Sie sind in Abhängigkeit vom Massenverhältnis  $\mu$  in Bild 14 dargestellt.

Für den Rayleigh-Quotienten wird als freier Ansatz die Schwingform des Stabes ohne Einzelmasse  $u(z) = \sin(\pi z/l)$  verwendet. Mit der Bezugsfrequenz Gl. (29) findet man

$$\lambda = 1 : \left( \frac{\omega_{R1}}{\omega_4^*} \right)^2 = \frac{1}{1 + 2\mu} \quad (30)$$

$$\lambda = 3 : \left( \frac{\omega_{R2}}{\omega_4^*} \right)^2 = \frac{1}{1 + \mu}$$

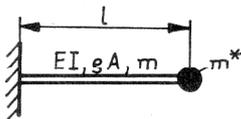
Man erkennt leicht die sehr gute Übereinstimmung mit den Werten der exakten Lösung Bild 14.



**Bild 14**

Exakte reduzierte Eigenkreisfrequenzen als Funktion des Massenverhältnisses für den zweifach gestützten Balken

Ähnlich verhält es sich mit dem eingespannten glatten Balken mit Einzelmasse am Balkenende Bild 15.



**Bild 15**

Eingespannter glatter Balken mit Einzelmasse

Die Eigenwertgleichung hierfür lautet

$$\mu \kappa_1 (S_1 c_1 - C_1 s_1) + C_1 c_1 + 1 = 0 \quad (31)$$

Mit der Bezugskreisfrequenz

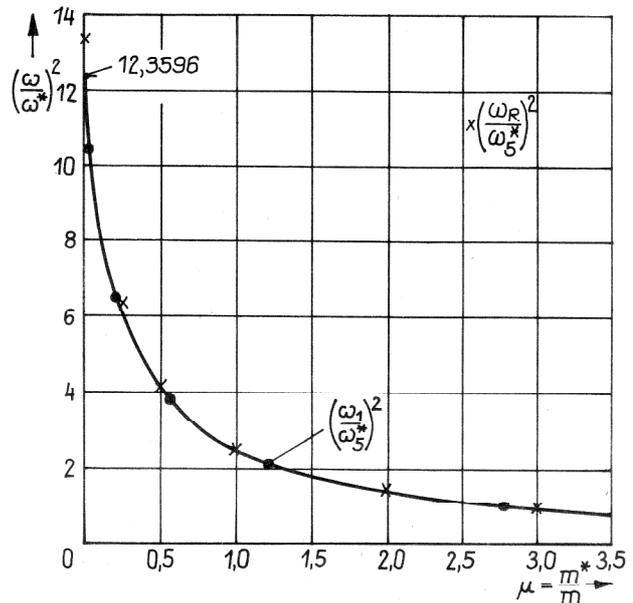
$$\omega_5^{*2} = \frac{EI}{\rho A l^4} \quad (32)$$

ergibt sich der auf Bild 16 dargestellte Verlauf  $\omega_1^2 / \omega_5^{*2} = f(\mu)$ . Für den Rayleigh-Quotienten wird vom Ansatz

$$u(z) = (1 - \cos \frac{\pi z}{2l}) \quad (33)$$

ausgegangen. Man findet mit Gl. (32)

$$\left( \frac{\omega_R}{\omega_5^*} \right)^2 = \frac{\pi^4}{32} \cdot \frac{1}{\left( \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) + \mu} \quad (34)$$



**Bild 16**

Nach verschiedenen Verfahren berechnete exakte reduzierte niedrigste Eigenkreisfrequenz des eingespannten Balkens

Die damit gefundenen Werte sind mit (x) auf Bild 16 eingetragen. Sie zeigen eine sehr gute Übereinstimmung des Rayleigh-Quotienten mit der exakten Lösung.

## 5. Zusammenfassung

Der Rayleigh-Quotient wird verwendet, um die niedrigste Eigenfrequenz von Biegeschwingungssystemen abzuschätzen. Dabei geht man von geschätzten Schwingformen aus und erhält mit Hilfe einer energetischen Überlegung einen Näherungswert, der über der niedrigsten Eigenfrequenz liegt. Erfahrungsgemäß ist der Ansatz einer der Schwingform angepaßten statischen Biegelinie sehr günstig. Für Kontinua mit veränderlichem bzw. abgesetztem Querschnitt bestätigt sich dies. Der dazu erforderliche Aufwand entspricht jedoch dem der exakten Lösung, weshalb diese Ansatzfunktion ausfällt. Für freie Ansätze, auch wenn sie den geforderten Bedingungen entsprechen und für den glatten Balken die exakte Schwingform beschreiben, zeigen sich bei abgesetzten Balken nur bei sehr schwachen Querschnittsunterschieden befriedigende Ergebnisse. Für größere Unterschiede wird das Ergebnis unbrauchbar, da es nicht einmal die Tendenz richtig widerspiegelt. Dies liegt an der Mehrdeutigkeit der Eigenwertgleichung und der Eigenschaft des Rayleigh-Quotienten, dessen Ergebnis über dem zugehörigen höchsten Eigenwert liegt. Für glatte Balken mit Einzelmassen ist diese Gefahr nicht gegeben, der Rayleigh-Quotient liefert sehr gute Ergebnisse. Diese Verhältnisse werden an mehreren Beispielen demonstriert.

## LITERATUR

- [1] Fischer U.; Stephan, W.: Mechanische Schwingungen. 1. Auflage, VEB Fachbuchverlag Leipzig 1981.
- [2] Holzweißig, F.; Dresig, H.: Lehrbuch der Maschinendynamik. 2. Auflage, VEB Fachbuchverlag Leipzig 1982.
- [3] Holzweißig, F.; Dresig, H.; Fischer, U.; Stephan, W.: Arbeitsbuch Maschinendynamik/Schwingungslehre. VEB Fachbuchverlag Leipzig (in Vorbereitung).