

Numerische Berechnung strömungsinduzierter Schwingungen an einem Doppelpendel

Heinz Köppe

1. Einleitung

In einem Beitrag auf dem Symposium „Practical Experience with Flow-Induced Vibrations“ in Karlsruhe 1979 wurden Ergebnisse aus experimentellen Untersuchungen des Schwingungsverhaltens von Druckwasserreaktor-Kontrollelementen vorgestellt [1]. Die dort gemachten Aussagen waren eine Grundlage für die numerische Behandlung dieses Problems.

Das Kontrollelement läßt sich im Modell als ein System aus zwei miteinander gelenkig verbundenen Stäben, die in einem hexagonalen vertikalen Kanal in der Form eines Doppelpendels aufgehängt sind, darstellen (Bild 1, 2).

Eine den Kanal durchströmende Flüssigkeit regt dieses Pendel zu Schwingungen an. Das Schwingungsverhalten wird im wesentlichen von der Größe des Massedurchsatzes, den Strömungseigenschaften der Flüssigkeit und der stoßartigen Berührung des Systems mit der Wandung bestimmt.

Die experimentellen Ergebnisse zeigen, daß mit wachsendem Massedurchsatz \dot{m} die Anzahl der Kollisionen pro Zeiteinheit des Pendelkörpers mit der Wandung ansteigt. Die Anschlagfrequenz steigt für kleine \dot{m} langsamer als für große Massedurchsätze (Bild 3). Die Bestimmung der Abhängigkeit der Zusammenstöße zwischen Kontrollelement und Rohrwandung von \dot{m} standen auch im Mittelpunkt der theoretisch durchgeführten Untersuchungen.

2. Mechanisches Modell

Es wurde vorausgesetzt, daß sich die Stäbe wie starre Körper verhalten. Dann kann man das Druckwasserreaktor-Kontrollelement als ein räumliches Doppelpendel mit den verallgemeinerten Koordinaten $\varphi_1, \vartheta_1, \varphi_2, \vartheta_2$ (Bild 1) darstellen.

Für dieses System ergeben sich die folgenden Energieausdrücke:

2.1. Kinetische Energie

Der Übersichtlichkeit wegen wurde die kinetische Energie in Matrixform angegeben (Bild 4). Es bedeuten φ, φ_F die Dichte des Stabes bzw. der Flüssigkeit; c_M ist ein Korrekturfaktor.

2.2. Potentielle Energie

$$U = [-m_1 g l_{S1} \cos \varphi_1 - m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 + l_{S2} \cos \varphi_2)] \left(1 - \frac{\rho_F}{\rho}\right)$$

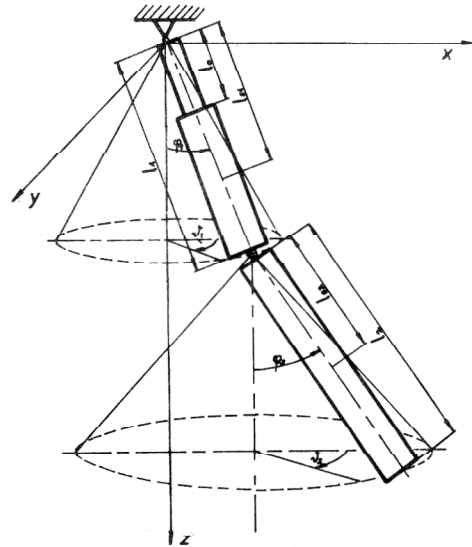


Bild 1
Räumliches Doppelpendel-Mechanisches Modell für ein Druckwasserreaktor-Kontrollelement

2.3. Nichtkonservative eingeprägte Kräfte

Der Einfluß der durchströmenden Flüssigkeit auf das Schwingungsverhalten wird durch das Wirken von nicht-konservativen Kräften auf das Pendel berücksichtigt.

Diese Kräfte sind sowohl von den Koordinaten als auch von ihren zeitlichen Ableitungen abhängig. Man erkennt, daß die Dämpfungskräfte, die in den Gleichungen auftreten, vom Quadrat der Geschwindigkeiten abhängen:

$$Q_1 = \int_0^{l_1} \xi_1 q_1(\xi_1, t) d\xi_1 + l \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \int_0^{l_2} q_{\varphi_2}(\xi_2, t) d\xi_2 - d_{T1} \dot{\varphi}_1 \sqrt{\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\vartheta}_1^2 \sin^2 \varphi_1}$$

$$Q_2 = l_1 \varphi_1 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) \int_0^{l_2} q_{\varphi_2}(\xi_2, t) d\xi_2$$

$$Q_3 = \int_0^{l_2} \xi_2 q_{\varphi_2}(\xi_2, t) d\xi_2 - d_{T2} \dot{\varphi}_2 \sqrt{\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\vartheta}_2^2 \sin^2 \varphi_2}$$

$$Q_4 = 0$$

$$q_{\varphi 1}(\xi_1, t) = \frac{1}{2} \rho_F D(\xi_1) c_N u(\xi_1 \dot{\varphi}_1 - u\varphi_1) + 2\rho_F A(\xi_1) c_M u \dot{\varphi}_1 \quad f_I = \sqrt{(l_1 \sin \varphi_1)^2 - e_{01}}$$

$$q_{\varphi 2}(\xi_2, t) = \frac{1}{2} \rho_F D(\xi_2) c_N u(l_1 \dot{\varphi}_1 + \xi_2 \dot{\varphi}_2 - u\varphi_2) + 2\rho_F A(\xi_2) c_M u \dot{\varphi}_2 \quad f_{II} = \sqrt{l_1^2 \sin^2 \varphi_1 + a^2 \sin^2 \varphi_2 + 2l_1 a \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)} - e_{01}$$

$$f_{III} = \sqrt{l_1^2 \sin^2 \varphi_1 + l_2^2 \sin^2 \varphi_2 + 2l_1 l_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)} - e_{02}$$

Aus den Energieausdrücken und den nichtkonservativen Kräften ergibt sich dann unter Verwendung der bekannten Lagrangeschen Bewegungsgleichungen 2. Art das folgende Dgl-System:

$$M\ddot{q} + Cq = Qe \quad (1)$$

mit in \ddot{q} , q linearen linken Seiten.

3. Stoßübergangsbedingungen

In den bisherigen Ausführungen wurde noch keine Aussage über die mögliche stoßartige Berührung zwischen Pendelkörper und Wandung getroffen.

Die Berechnung des Stoßvorganges erfolgt unter der Voraussetzung starrer Körper. Bei dieser Modellvorstellung lassen sich relativ einfache Übergangsbedingungen formulieren. Es wird angenommen, daß es durch die Kollision zu einer sprunghaften Änderung im Geschwindigkeitsverhalten des Körpers kommt. Explizite Formeln zur Bestimmung solcher Geschwindigkeitssprünge wurden in [2], [3] abgeleitet.

Man erhält folgende Formeln:

$$\dot{q}_{i2} - \dot{q}_{i0} = -(1 + \epsilon) \frac{g^{ij} f_j \dot{q}_{k0}}{g^{ij} f_i f_j} \quad (2)$$

Hierin sind

- ϵ – Stoßfaktor
- \dot{q}_{i0} \dot{q}_{i2} – verallgemeinerte Geschwindigkeit vor und nach dem Stoß
- (g^{ij}) – inverse Koeffizientenmatrix der kinetischen Energie des Systems
- f_k – Ableitung der Stoßbedingung nach der k-ten Koordinate

Die speziellen Stoßbedingungen lassen sich als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten darstellen. Bedingung für die freie Beweglichkeit des Doppelpendels ist

$$f_k = f_k(q_1, q_2, \dots, q_n) < 0, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3)$$

Bei Erfüllung der Bedingung $f \geq 0$ im Zuge der numerischen Integration von Gl. (1) erfolgt eine Kollision mit der Wandung, und es müssen die Geschwindigkeitsänderungen entsprechend Gl. (2) in die Bewegungsgleichungen eingearbeitet werden. Im Bild 2 sind das Rohr und der Pendelkörper dargestellt. Daraus erkennt man die 3 möglichen Berührungsstellen (I, II, III). Für diese Stoßpunkte lassen sich die Funktionen f_k ableiten:

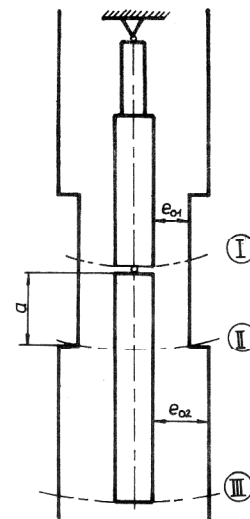


Bild 2

Doppelpendel mit eingezeichneten Kollisionspunkten

4. Lösung des Bewegungsdifferentialgleichungssystem

Es ist aus den abgeleiteten Gleichungen zu erkennen, daß eine exakte Lösung des Dgl-Systems nicht möglich ist. Es kann nur über geeignete numerische Verfahren einer Lösung zugeführt werden. Erste Untersuchungen ergaben, daß die Freiheitsgrade ϑ_1 , ϑ_2 keinen unmittelbaren Einfluß auf das Bewegungsverhalten des Kontrollelementes hatten. So konnte $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$ angenommen werden, womit sich das räumliche Problem auf eine ebene Aufgabe reduzierte.

Zur numerischen Integration des Dgl-Systems wurde das Runge-Kutta-Nyström-Verfahren gewählt. Es ist ein explizites Verfahren und liefert zu diskreten Zeitpunkten als Ergebnis Koordinaten und Geschwindigkeitswerte.

5. Ergebnisse

Die Bilder 4 und 5 zeigen einige Ergebnisse der durchgeführten Rechnungen. Auf Bild 4 sind die experimentellen [1] und numerischen Ergebnisse für die Anschlagfrequenz des Pendels an die Wandung in Abhängigkeit vom Massedurchsatz zu sehen. Eine gute Übereinstimmung beider Lösungen ist im Bereich eines Massedurch-

$T = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 & \dot{\vartheta}_1 & \dot{\varphi}_2 & \dot{\vartheta}_2 \end{bmatrix}$	$(J_1 + m_2 l_1^2) \left(1 + \frac{\rho_F}{\rho} c_M\right)$	0	$m_2 l_1 l_{S2} \left(1 + \frac{\rho_F}{\rho} c_M\right)^*$ $\left\{ \begin{array}{l} * \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 * \\ * \cos (\vartheta_1 - \vartheta_2) \\ + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \end{array} \right\}$	$m_2 l_1 l_{S2} \left(1 + \frac{\rho_F}{\rho} c_M\right)^*$ $\left\{ \begin{array}{l} * \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 * \\ * \sin (\vartheta_1 - \vartheta_2) \end{array} \right\}$	$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{bmatrix}$
		$(J_1 + m_2 l_1^2) \sin^2 \varphi_1 *$ $\left(1 + \frac{\rho_F}{\rho} c_M\right)$	$m_2 l_1 l_{S2} \left(1 + \frac{\rho_F}{\rho} c_M\right)^*$ $\left\{ \begin{array}{l} * \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 * \\ * \sin (\vartheta_1 - \vartheta_2) \end{array} \right\}$	$m_2 l_1 l_{S2} \left(1 + \frac{\rho_F}{\rho} c_M\right)^*$ $\left\{ \begin{array}{l} * \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 * \\ * \cos (\vartheta_1 - \vartheta_2) \end{array} \right\}$	
	symmetrisch		$J_2 \left(1 + \frac{\rho_F}{\rho} c_M\right)$	0	
				$J_2 \sin^2 \varphi_2 \left(1 + \frac{\rho_F}{\rho} c_M\right)$	

Bild 3
Kinetische Energie in Matrixform für das mechanische Modell

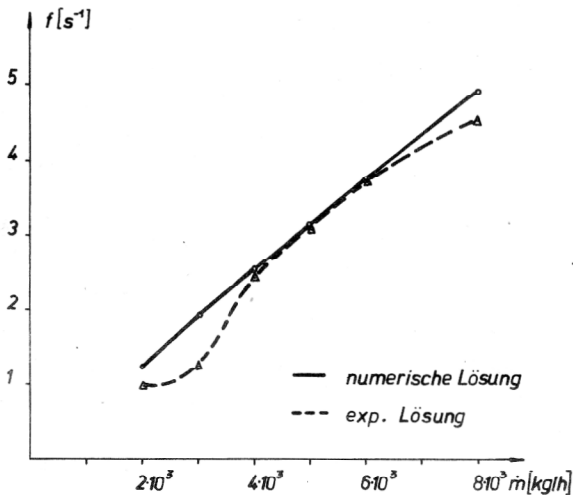


Bild 4
Grafische Darstellung der Abhängigkeit der Anschlagfrequenz vom Massedurchsatz m

satzes von 4000 kg/h bis 6000 kg/h zu erkennen. Im Gegensatz zur experimentellen Kurve kann die gesamte theoretische Lösung durch eine Gerade approximiert werden. Die Ursachen der Abweichungen der Ergebnisse außerhalb des oben erwähnten Bereiches sind

wahrscheinlich in dem verwendeten Strömungs- und Dämpfungsmodell, welches nicht alle Einflüsse berücksichtigen kann, zu suchen. Die sprunghafte Veränderung des Geschwindigkeitsverhaltens bei einer Kollision zwischen Kontrollelement und Rohrwand wird im Bild 5 deutlich. Dargestellt sind die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_1$ und $\dot{\varphi}_2$ in Abhängigkeit von der Zeit t . Es stellt sich unmittelbar nach Bewegungsbeginn ein stationärer Zustand ein. Dabei kommt es zum Zusammenstoß an der Stelle II (Bild 2). Mit dieser Kenntnis ist dann auch einzusehen, weshalb der Anstoß für den unteren Stab eine plötzliche Geschwindigkeitserhöhung zufolge hat. Der Kollisionspunkt des unteren Stabes liegt oberhalb seines Schwerpunktes. Durch die Trägheitswirkung bewegt sich das untere Pendel in gleicher Richtung weiter und wird dann durch die geänderte Bewegungsrichtung des oberen Teilsystems anschließend stark abgebremst bis es zu einer Umkehr der Schwingungsrichtung kommt.

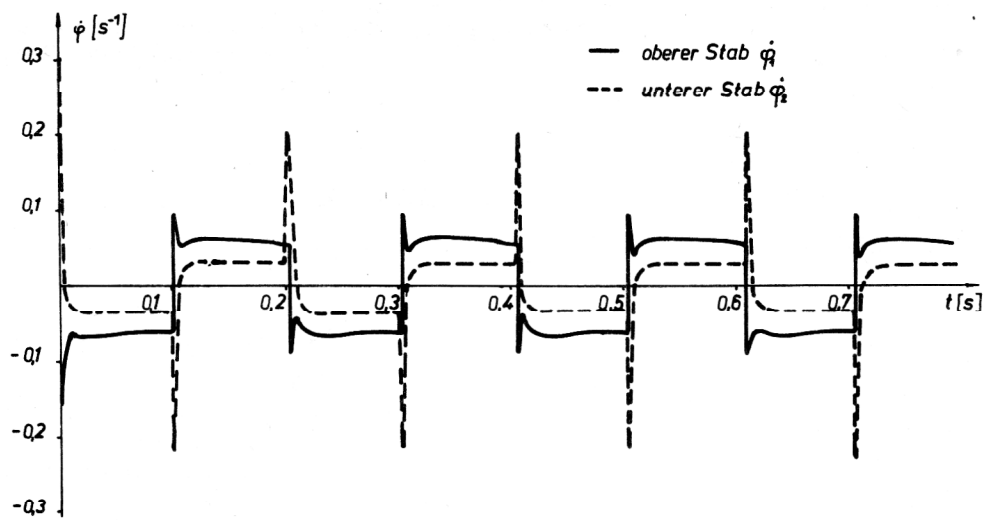


Bild 5
Winkelgeschwindigkeits-Zeit-Verlauf für φ_1 und φ_2

LITERATUR

- [1] Hennig, K., Platen, D., Grundwald, G.: Treatment of Flow-Induced Pendulum Oscillations in Practical Experiences with Flow-Induced Vibrations. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, S. 14–143.
- [2] Fischer, U.: Übergangsbedingungen für Stoßvorgänge in mechanischen Systemen mit endlich vielen Freiheitsgraden. Wiss. Z. Techn. Hochsch. Magdeburg 16 (1972), Heft 4.
- [3] Fischer, U., Hennig, K.: Formalisierte Berechnung der Geschwindigkeitssprünge und Impulse bei Stoßvorgängen in Starrkörper- und hybriden Mehrkörpersystemen. Technische Mechanik 3 (1982), Heft 2.

Anschrift des Verfassers:
Dipl.-Ing. Heinz Köppe
Technische Hochschule Otto von Guericke
Sektion Maschinenbau
3010 Magdeburg
PSF 124