

Theoretischer Beitrag zum deformationsmechanischen Verhalten mehrschichtiger Verbundplatten unter Berücksichtigung von Schereffekten

Teil II

B. Lauke, R. Barthel

6. Mikrostrukturtheorie (MST)

6.1. Allgemeines

Anliegen dieses Abschnitts ist die Aufstellung einer verbesserten Theorie zur Berechnung des Verformungsverhaltens von Schichtmaterialien. Auf Grund des schichtförmigen Aufbaues variieren die Verschiebungen nicht linear über den Querschnitt. In den vorangehenden Abschnitten wurde bereits eine Verbesserung der Verformungsberechnung im Vergleich zur linearen Verteilung angestrebt. Dies erfolgte in einem zweiten Näherungsschritt, aufbauend auf der Lösung des linearen Problems.

Im Gegensatz zu diesen Modellen werden in der Mikrostrukturtheorie von vornherein lokale Freiheitsgrade bezüglich der Verschiebungen und Rotationen der Schichten angenommen.

Die im folgenden abgehandelte Theorie stützt sich methodisch auf die grundlegenden Arbeiten von Herrmann, Achenbach und Sun [14] bis [16]. Darin werden alternierend aufgebaute Schichtverbunde betrachtet, wobei die Schichtdicken als gleich groß vorausgesetzt sind. Es wird davon ausgegangen, daß die Verbunde aus sehr vielen Schichten bestehen, worauf sich ein wesentlicher Schritt der theoretischen Ableitung bezieht. Die Gesamtenergie des Verbundes, bestehend aus der Summe über die Teilenergien der Schichten, wird in eine integrale Form überführt, d. h. die ursprünglich diskreten Verschiebungsfunktionen bzw. Koordinaten ($u^{(k)}$, z_k) werden durch kontinuierliche Variablen ersetzt. Um die Berechnung von Schichtverbunden mit einer geringen Schichtanzahl zu ermöglichen, wird dieser Übergang hier nicht vollzogen. Soweit bekannt, wurde die MST bisher zur Lösung dynamischer Probleme angewandt; sie wird hier jedoch zu statischen Berechnungen herangezogen, da wegen der zusätzlichen Freiheitsgrade für die Verschiebungsansätze eine Einbeziehung lokaler Einflüsse möglich wird.

Die Erweiterung der bisherigen MST erstreckt sich auf die im folgenden angeführten Punkte:

1. Verstärkungsschichten (Lagen) sind anisotrop;
2. antisymmetrischer Aufbau zur Mittelebene, d. h. Berücksichtigung von Mittelflächenverformungen;
3. Berücksichtigung von Anfangsspannungen;
4. Anwendung auf statische Probleme.

Bei der Abhandlung der Theorie werden nur die wichtigen funktionellen Abhängigkeiten dargestellt, die relativ langen ausführlichen Ausdrücke (bzw. DGL-Systeme) können in der Arbeit [1] nachgeschlagen werden.

6.2. Ableitung der Grundgleichungen

6.2.1. Verbundmodell und Voraussetzungen

Es wird eine Verbundplatte betrachtet, die aus n Schichten aufgebaut ist. Ein Element aus diesem Verbund ist in Bild 1 dargestellt. Das Koordinatensystem (x, y, z) bezieht sich auf den gesamten Schichtverbund und das System (x, y, z') auf eine Schicht (k) . Mit z_k wird der Abstand der Mittelfläche ($z' = 0$) einer Schicht (k) von der Bezugsfläche ($z = 0$) bezeichnet, d_k ist die Dicke der Schicht (k) . Die geometrischen Abmessungen in den Richtungen (x, y, z) sind a , b und h . Die effektiven elastischen Konstanten jeder Schicht berechnen sich nach dem in Kap. 1.2. dargestellten Konzept, wobei die dort getroffenen Voraussetzungen bezüglich des Materialverhaltens gelten.

Ausgangspunkt der Ableitungen sind im wesentlichen die folgenden drei Grundannahmen:

1. lineare Verschiebungsansätze über die Dicke (d_k) jeder Schicht (k) ;
2. ebene Querschnitte innerhalb einer Schicht (k) vor der Deformation, die normal zur Mittelebene dieser Schicht sind, bleiben nach der Deformation eben, aber nicht normal zu dieser;
3. Annahme eines ebenen Spannungszustandes in jeder Schicht (k) .

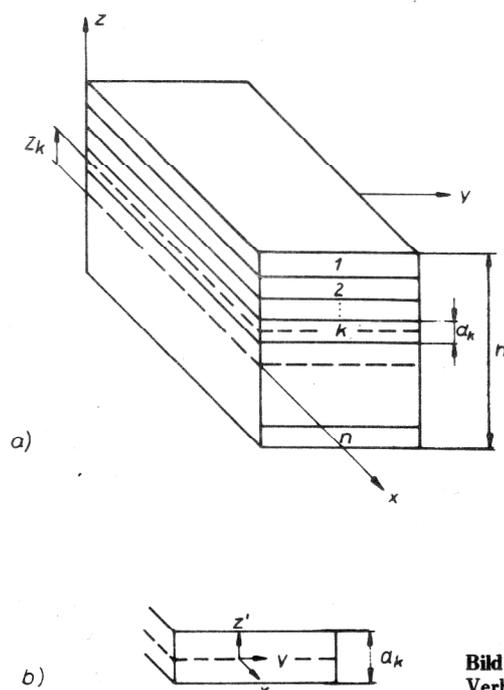


Bild 1
Verbundmodell

6.2.2. Verschiebungen, Deformation

Ausgangspunkt der Ableitung bildet die Aufstellung der Verschiebungsansätze innerhalb der Schichten:

$$u_i^{(k)} = u_i^o(k) - z' \Phi_{iz}^{(k)}(x, y, t) \quad (6.1)$$

$$u_i^{(k)} = (u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)})$$

Die $u_i^o(k)$ bedeuten die Mittelflächenverschiebungen und $\Phi_{iz}^{(k)}$ die Rotationen der k-ten Schicht. Die Rotationen sind entsprechend der SDT definiert, jedoch mit anderem Vorzeichen, sie enthalten die mittleren Scherdeformationen der einzelnen Schichten. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird der Index z im weiteren weggelassen, d. h.

$$\Phi_{iz}^{(k)} = \Phi_i^{(k)} = \Phi_{ki}$$

Entsprechend der üblichen Annahme in der Plattentheorie werden die Deformationen in z-Richtung vernachlässigt, so daß die Durchbiegungsfunktion unabhängig von der z-Koordinate wird:

$$\Phi_{zz}^{(k)} = \Phi_z^{(k)} = 0 \quad (6.2)$$

Hieraus folgt:

$$w^{(k)} = w^o(k) = w^o(x, y, t) \quad (6.3)$$

Die Deformationen berechnen sich in der üblichen Weise aus den Verschiebungen (vgl. 3.2.).

Als Hookesches Gesetz sind die Beziehungen von (2.8) für jede Schicht (k) gültig.

Im Gegensatz zu den bisher abgeleiteten Modellen sind die Verschiebungsansätze (6.1) nicht von vornherein an den Grenzflächen der Schichten stetig. Aus diesem Grunde muß eine entsprechende Bedingung berücksichtigt werden. An den Grenzschichten wird gefordert:

$$u_i^{(k)}(-d_k/2) = u_i^{(k+1)}(d_{k+1}/2) \quad (6.4)$$

Werden die Ansätze (6.1) eingesetzt, ergibt sich:

$$u_i^o(k+1) - u_i^o(k) = \frac{1}{2} d_k \Phi_i^{(k)} + \frac{1}{2} d_{k+1} \Phi_i^{(k+1)} \quad (6.5)$$

Diese Beziehung ermöglicht eine erste Reduzierung der Freiheitsgrade des Systems, da alle Verschiebungen der Mittelflächen auf die einer einzigen Schicht (r) zurückführbar sind.

6.2.3. Das elastische Potential

Im folgenden soll das elastische Potential unter Berücksichtigung von Anfangsspannungen aufgestellt werden.

Die Anfangsspannungen werden als konstant angenommen und sollen in den Richtungen der x- und y-Achse wirken. In den Schichten ist vor der Biegebelastung der Spannungszustand $\sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}$ vorhanden.

Die Deformationsenergie, bezogen auf die Einheitsfläche, berechnet sich aus den Anteilen

$$\eta^{(k)} = \eta_e^{(k)} + \eta'^{(k)} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{(k)} \epsilon_{ij}^{(k)} + \eta'^{(k)} \quad i, j = 1, 2, 4, 5, 6 \quad (6.6)$$

wobei $\eta^{(k)}$ das Potential der Anfangsspannungen bedeutet. Werden für die Spannungen die Beziehung (2.8) und für $\epsilon_{ij}^{(k)}$ die nichtlinearen Deformationen eingesetzt, bekommt man nach Vernachlässigung von Termen höherer als zweiter Ordnung:

$$2\eta^{(k)} = \int_{-d_k/2}^{d_k/2} (\bar{Q}_{11} \epsilon_x^2 + 2\bar{Q}_{12} \epsilon_x \epsilon_y + 2\bar{Q}_{16} \epsilon_x \gamma_{xy} + \bar{Q}_{22} \epsilon_y^2 + 2\bar{Q}_{16} \epsilon_y \gamma_{xy} + \bar{Q}_{66} \gamma_{xy}^2 + \bar{C}_{44} \gamma_{yz}^2 + 2\bar{C}_{45} \gamma_{yz} \gamma_{xz} + \bar{C}_{55} \gamma_{xy}^2)^{(k)} dz' + 2\eta'^{(k)} \quad (6.7)$$

Die potentielle Energie der Anfangsspannungen (vgl. Biot [17]) berechnet sich aus:

$$2\eta'^{(k)} = \int_{-d_k/2}^{d_k/2} (\bar{\sigma}_x^{(k)} (u_x^2 + v_x^2 + w_x^2) + \bar{\sigma}_y^{(k)} (u_y^2 + v_y^2 + w_y^2)) dz' \quad (6.8)$$

Wenn die Anfangsspannungen jedoch wesentlich geringer als die elastischen Moduln in entsprechender Richtung sind, sollte es möglich sein, die Energieanteile der Verformungen in Plattenebene zu vernachlässigen:

$$2\eta'^{(k)} = \int_{-d_k/2}^{d_k/2} (\bar{\sigma}_x^{(k)} w_x^2 + \bar{\sigma}_y^{(k)} w_y^2) dz' \quad (6.9)$$

Werden die Verschiebungsansätze (6.1) in die Deformationen und diese in (6.6) eingesetzt, ergibt sich folgende Abhängigkeit für die Gesamtenergie:

$$\eta = \sum_{k>1}^n \eta^{(k)}(u^o(k), v^o(k), w^o, \Phi_x^{(k)}, \Phi_y^{(k)}) \quad (6.10)$$

Die kinetische Energie einer Schicht lautet:

$$2T^{(k)} = \int_{-d_k/2}^{d_k/2} \rho^{(k)} (u_t^{(k)2} + v_t^{(k)2} + w_t^{(k)2}) dz' \quad (6.11)$$

Die Gesamtenergie ergibt sich durch Summation zu:

$$T = \sum_{k=1}^n T^{(k)}(u_t^o(k), v_t^o(k), w_t^o, \Phi_{x,t}^{(k)}, \Phi_{y,t}^{(k)}) \quad (6.12)$$

Entsprechend den Beziehungen (6.10) und (6.12) sind die potentielle bzw. kinetische Energie von insgesamt $f = 4n + 1$ Freiheitsgraden abhängig.

Wie bereits angedeutet, erreicht man durch die Ausnutzung der Stetigkeitsbedingung für die Verschiebungen eine Reduzierung der Freiheitsgrade. Wird (6.5) in (6.10) eingesetzt, ergibt sich folgende funktionale Abhängigkeit:

$$\eta = \sum_{k=1}^n \eta^{(k)}(u^{o(k)}, v^{o(k)}, w^o, \Phi_x^{(r)}, \Phi_y^{(r)})$$

bzw.

$$\eta = \sum_{k=1}^n \eta^{(k)}(u^{o(r)}, v^{o(r)}, w^o, \Phi_x^{(k)}, \Phi_y^{(k)})$$

wobei r eine beliebige Schicht ($k = r$) darstellt. Somit treten nur noch ($f = 2n + 3$) im allgemeinen unabhängige Funktionen auf; gleiches gilt für die kinetische Energie.

6.2.4. Annahme über die Verschiebungen der Mittelflächen der Schichten

6.2.4.1. Beliebiger Verbundaufbau

Um vom Energieausdruck (6.10) auf die Form von (6.13) zu kommen, muß an jeder Grenzfläche die Bedingung (6.5) erfüllt werden. Bei einem Verbund mit vielen Schichten bedeutet das einen beträchtlichen Rechenaufwand. Zum anderen wird deutlich, daß für jede Aufbauvariante der Ausdruck für die Energie neu aufgestellt werden muß. Zur Vereinfachung der Rechnung wird deshalb die folgende Annahme über die Mittelflächenverschiebung der Schichten getroffen die besagt, daß die Mittelflächenverschiebungen nach der Deformation in einer fiktiven Ebene bleiben sollen. Dem unsymmetrischen Aufbau wird durch die Berücksichtigung von Verschiebungen in der Mittelfläche $z = 0$ Rechnung getragen. Der Ansatz lautet:

$$u_i^{o(k)} = U_i^o(x, y, t) - z_k \psi_i(x, y, t) \quad (6.14)$$

Die U_i^o stellen die Verschiebungen in der Mittelfläche ($z = 0$) und ψ_i die Rotationen von Ebenen senkrecht dazu dar (Makrorotationen). Wie bereits für die Mikrorotationen wird wieder

$$\psi_z = 0 \quad (6.15)$$

angenommen.

Die Stetigkeitsbedingungen (6.5) nehmen nach Einsetzen von (6.14) folgende Form an:

$$\psi_i = m_k \Phi_i^{(k)} + m_{k+1} \Phi_i^{(k+1)} \quad (6.16)$$

mit

$$m_k = \frac{d_k}{d_k + d_{k+1}}, \quad m_{k+1} = 1 - m_k \quad (6.17)$$

Werden die potentielle und kinetische Energie des Gesamtverbundes berechnet, zeigt sich folgende Abhängigkeit:

$$\eta = \sum_{k=1}^n \eta^{(k)}(U^o, V^o, w^o, \psi_x, \psi_y, \Phi_x^{(k)}, \Phi_y^{(k)})$$

bzw.

$$T = \sum_{k=1}^n T^{(k)}(U_{,t}^o, V_{,t}^o, w_{,t}^o, \psi_{x,t}, \psi_{y,t}, \Phi_{x,t}^{(k)}, \Phi_{y,t}^{(k)})$$

Wegen der Abhängigkeit zwischen Mikro- und Makrorotationen (6.16) wird (6.18) weiter vereinfacht zu:

$$\eta = \sum_{k=1}^n \eta^{(k)}(U^o, V^o, w^o, \psi_x, \psi_y, \Phi_x^{(r)}, \Phi_y^{(r)})$$

(6.19)

$$T = \sum_{k=1}^n T^{(k)}(U_{,t}^o, V_{,t}^o, w_{,t}^o, \psi_{x,t}, \psi_{y,t}, \Phi_{x,t}^{(r)}, \Phi_{y,t}^{(r)})$$

In diesen Beziehungen treten jeweils noch sieben Freiheitsgrade auf. Der äquivalente Ausdruck der allgemeinen Theorie enthielt $f = 2n + 3$ unabhängige Funktionen. Die auftretende Verringerung der Freiheitsgrade für $n > 2$ stellt jedoch keine wesentliche Einschränkung der Gültigkeit dar, da die Energieausdrücke die wichtigen Effekte (Mikrorotationen) enthalten.

6.2.4.2. Spezialisierung auf Verbunde mit zwei unterschiedlichen Schichtarten

Die bisher allgemein abgehandelte Theorie wird jetzt auf die geometrische Aufbauweise des Radialreifengürtels spezialisiert. Bekanntlich ist dieser im allgemeinen alternierend aus Lagen und Zwischenschichten aufgebaut. Die Lagen werden mit Index (1) und die Zwischenschichten mit (2) gekennzeichnet. Es wird angenommen, daß die Lagen alle die Dicke d_1 und die Zwischenschichten die Dicke d_2 aufweisen.

Unter diesen Voraussetzungen folgt aus den Stetigkeitsbedingungen (6.16):

$$\Phi_i^{(k)} = \Phi_i^{(1)} \quad k: \text{Verstärkungsschichten} \quad (6.20)$$

$$\Phi_i^{(k)} = \Phi_i^{(2)} \quad k: \text{Zwischenschichten}$$

d. h., die Rotationen der Querschnitte sind für die einzelnen Schichtarten gleich.

Als Resultat dieser Bedingungen kann jetzt die Summation im Energieausdruck unterteilt werden in die Teilsummen über die Schichtarten 1 und 2. Der Energieausdruck (6.18) lautet nunmehr:

$$\eta = \sum_{k=1}^{n_1} \eta^{(1k)}(U^o, V^o, w^o, \psi_x, \psi_y, \Phi_x^{(1)}, \Phi_y^{(1)})$$

(6.21)

$$+ \sum_{k=1}^{n_2} \eta^{(2k)}(U^o, V^o, w^o, \psi_x, \psi_y, \Phi_x^{(2)}, \Phi_y^{(2)})$$

Infolge der Stetigkeitsbedingungen sind nicht alle Funktionen unabhängig voneinander. Unter Berücksichtigung der Bedingungen (6.20) lauten diese:

$$\psi_i = m_1 \Phi_i^{(1)} + m_2 \Phi_i^{(2)} \quad (6.22)$$

$$m_1 = \frac{d_1}{d_1 + d_2}, \quad m_2 = 1 - m_1$$

bzw.

$$\Phi_i^{(2)} = \frac{1}{m_2} (\psi_i - m_1 \Phi_i^{(1)}) \quad (6.23)$$

Wird im Energieausdruck (6.21) $\phi_i^{(2)}$ entsprechend (6.23) ersetzt, bekommt man die potentielle Energie in Abhängigkeit von unabhängigen Funktionen:

$$\eta = \eta(U^0, V^0, w^0, \psi_x, \psi_y, \Phi_x^{(1)}, \Phi_y^{(1)}) \quad (6.24)$$

bzw.

$$T = T(U_{,t}^0, V_{,t}^0, w_{,t}^0, \psi_{x,t}, \psi_{y,t}, \Phi_{x,t}^{(1)}, \Phi_{y,t}^{(1)})$$

Somit kann nun zur Lösung des Problems auf der Grundlage einer Variationsaufgabe übergegangen werden. Dazu wird entweder die Beziehung (6.21) verwendet, wobei die Stetigkeitsbedingungen mittels der Methode der Lagrangeschen Parameter erfüllt werden müssen, oder es wird die Beziehung (6.24) benutzt, die nur noch unabhängige Funktionen enthält.

6.2.5. Näherungstheorie (MSTN)

Der hier speziell interessierende Schichtverbund, entsprechend dem Radialreifengürtel, ist aus faserverstärkten Schichten und Zwischenschichten aus isotropem Material aufgebaut. Das Zwischenschichtmaterial (Gummi) ist wesentlich „weicher“ als das effektive Material der Lagen. Deshalb scheint es plausibel, daß die Scherdeformationen im Verbund hauptsächlich von den Zwischenschichten aufgenommen werden und die Scherdeformationen in den Lagen näherungsweise vernachlässigt werden können:

$$\Phi_x^{(1)} = w_{,x}^0, \quad \Phi_y^{(1)} = w_{,y}^0 \quad (6.25)$$

Die Gültigkeit dieser Annahme für die verwendeten Materialien wird anhand der Ergebnisse überprüft. Nach Einsetzen dieser Beziehungen in (6.24) werden die Energien von folgenden Variablen abhängig:

$$\eta = \sum_{k=1}^n \eta^{(k)}(U^0, V^0, w^0, \psi_x, \psi_y) \quad (6.26)$$

$$T = \sum_{k=1}^n T^{(k)}(U_{,t}^0, V_{,t}^0, w_{,t}^0, \psi_{x,t}, \psi_{y,t}) \quad (6.27)$$

6.3. Allgemeines zur Lösungstheorie

Das zu lösende elastische Randwertproblem wird in Form einer Variationsaufgabe formuliert. Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen wird das Hamiltonsche Variationsprinzip verwendet:

$$\delta \int_{t_0}^t \int_A L \, dx \, dy \, dt + \int_{t_0}^t \eta_a \, dt = 0 \quad (6.28)$$

mit $L = T - \eta$

η_a bedeutet die Energie der äußeren Kräfte, die auf der Oberfläche A bzw. den Rändern l wirken (vgl. [1]). Die

Lösung ist auf unterschiedlichen Wegen möglich; entweder durch sog. „direkte Methoden“ wie z. B. das Ritzsche Verfahren (vgl. Kap. 6.4.3.) und die Galerkinsche Methode, die auf dem Energieausdruck basieren, oder über ein partielles DGL-System, welches aus den Eulerschen DGLen folgt (vgl. 6.4.2.). Dabei wird die integrale Formulierung der Aufgabe (6.24) durch die äquivalente differentielle ersetzt:

$$\sum_{r=1}^3 \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_r} \right)} - \sum_{k=1}^l (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial q_r^{(k)}} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial^k p_i}{\partial q_r^k} \right)} \right] - \frac{\partial L}{\partial p_i} = 0 \quad (6.29)$$

mit q_r : kartesische Koordinaten x, y, t

p_i : unabhängige Funktionen

l : höchste Ordnung der Ableitungen in L

Zusätzlich müssen die Randbedingungen erfüllt werden, die z. B. aus der partiellen Integration von (6.24) erhalten werden können (vgl. [1]).

6.4. Lösung spezieller Randwertprobleme

6.4.1. Verbundaufbau

Entsprechend dem Aufbau des Radialreifengürtels wird ein antisymmetrischer Schichtaufbau gewählt. Da die Zwischenschichten aus isotropem Material bestehen, gilt

$$\bar{Q}_{16}^{(2)} = \bar{Q}_{26}^{(2)} = 0. \quad (6.30)$$

Es wird vorausgesetzt, daß die Lagen alle die gleiche Schichtdicke d_1 und die Zwischenschichten die Dicke d_2 aufweisen.

Es werden die gleichen Aufbauvarianten wie bei den Randwertproblemen von Kap. 5 gewählt, um einen Vergleich der Theorien zu ermöglichen, d. h. es wird ein 2-3 und 7schichtiger Verbund berechnet. Als Verstärkungsmaterial wird wiederum Glascord verwendet, sofern nicht gegenteiliges angegeben ist. Es gelten die Normierungen (5.2) und die elastischen Konstanten entsprechend Tabelle 1.

6.4.2. Allseitig einfach unterstützter Plattenverbund

Um einen Vergleich zu den übrigen Modellen zu ermöglichen wird zunächst der Fall der einfach unterstützten Ränder berechnet. Die Randbedingungen werden dafür wie folgt gewählt:

$$\begin{aligned} \text{MST: } x=0,a: \quad U^0 = w^0 = \psi_y = N_{xy} = \bar{M}_x = \bar{m}_x = \Phi_y^{(1)} = 0 \\ y=0,b: \quad V^0 = w^0 = \psi_x = N_{yx} = \bar{M}_y = \bar{m}_y = \Phi_x^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned} \text{MSTN: } x=0,a: \quad U^0 = w^0 = \psi_y = N_{xy} = \bar{M}_x = 0 \\ y=0,b: \quad V^0 = w^0 = \psi_x = N_{yx} = \bar{M}_y = 0 \end{aligned} \quad (6.32)$$

(wobei M bzw. m Makro- bzw. Mikromomente bedeuten (vgl. [1])).

Die Lösung des Randwertproblems erfolgt mittels der DGL-Systeme für die MST bzw. MSTN, welche aus den Eulerschen DGLen (6.29) gewonnen werden (vgl. [1]).

Für das spezielle Randwertproblem lassen sich Ansatzfunktionen in Form von Fourierreihen aufschreiben, die sowohl das DGL-System als auch die Randbedingungen erfüllen. Die Belastungsfunktion wird ebenfalls in Form einer Fourierreihe entwickelt, wobei eine gleichförmige Flächenlast angenommen wird.

Werden die Fourieransätze in die entsprechenden DGL-Systeme für die MST bzw. MSTN eingesetzt, erhält man inhomogene Gleichungssysteme, die auf der Rechenanlage BESM-6 gelöst wurden.

6.4.3. Allseitig eingespannter Plattenverbund

Der Verbundaufbau wird entsprechend dem des vorangehenden Kap. gewählt. Die Lösung wird auf der Grundlage der in Kap. 6.2.5. beschriebenen Näherungstheorie (MSTN) durchgeführt.

Wegen der Randbedingungen ist es nicht möglich, Ansatzfunktionen zu finden, die zusätzlich zu den Randbedingungen das DGL-System erfüllen. Man ist folglich gezwungen, Näherungsmethoden anzuwenden.

Im folgenden wird das Ritz'sche Verfahren zur Lösung des Problems herangezogen.

Ausgangspunkt stellt die Variationsaufgabe in der Form des Hamilton-Prinzips dar (vgl. 6.28). Zur weiteren Ableitung werden Ansätze für die Verschiebungsfunktionen in Form von Reihen aufgestellt:

$$f_p = \sum_{i,j}^{m,n} A_{ij}^{(p)} \alpha_i^{(p)}(x) \beta_j^{(p)}(y) \quad (6.33)$$

Im Falle des MSTN sind unter den f_p die Verschiebungen (U^o, V^o, w^o) und die Rotationen (ψ_x, ψ_y) zu verstehen. Die Funktion f stellt eine Linearkombination der voneinander linear unabhängigen Funktionen $\alpha_i(x)$ bzw. $\beta_j(y)$ in den Koordinatenrichtungen x bzw. y dar. Es ist zu bemerken, daß diese Funktionen die geometrischen Randbedingungen entlang $x = 0, a$ und $y = 0, b$ erfüllen müssen.

Diese werden wie folgt angenommen:

$$\begin{aligned} x=0,a: & U^o = V^o = w^o = \psi_x = \psi_y = 0 \\ y=0,b: & \end{aligned} \quad (6.34)$$

Zur Erfüllung dieser Bedingungen werden die Ansätze (6.33) in folgender Form aufgestellt:

$$(U^o, V^o, w^o, \psi_x, \psi_y) = \sum_{i,j}^{m,n} (A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}) \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} \quad (6.35)$$

d. h. es gilt:

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(p)} &= \sin \frac{i\pi x}{a} \\ \beta_j^{(p)} &= \sin \frac{j\pi y}{b} \end{aligned} \quad p = 1 \dots 5 \quad (6.36)$$

Für die Verteilung der Querlast werden zwei Fälle betrachtet: Zum ersten eine gleichförmige Verteilung über die Gesamtfläche und zum zweiten eine gleichförmige Verteilung über eine rechteckige Teilfläche, mit den Ausmaßen a_1 und b_1 . Die Ansatzfunktionen (6.33) bzw. (6.35) werden in die Energieausdrücke der Variationsaufgabe eingesetzt. Wird die Belastung q entlang der Oberfläche betrachtet, gilt:

$$\eta_a = \int_A q w \, dx \, dy \quad (6.37)$$

Nach Einsetzen der Ansätze entsteht ein Näherungsausdruck für die Gesamtenergie:

$$H = T + \eta_a - \eta = H(f_p) \quad (6.38)$$

Beim Ritz'schen Verfahren wird die Forderung (6.28)

$$\delta H = 0 \quad (6.39)$$

durch die Forderung des Minimums für H in Abhängigkeit von den Koeffizienten $A_{ij}^{(p)}$ ersetzt:

$$\frac{\partial H(A_{ij}^{(p)})}{\partial A_{kl}^{(p)}} = 0 \quad (6.40)$$

Durch diese Gleichungen werden die Koeffizienten $A_{ij}^{(p)}$ bestimmt, und man erhält eine Näherungslösung für die Verschiebungsfunktion f_p .

Die Güte der Näherung bzw. die Konvergenz hängt von der Anzahl der Terme (m, n) in den Ansätzen (6.35) ab, wobei die Anzahl i. allg. vom mathematisch-numerischen Aufwand begrenzt wird.

Werden die Ansätze (6.35) in die Bedingung (6.40) eingesetzt, ergibt sich nach Differentiation nach den Koeffizienten $A_{kl}, B_{kl}, C_{kl}, D_{kl}, E_{kl}$ ein System von $m \cdot n + p \cdot q + r \cdot s + d \cdot c + e \cdot f$ algebraischen Gleichungen. Ferner wird angenommen, daß die Summationen in allen Funktionen von (6.35) bis

$$m = n = \alpha$$

ausgeführt werden.

Das Gleichungssystem nimmt folgende Gestalt an:

$$\underline{R} \underline{X} = \underline{P} \quad (6.41)$$

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \tilde{R}^{11} & \tilde{R}^{12} & \tilde{R}^{13} & \tilde{R}^{14} & \tilde{R}^{15} \\ & \tilde{R}^{22} & \tilde{R}^{23} & \tilde{R}^{24} & \tilde{R}^{25} \\ & & \tilde{R}^{33} & \tilde{R}^{34} & \tilde{R}^{35} \\ \text{symm.} & & & \tilde{R}^{44} & \tilde{R}^{45} \\ & & & & \tilde{R}^{55} \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

und

$$\underline{\hat{R}}^{ij} = \begin{bmatrix} R_{1111}^{ij} & \dots & R_{mn11}^{ij} \\ \vdots & & \vdots \\ R_{11mn}^{ij} & \dots & R_{mnmn}^{ij} \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

(für $i = j$ ist $\underline{\hat{R}}^{ij}$ symmetrisch).

In \underline{R} sind alle geometrischen Größen und Materialeigenschaften enthalten.

\underline{X} stellt den Verschiebungsvektor dar:

$$\underline{X}^T = [A_{11} \dots A_{mn}; B_{11} \dots B_{mn}; C_{11} \dots C_{mn}; B_{11} \dots D_{mn}; E_{11} \dots E_{mn}] \quad (6.44)$$

Durch \underline{P} werden die äußeren Kräfte beschrieben:

$$\underline{P}^T = [0 \dots 0; 0 \dots 0; f_{11} \dots f_{mn}; 0 \dots 0; 0 \dots 0] \quad (6.45)$$

mit

$$f_{kl} = \frac{\partial \eta_a}{\partial C_{kl}} \quad (6.46)$$

Zur Vereinfachung der numerischen Auswertung des algebraischen Gleichungssystems (6.41) wird die Matrix \underline{R} , deren Koeffizienten Matrizen darstellen, in eine Matrix \underline{A} überführt, deren Elemente Zahlen sind. Es läßt sich folgende allgemeine Zuordnung formulieren:

$$\underline{R} = \underline{A}$$

bzw.

$$\hat{R}_{ijkl}^{\gamma\delta} (i,j,k,l = 1 \dots \alpha) = A p q ;$$

$$p = (\gamma - 1)\alpha^2 + 1 \dots \gamma\alpha^2 ; \quad (6.47)$$

$$q = (\delta - 1)\alpha^2 + 1 \dots \delta\alpha^2$$

mit

$$\gamma, \delta = 1, 2, 3, 4, 5$$

Im Fall von $\alpha = 4$ erhält man beispielsweise eine Matrix \underline{A} der Dimension 80×80 .

Das Gleichungssystem lautet nunmehr

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{P} \quad (6.48)$$

Die Lösung wurde auf der Rechenanlage BESM-6 ausgeführt. Anschließend werden einige Ergebnisse vorgestellt.

6.4.4. Ergebnisse

Zunächst wird in Bild 2 ein Vergleich der verschiedenen Modelle angegeben. Für die Normalverschiebungen ist festzustellen, daß sich entsprechend der beiden Grundmodelle (lineare Ansätze über Gesamtquerschnitt bzw. lineare Ansätze über Einzelschicht) zwei Gruppen ausbilden. Die SDT und MSDT zeigen den bereits diskutierten Verlauf. Als wesentlichen qualitativen Unterschied weisen die MST bzw. MSTN über den gesamten Querschnitt die gleichen Rotationen innerhalb der einzelnen Schichten auf. Daraus resultierend ergeben sich auch die maximalen Abweichungen in den inneren Lagen des Verbundes. Im übrigen Bereich tritt zwischen beiden Modellen (MST und MSDT) eine Abweichung von etwa 10 % auf.

Für die Verschiebungen in Richtung der geringeren Plattenausdehnung ist analog zu den Lösungen der SDT bzw. MSDT eine wesentlich geringere Variation der Rotation von Schicht zu Schicht zu verzeichnen.

Entsprechend der Annahme (6.14) über die Verteilung der Normalverschiebungen der Mittelflächen der einzelnen Schichten ergibt sich eine lineare Verteilung dieser Punkte über den Querschnitt. Im Vergleich zu Literaturergebnissen, die auf der Grundlage der Methode der finiten Elemente [18], [19] bzw. exakten elastischen Lösungen für 3schichtige Verbunde erhalten wurden, erkennt man die Gültigkeit dieser Annahme.

Zur linearen Verteilung innerhalb der Einzelschichten läßt sich mit Sicherheit, wiederum durch Vergleich zur exakten Lösung, sagen, daß sie sowohl für den dreischichtigen als auch für den siebenschichtigen Aufbau in genügender Genauigkeit ($\Delta_{\max} = 5\%$) die Realität beschreibt. Jede Verbesserung in dieser Hinsicht würde den sich damit beträchtlichen erhöhenden Rechenaufwand nicht rechtfertigen.

Ein Modellvergleich für die Durchbiegung zeigt, daß die Ergebnisse der MST und MSDT zusammenfallen, wohingegen die Durchbiegung bei der MSTN um maximal 15 % unterschätzt wird (Bild 3b).

Es läßt sich schlußfolgern, daß für Schichtverbunde mit den hier vorliegenden geometrischen wie elastischen Eigenschaften eine Berücksichtigung von Schereffekten auch in den Verstärkungsschichten notwendig erscheint.

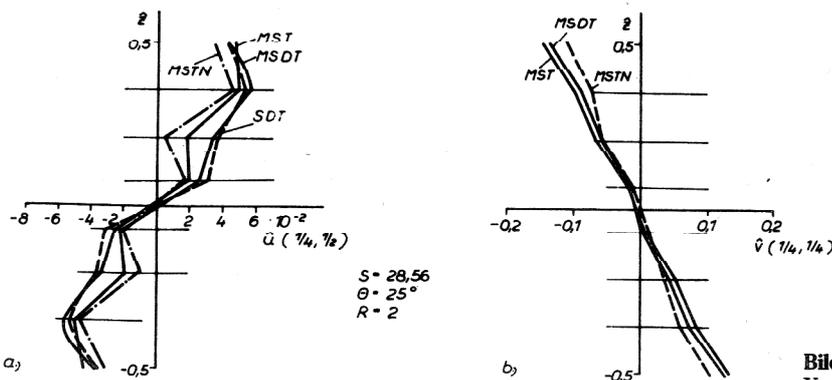


Bild 2 Vergleich der Modelle SDT, MSDT, MST und MSTN

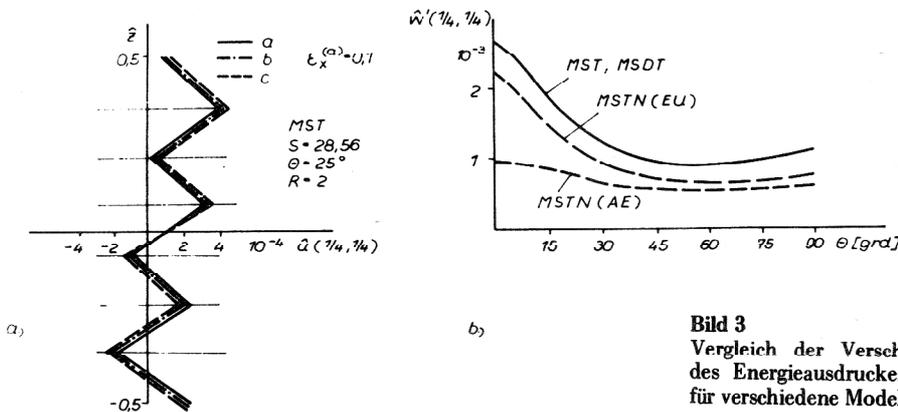


Bild 3

Vergleich der Verschiebung für unterschiedliche Näherungen des Energieausdruckes (6.8) und Vergleich der Durchbiegung für verschiedene Modelle

Bild 3a gibt Auskunft über die verschiedenen Möglichkeiten der Berücksichtigung der zusätzlichen äußeren Normalspannungen bzw. Deformationen. Es gilt: a) Berücksichtigung aller Verschiebungsterme im Energieausdruck (6.8); b) Vernachlässigung der Wirkung der äußeren Kräfte auf Biegung; c) Vernachlässigung aller Normaldeformationsanteile in Plattenebene. Für eine Deformation von 10% ergeben sich Abweichungen von 5% bei den Modifizierungen entsprechend b) und c). Die Anwendung des vereinfachten Ausdrucks (6.9) ist deshalb unbedenklich.

Neben dem einfach unterstützten Schichtverbund wurde der allseitig eingespannte Verbund berechnet.

Zunächst wird das Konvergenzverhalten der Durchbiegungsfunktion w in Abhängigkeit vom Ordnungsparameter α untersucht. Es zeigt sich, daß eine Erhöhung von $\alpha = 3$ auf $\alpha = 4$ kaum noch eine Veränderung bewirkt. Somit wird festgestellt, daß mit der Ordnung $\alpha = 4$ eine brauchbare Näherungslösung gefunden wird.

Ein Vergleich der Verschiebungen für die unterschiedlichen Randbedingungen zeigt Bild 3b bzw. Bild 4. Es ist zu erkennen, daß für den eingespannten Fall die Mittelflächenverschiebung \hat{U}^0 , die mittleren Rotationen $\hat{\psi}_x$ und auch die lokalen Rotationen $\hat{\phi}_x^{(1)}$ bzw. $\hat{\phi}_x^{(2)}$ kleiner als für die einfach unterstützten Ränder sind. Die Durchbiegung in Abhängigkeit vom Faserbettungswinkel ist ebenfalls durch die Randbedingungen stark beeinflusst. Vor allen Dingen im Winkelbereich $\Theta \leq 30^\circ$ ist die Durchbiegung wesentlich geringer als für einfach unter-

stützte Ränder. Die Durchbiegung reagiert beträchtlich schwächer auf die Änderung von Θ .

7. Zusammenfassung

Inhalt vorliegender Arbeit ist die Erstellung eines Modells für das deformationsmechanische Verhalten des Gürtels eines Radialreifens, welcher einen Mehrschichtverbund aus Komponenten mit extrem unterschiedlichen Moduln darstellt.

Darüber hinaus ist ein solches Modell grundsätzlich auch auf andere Verbundsysteme entsprechenden Aufbaus anwendbar.

Auf der Grundlage einer schichtförmigen Modellierung, wobei die effektiven elastischen Konstanten der Einzelschichten mittels Berechnungsvorschriften aus der entsprechenden Literatur gewonnen werden, werden verschiedene Modelle erarbeitet. Von besonderer Bedeutung ist die Einbeziehung von Schereffekten wegen der hohen Modulunterschiede von Schicht zu Schicht. Eine Modellübersicht ist in Bild 3 angegeben. Diese Modelle werden zur Lösung unterschiedlicher Randwertprobleme herangezogen. Einige Ergebnisse sollen im folgenden zusammengestellt werden.

Es wurden verschiedene Randwertprobleme für zwei, drei und siebenschichtige Verbunde gelöst.

Die Ergebnisse aller Modelle zeigen, daß Schereffekte bei vorliegenden Materialien für eine relative Länge $S = a/h < 80$ berücksichtigt werden müssen.

Es wird festgestellt, daß erst bei $S > 50$ die Lösung mittels linearer Ansätze für die Verschiebungsverteilung über den Querschnitt brauchbare Ergebnisse liefert. Die Mittelflächeneffekte auf Grund des unsymmetrischen Gürtelaufbaues beeinflussen die absolute Größe der Verformungen wesentlich.

Die Annahme linearer Verteilung der Verformungen in den einzelnen Schichten bei der MST stellt eine gute Näherung dar, die Berücksichtigung weiterer Terme würde den Rechenaufwand nicht rechtfertigen.

Das Modell der MST erweist sich zur weiteren theoretischen Untersuchung des Radialreifens als am geeignetsten, da lokale Effekte berücksichtigt werden und keine zusätzlichen Integrationen nach Erhalt der Lösung mittels der Ausgangsansätze notwendig sind.

Anschrift des Verfassers:

Dr. rer. nat. B. Lauke
Prof. Dr. sc. nat. R. Barthel
Akademie der Wissenschaften der DDR
Institut für Technologie der Fasern
8012 Dresden, PSF 411

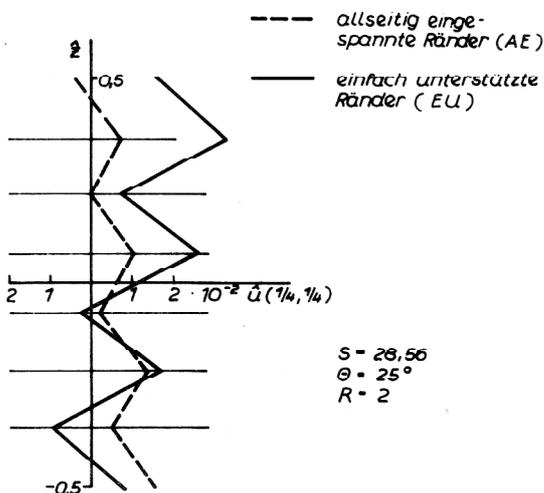


Bild 4
Allseitig eingespannte und einfach unterstützte Ränder