

Substruktur-/Superelemententechnik für die Eigenschwingungsberechnung dreidimensionaler Modelle mit Hilfe der FEM

Manfred Zehn

1. Einleitung

Die dynamische Analyse großer, komplexer Strukturen mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM) führt oft auf großdimensionierte Matrixeigenwertprobleme, deren Berechnung sehr kostenaufwendig oder sogar praktisch undurchführbar werden kann.

Insbesondere gilt dies für dreidimensionale Modellierungen, die in der Regel großdimensionierte, breitbandige Matrizen für das allgemeine Matrixeigenwertproblem liefern. Die Lösungen des Matrixeigenwertproblems sind die Eigenfrequenzen (Resonanzstellen) und die zugehörigen Eigenvektoren, die die Basis für modale Methoden bei der Berechnung stationärer und transienter Schwingungen bilden.

Seit etwa Mitte der sechziger Jahre werden Verfahren zur Kondensation aus der FEM resultierender großdimensionierter Matrixeigenwertprobleme veröffentlicht [1] bis [3], um den Rechenzeit- und Transferaufwand für deren Lösung zu reduzieren. Die meisten Autoren gehen davon aus, daß die Matrizen der Gesamtstruktur durch Elimination von Freiheitsgraden (sogenannte „interne“ oder „slaves“) in ihrer Dimension verringert werden. Das System wird damit auf eine Anzahl Freiheitsgrade, die „externen“ oder „masters“, kondensiert. Die Lage und Anzahl der externen Freiheitsgrade wird in der Regel durch Erfahrungen, Versuche und gewisse Vorschriften [4] bestimmt. In der letzten Zeit wurden auch Verfahren zur automatischen Berechnung der externen Freiheitsgrade [8] mit Erfolg angewandt, die aber einen für großdimensionierte Systeme nicht unerheblichen Aufwand erfordern. Die Kondensation führt immer zu einer Verkürzung des berechenbaren Ausschnitts aus dem Frequenzspektrum [5]. Bis zu welchen Eigenfrequenzen das reduzierte System überhaupt bzw. brauchbare Lösungen liefert, soll im weiteren gezeigt werden. Für die praktische Berechnung ist es in der Regel besser, mit einer vorgegebenen Grenzfrequenz abzufragen, ob die kondensierte Struktur bis zu dieser Frequenz brauchbar ist. Der Tatsache, daß höhere Eigenfrequenzen durch die Kondensation zunehmend verfälscht werden, wirkt entgegen, daß oft nur wenige Eigenfrequenzen und -formen am unteren Rand des Spektrums von praktischem Interesse sind.

Für sehr große Modelle kann eine Kondensation der Gesamtstruktur sehr aufwendig werden. Außerdem kann der Vorbereitungsanfang zur Erstellung des rechnerinternen Modells (Topologie, Koordinaten, Materialdaten usw.) oft wesentlich erleichtert werden, wenn das System in geeignete Teilstrukturen (Substrukturen) zerlegt wird. Kondensiert man nun an Stelle der Gesamtstruktur diese Substrukturen, so entstehen daraus neue

komplexe Elemente (Superelemente). Die Superelemente werden, u. U. gemeinsam mit Einzelementen, zu einer Gesamtstruktur (Hyperstruktur) von nunmehr geringerer Dimension zusammengefügt. Die Kondensation in Substrukturen bietet folgende Vorteile:

- Es können günstigere Möglichkeiten für eine automatische Datengenerierung und damit eine wesentliche Reduzierung des Vorbereitungsaufwandes geschaffen werden.
- Eine einfache Realisierung gleichartiger Teilbereiche des Modells ist durch Einbau des selben Superelements in die Gesamtstruktur möglich (u. U. mit Koordinatentransformation).
- Bei einer erforderlichen Veränderung einzelner externer Freiheitsgrade brauchen nicht alle Superelemente neu erzeugt werden.
- Es ist eine bessere Implementierung der Eigenschwingungsberechnung in elastisch-statische Programmsysteme, die eine Substruktur-/Superelemententechnik enthalten, zu erreichen.

Gegenüber der Kondensation der Gesamtstruktur ist der Grad der Reduktion bei der Substruktur-/Superelemententechnik nach unten durch die Anzahl der für die Bindung zwischen den Superelementen (u. U. auch Einzelemente) erforderlichen externen Freiheitsgrade begrenzt.

Die meisten der im folgenden aufgezeigten Verfahren der Substruktur-/Superelemententechnik für die Eigenschwingungsberechnung lassen sich aus den Kondensationsmethoden für Gesamtstrukturen ableiten. In dieser Arbeit sollen verschiedene Verfahren aufgezeigt und hinsichtlich ihres Einsatzes in FEM-Programmsystemen für dreidimensionale Berechnungen gesichtet werden. Die Matrizen realer Modelle sind bei 3D-Diskretisierungen in der Regel so groß, daß sie nicht mehr in den Hauptspeicher einer Rechenanlage passen, was einen ständigen Transfer zwischen Haupt- und Hintergrundspeicher erforderlich macht. Effektive Algorithmen müssen vor allem auf eine Reduktion des Transfers ausgerichtet sein.

Die vorliegende Arbeit entstand als Ergebnis von Grundlagenuntersuchungen zur Implementierung einer Substruktur-/Superelemententechnik für dynamische Aufgaben in das Programmsystem COSAR [19], Zweig Dynamik, der TH Magdeburg. Zur Untermauerung der für dieses System aufgezeigten Lösungswege werden drei Berechnungsbeispiele im Abschnitt 4 aufgezeigt.

2. Verschiedene Verfahren der Substruktur-/Superelementtechnik für die Eigenschwingungsberechnung

2.1. Grundgleichungen, Definitionen

Aus der FEM-Diskretisierung eines ungedämpften Kontinuums folgt für die Eigenschwingungsberechnung der nichtkondensierten Struktur das allgemeine Matrixeigenwertproblem

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) \underline{x} = \underline{0}, \quad (1)$$

das zu lösen ist. Mit \underline{K} ist hier die Systemsteifigkeits- und mit \underline{M} die Systemmassenmatrix bezeichnet. ω ist die jeweilige Eigenkreisfrequenz und \underline{x} der zugehörige Eigenvektor. \underline{K} ist bei Realisierung aller Randbedingungen positiv definit, symmetrisch und bandförmig; die Massenmatrix \underline{M} sieht man von bestimmten Verfahren zur Diagonalisierung von \underline{M} ab [17], ebenso. Mit \underline{K}_{sj} und

\underline{M}_{sj} sollen die Matrizen der j-ten Substruktur bezeichnet werden. \underline{K}_{sj} und \underline{M}_{sj} sind die aus der j-ten Substruktur

durch Kondensation entstandenen Superelementmatrizen. \underline{K} und \underline{M} stellen die aus Superelementen und u. U. Einzelementen zusammengefügte Matrizen der Hyperstruktur dar, die nunmehr an die Stelle von \underline{K} und \underline{M} in (1) treten, so daß jetzt

$$(\underline{\bar{K}} - \omega^2 \underline{\bar{M}}) \underline{\bar{x}} = 0 \quad (2)$$

zu lösen ist.

Durch Aufteilung der Freiheitsgrade einer Substruktur in externe (e) und interne (i) und entsprechende Anordnung haben die Matrizen \underline{K}_{sj} und \underline{M}_{sj} folgende Form:

$$\underline{K}_{sj} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{iisj} & \underline{K}_{iesj} \\ \underline{K}_{iesj}^T & \underline{K}_{eesj} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{M}_{sj} = \begin{bmatrix} \underline{M}_{iisj} & \underline{M}_{iesj} \\ \underline{M}_{iesj}^T & \underline{M}_{eesj} \end{bmatrix} \quad (3)$$

(für alle Substrukturen $j = 1, 2, \dots, m$).

Die übliche Vorgehensweise ist nun so, daß die Matrizen in (3) nach verschiedenen Verfahren auf die Dimension der externen Freiheitsgrade kondensiert werden und somit $\underline{\bar{K}}_{sj}$ und $\underline{\bar{M}}_{sj}$ entstehen, die dann unter Beachtung der Bindungen zum Gesamtsystem, in $\underline{\bar{K}}$ und $\underline{\bar{M}}$ eingefügt werden. Die Positionen, auf die die Elemente von $\underline{\bar{K}}_{sj}$ und $\underline{\bar{M}}_{sj}$ und $\underline{\bar{K}}$ und $\underline{\bar{M}}$ gelangen, hängen von der lokalen und globalen Numerierung der externen Knoten ab. Ein in [9] gezeigtes Verfahren gestattet die Lösung der Eigenschwingungsaufgabe ohne expliziten Aufbau von \underline{K} und \underline{M} bzw. $\underline{\bar{K}}$ und $\underline{\bar{M}}$, indem alle Rechenoperationen des Iterationsverfahrens mit den Substrukturen bzw. Superelementen ausgeführt werden. Zur Ableitung wichtiger Zusammenhänge soll die folgende, für die praktische Berechnung unübliche bzw. nicht sinnvolle, Anordnung der Substrukturen (3) in (1) gegeben werden. Man stelle sich vor, daß (1) aus den unkondensier-

ten Matrizen (3) derart erstellt wird, daß die lokalen Freiheitsgrade der Substrukturen getrennt von den externen Freiheitsgraden der Gesamtstruktur, unter Beachtung der Bindungen zwischen den m Substrukturen, angeordnet werden. Die Submatrizen \underline{K}_{eesj} und \underline{M}_{eesj}

$$= 0 \quad (5)$$

sind dabei auf die Dimension von \bar{K} und \bar{M} erweitert, so daß eine Submatrix

$$\underline{K}_{ee} = \sum_{j=1}^m \underline{K}_{eeS_j} \quad \text{und} \quad \underline{M}_{ee} = \sum_{j=1}^m \underline{M}_{eeS_j} \quad (4)$$

definiert werden kann. Unter diesen Annahmen läßt sich (1) nun durch (5) darstellen.

Im weiteren soll für ω^2 der dimensionslose Eigenwert λ benutzt werden.

2.2. Verfahren der „exakten“ Superelemente

Exakte Superelemente lassen sich ohne Kenntnis der Eigenwerte von (1) nicht ableiten, denn eine solche Kondensation auf die externen Freiheitsgrade erfordert nach (5)

$$\underline{x}_{iS_j} = -(\underline{I} - \lambda \underline{K}_{iiS_j}^{-1} \underline{M}_{iiS_j})^{-1} \underline{K}_{iiS_j}^{-1} (\underline{K}_{ieS_j} - \lambda \underline{M}_{ieS_j}) \underline{x}_e \quad (6)$$

zu berechnen.

Mit einer geeigneten k -ten Näherung $\bar{\lambda}_1^{(k)}$ für den l -ten Eigenwert von (1) lassen sich sogenannte „dynamische“ Steifigkeitsmatrizen

$$\underline{A}_{S_j}(\bar{\lambda}_1^{(k)}) = \underline{K}_{S_j} - \bar{\lambda}_1^{(k)} \underline{M}_{S_j} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{iiS_j} & \underline{A}_{ieS_j} \\ \underline{A}_{ieS_j}^T & \underline{A}_{eeS_j} \end{bmatrix} \quad (7)$$

für die Substrukturen $j = 1, 2, \dots, m$ ableiten. Die Matrizen (7) können nun „exakt“ kondensiert werden zu den Superelementen

$$\bar{\underline{A}}(\bar{\lambda}_1^{(k)})_{S_j} = \underline{A}_{eeS_j} - \underline{A}_{ieS_j}^T \underline{A}_{iiS_j}^{-1} \underline{A}_{ieS_j} \quad (8)$$

Für die „dynamische“ Superelementmassenmatrix muß nun nach (7) gelten

$$\begin{aligned} \bar{\underline{M}}(\bar{\lambda}_1^{(k)})_{S_j} &= - \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}_1^{(k)}} \bar{\underline{A}}(\bar{\lambda}_1^{(k)})_{S_j} \\ &= \underline{M}_{eeS_j} + \underline{A}_{ieS_j}^T \underline{A}_{iiS_j}^{-1} \underline{M}_{iiS_j} + \underline{M}_{ieS_j}^T \underline{A}_{iiS_j}^{-1} \underline{A}_{ieS_j} \\ &\quad + \underline{A}_{ieS_j}^T \underline{A}_{iiS_j}^{-1} \underline{M}_{iiS_j} \underline{A}_{iiS_j}^{-1} \underline{A}_{ieS_j} \end{aligned} \quad (9)$$

Diese „dynamischen“ Superelementmatrizen werden nun wieder unter Beachtung der Bindungen zu Hyperstrukturen $\bar{\underline{A}}(\bar{\lambda}^{(k)})$ und $\bar{\underline{M}}(\bar{\lambda}^{(k)})$ zusammengesetzt. Die Lösung μ_1 des allgemeinen Matrixeigenwertproblems

$$(\bar{\underline{A}}(\bar{\lambda}_1^{(k)}) - \mu \bar{\underline{M}}(\bar{\lambda}_1^{(k)})) \bar{\underline{x}}_e = 0 \quad (10)$$

liefert eine verbesserte Lösung

$$\bar{\lambda}_1^{(k+1)} = \bar{\lambda}_1^{(k)} + \mu_1 \quad (11)$$

für den l -ten Eigenwert. Auch aus der Forderung, die sich aus (7) ableiten läßt

$$\det \left\{ \bar{\underline{A}}(\bar{\lambda}_1^{(k)}) \right\} \rightarrow \min \quad (12)$$

können verbesserte Eigenwertnäherungen erhalten werden.

Mit der verbesserten Eigenwertnäherung $\bar{\lambda}_1^{(k+1)}$ ist dann der Prozeß von Gleichung (7) an so lange zu wiederholen, bis μ_1 unter einer gegebenen Schranke liegt bzw. (12) ausreichend befriedigt ist.

Der vollständige Neuaufbau von \underline{A}_{S_j} , die Kondensation zu $\bar{\underline{A}}_{S_j}$ bzw. $\bar{\underline{M}}_{S_j}$ und schließlich deren Einbau in $\bar{\underline{A}}$ und $\bar{\underline{M}}$ für jeden Iterationsschritt macht das Verfahren in dieser Form nicht anwendbar. In [5] und etwas modifiziert in [22] findet sich eine Methode zur Bestimmung von $\bar{\underline{A}}_{S_j}$ und $\bar{\underline{M}}_{S_j}$, die einen wesentlich geringeren Aufwand benötigt. Ohne Herleitung aller Beziehungen soll diese hier wiedergegeben werden.¹⁾

Es ergibt sich für die „dynamische“ Superelementsteifigkeitsmatrix nach [22]

$$\bar{\underline{A}}(\bar{\lambda}_1^{(k)})_{S_j} = \bar{\underline{K}}_{S_j}^{(1)} - \bar{\lambda}_1^{(k)} \bar{\underline{M}}_{S_j}^{(1)} - \bar{\lambda}_1^{(k)} \underline{P}_{S_j} \bar{\underline{\Theta}}_{S_j}^{(k)} \underline{P}_{S_j}^T \quad (13)$$

Die Matrizen $\bar{\underline{K}}_{S_j}^{(1)}$ und $\bar{\underline{M}}_{S_j}^{(1)}$ ergeben sich durch einfache statische Kondensation von \underline{K}_{S_j} und \underline{M}_{S_j} (vgl. Abschnitt 2.4. Gl. (36)).

\underline{P}_{S_j} und $\bar{\underline{\Theta}}_{S_j}^{(k)}$ werden für jede Substruktur aus den Lösungen von

$$(\underline{K}_{iiS_j} - \vartheta_{S_j} \underline{M}_{iiS_j}) \bar{\underline{x}}_{S_j} = 0, \quad (14)$$

dem Eigenwertproblem der inneren Struktur, aufgebaut, wobei die Lösungen

$$\bar{\underline{\Theta}}_{S_j} = \text{diag} \left\{ \vartheta_{S_j r} \right\} \quad \text{und} \quad \bar{\underline{x}}_{S_j} = \left\{ \bar{\underline{x}}_{S_j 1}, \bar{\underline{x}}_{S_j 2}, \dots, \bar{\underline{x}}_{S_j r}, \dots \right\} \quad (15)$$

($r = 1, 2, 3, \dots$)

sind.

r kann maximal $n_{S_j} - n_{eeS_j}$, also die Anzahl der internen Freiheitsgrade sein, in der Regel kommt man mit etwas mehr als der Anzahl der gesuchten Eigenwerte von (1) aus [22]. Mit (15) ergibt sich:

$$\underline{P}_{S_j} = \underline{M}_{ieS_j}^T \bar{\underline{X}}_{S_j} - \underline{K}_{ieS_j}^T \bar{\underline{X}}_{S_j} \bar{\underline{\Theta}}_{S_j}^{-1} \quad (16)$$

und

$$\bar{\underline{\Theta}}_{S_j}^{(k)} = \text{diag} \left\{ \frac{\bar{\lambda}_1^{(k)}}{\vartheta_{S_j r} - \bar{\lambda}^{(k)}} \right\} \quad \text{mit } r = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

1) Die Herleitung von Gl. (13) ist sinngemäß in den Gln. (19) bis (22) gezeigt.

Für die „dynamische Superelementmassenmatrix“ folgt aus (13) nach (9)

$$\bar{M}(\bar{\lambda}_1^{(k)})_{Sj} = - \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}^{(k)}} \bar{A}(\bar{\lambda}_1^{(k)})_{Sj} = \bar{M}_{Sj}^{(1)} + \underline{P}_{Sj} \underline{P}_{Sj}^T - \underline{P}_{Sj} \text{diag} \left\{ \frac{\vartheta_{Sjr}^2}{\vartheta_{Sjr}^2 - \bar{\lambda}_1^{(k)^2}} \right\} \underline{P}_{Sj}^T \quad (18)$$

Mit den Submatrizen \bar{A}_{Sj} und \bar{M}_{Sj} kann nun weiter wie schon beschrieben verfahren werden.

Neben der für größere Substrukturen, wie sie bei einer dreidimensionalen Modellierung gegeben sein können, recht aufwendigen Lösung von (14), ist der Mehraufwand für (13) und (18) gegenüber der einfachen statischen Kondensation (vgl. Abschnitt 2.4) gering. Der größte Nachteil des Verfahrens ist, daß nicht alle Eigenwerte und -vektoren simultan entstehen und daß sich die Lösung des Eigenwertproblems über den zyklischen Neuaufbau der Superelemente und der Hyperstrukturen erstreckt. Für umfangreiche dreidimensionale Modelle ist der dadurch anfallende Transferaufwand zwischen Hauptspeicher und Hintergrundspeicher groß, so daß ein solches Verfahren für diese Modelle nicht geeignet erscheint.

2.3. Substruktur-/Superelementtechnik auf der Basis einer modalen Synthese des Berechnungsmodells

Verschiedene Autoren z. B. in [11] bis [13], [18] haben Substrukturtechniken unter Ausnutzung bestimmter konstruktiver Besonderheiten (die Substrukturierung ist gewissermaßen durch die Konstruktion gegeben) entwickelt. Bei dieser Methode werden die Substrukturen je für sich berechnet; diese Teilergebnisse werden dann auf eine sogenannte Rumpfstruktur übertragen und damit wird das zu lösende Gesamtsystem gebildet. D. h. die Eigenwerte und -formen der m Substrukturen müssen entsprechend Gl. (14) berechnet werden. Dadurch, daß die Hyperstruktur auf einer konstruktiv vorliegenden Rumpfstruktur basiert und die Substrukturen keine weiteren externen Knoten (in dieser Berechnungsebene) enthalten und keine Massenkopplung angenommen wird (diagonale Massenmatrix) können die Eigenwerte und -formen von (14) auch als Meßwerte vorliegen.

Das Berechnungsmodell wird also in m Substrukturen (Dimension n_{Sj}) und eine Rumpfstruktur (Dimension n_r) unterteilt. Analog zu Gleichung (6) folgt aus der Kopplung der Freiheitsgrade, die nur in der Substruktur j vorkommen ($(n_{Sj} - n_{kSj})$ -Werte) und denen, die zur Rumpf- und Substruktur j gehören (n_{kSj} -Werte),

$$\underline{x}_{iSj} = - (\underline{K}_{iiSj} - \lambda \underline{M}_{iiSj})^{-1} \underline{K}_{irSj} \underline{x}_r \quad (19)$$

Damit entsteht das nichtlineare Eigenwertproblem

$$[\underline{K}_{rr} - \lambda \underline{M}_{rr} - \sum_{j=1}^m \underline{K}_{irSj}^T (\underline{K}_{iiSj} - \lambda \underline{M}_{iiSj})^{-1} \underline{K}_{irSj}] \underline{x}_r = 0 \quad (20)$$

Mit den Lösungen (15) von (14) für die m Substrukturen gilt

$$\bar{X}_{Sj}^T \underline{K}_{iiSj} \bar{X}_{Sj} = \text{diag} \left\{ \vartheta_{Sj1} \right\} = \underline{\Theta}_{Sj} \quad (l = 1, 2, 3, \dots, n_{Sj} - n_{kSj})$$

und

$$\bar{X}_{Sj}^T \underline{M}_{iiSj} \bar{X}_{Sj} = \underline{I} \quad (21)$$

Unter Benutzung der Gl. (21) kann nun

$$(\underline{K}_{iiSj} - \lambda \underline{M}_{iiSj})^{-1} = \bar{X}_{Sj}^T \text{diag} \left\{ (\vartheta_{Sj1} - \lambda)^{-1} \right\} \bar{X}_{Sj} \quad (22)$$

gesetzt werden. Weiterhin wird eingeführt

$$\underline{P}_{Sj1} = \underline{K}_{irSj} \bar{X}_{Sj1} \quad (23)$$

so daß (20) nunmehr in der Form

$$\underline{F}(\lambda) \underline{x}_r = [\underline{K}_{rr} - \lambda \underline{M}_{rr} - \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^{(n_{Sj} - n_{kSj})} (\vartheta_{Sj1} - \lambda)^{-1} \underline{P}_{Sj1} \underline{P}_{Sj1}^T] \underline{x}_r \quad (24)$$

dargestellt werden kann. \underline{P}_{Sj1} zeigt den Einfluß der Eigenform l der Substruktur j über die Kopplung \underline{K}_{irSj} auf die Rumpfstruktur, so daß in [18] als Kriterium über die Wirkung der Dyaden $\underline{P}_{Sj1} \underline{P}_{Sj1}^T$, die Norm

$$\underline{P}_{Sj1}^T \underline{P}_{Sj1} (\vartheta_{Sj1} - \lambda)^{-1} = \underline{P}_{Sj1}^2 \quad (25)$$

genutzt wird. D. h. ein Abwägen der Werte \underline{P}_{Sj1}^2 gestattet die Verkürzung der Summation über l in (24) ($l_{\max} \ll (n_{Sj} - n_{kSj})$), um den Aufwand zu reduzieren.

Zur Lösung der nichtlinearen Aufgabe (24) werden in der genannten Literatur verschiedene Verfahren genutzt. In [18] werden auf Grund von

$$\det \left\{ \underline{F}(\lambda) \right\} = 0 \quad (26)$$

die Eigenwertnäherungen $\bar{\lambda}$ mit Hilfe des TRACE-Verfahrens bestimmt. Bei einem vorzeitigen Abbruch der Dyadensummation in (24) nähern sich die Eigenwerte von oben.

Zur Anwendung dieses Verfahrens muß eine geeignete Strukturierung der Konstruktion vorliegen, die Dimension n_r der Rumpfstruktur sollte möglichst klein sein. Ein größerer Aufwand entsteht durch die Berechnung der Werte (15) aus (14), wozu, wenn nicht eine vollständige Lösung erforderlich ist, u. U. andere Kondensationsverfahren benutzt werden könnten (eine Art mehrstufige Superelementtechnik). Vorteilhaft bei diesem Verfahren ist, daß eine kombinierte Messung-Rechnung möglich ist. Das mit den Gleichungen (13) bis (18) im vorigen Abschnitt gezeigte Verfahren ist formal sehr ähnlich mit dem hier beschriebenen, so daß die Lösung von (24) auch in der Form der Gl. (10) und (11) über ein lineares Eigenwertproblem möglich ist.

2.4. Verfahren der statischen Kondensation und deren Erweiterung

Mit Gleichung (6) ist der Zusammenhang zwischen internen und externen Freiheitsgraden gezeigt, diese Beziehung ist über λ frequenzabhängig. Vernachlässigt man die Kopplung über die Massen (diagonale Massenmatrix), so können die internen Freiheitsgrade als Summe der Wirkung aus der statischen Verschiebung der externen Freiheitsgrade und der Massenbeschleunigung der internen Freiheitsgrade dargestellt werden. Wird der Term

$(\underline{I} - \lambda \underline{K}_{iiSj}^{-1} \underline{M}_{iiSj})^{-1}$ aus (6) in eine Reihe entwickelt

$$\begin{aligned} (\underline{I} - \lambda \underline{K}_{iiSj}^{-1} \underline{M}_{iiSj})^{-1} &= \underline{I} + \lambda \underline{K}_{iiSj}^{-1} \underline{M}_{iiSj} + \\ &+ (\lambda \underline{K}_{iiSj}^{-1} \underline{M}_{iiSj})^2 + \dots + (\lambda \underline{K}_{iiSj}^{-1} \underline{M}_{iiSj})^l, \\ &(l = 1, 2, \dots, \infty) \end{aligned} \quad (27)$$

so ist die Reihe dann konvergent, wenn die Eigenwerte μ_{Sj} der Matrix $\lambda \underline{K}_{iiSj}^{-1} \underline{M}_{iiSj}$ der gleichen Reihenentwicklung genügen, d. h.

$$\frac{1}{1 - \mu_{Sj}} = 1 + \mu_{Sj} + \mu_{Sj}^2 + \dots + \mu_{Sj}^l, \quad (l = 1, 2, \dots, \infty); \quad (28)$$

Die Reihe (28) konvergiert, wenn $\mu_{Sj} < 1$. Mit dem Eigenwertproblem (14), wobei immer vorausgesetzt werden kann, daß

$$\lambda_1 \leq \vartheta_{Sj1} \leq \vartheta_{Sj2} \leq \dots \leq \vartheta_{Sjn} \leq \vartheta_{Sjn} \leq \lambda_n, \quad (29)$$

ergibt sich

$$\mu_{Sj1} = \frac{\lambda}{\vartheta_{Sjn} \vartheta_{Sjn}^{-n} \vartheta_{eeSj}} \leq \dots \leq \mu_{Sjn} = \frac{\lambda}{\vartheta_{Sj1}}. \quad (30)$$

D. h. die Reihe (27) konvergiert um so besser, je größer ϑ_{Sj1} ist. Wird die Reihenentwicklung (27) nach dem ersten Glied (Einheitsmatrix \underline{I}) abgebrochen und die Massenkopplung über $\lambda \underline{M}_{ieSj}$ vernachlässigt, so entsteht aus (6) eine rein statische Beziehung zwischen internen und externen Freiheitsgraden:

$$\underline{x}_{iSj} = - \underline{K}_{iiSj}^{-1} \underline{K}_{ieSj} \underline{x}_e = \underline{F}_{Sj}^{(1)} \underline{x}_e. \quad (31a)$$

Berücksichtigt man die Massenkopplung, folgt

$$\begin{aligned} \underline{x}_{iSj} &= - \underline{K}_{iiSj}^{-1} (\underline{K}_{ieSj} - \lambda \underline{M}_{ieSj}) \underline{x}_e = \underline{F}_{Sj}^{(1)} \underline{x}_e + \\ &+ \lambda \underline{K}_{iiSj}^{-1} \underline{M}_{ieSj} \underline{x}_e = \underline{F}_{Sj}^{(2)} \underline{x}_e. \end{aligned} \quad (31b)$$

Werden Glieder bis $l = 1$ aus (27) mitgeführt, so folgt

$$\begin{aligned} \underline{x}_{iSj} &= - (\underline{I} + \lambda \underline{K}_{iiSj}^{-1} \underline{M}_{iiSj}) \underline{K}_{iiSj}^{-1} \underline{K}_{ieSj} \underline{x}_e = \\ &= \underline{F}_{Sj}^{(1)} - \lambda \underline{K}_{iiSj}^{-1} \underline{M}_{iiSj} \underline{K}_{iiSj}^{-1} \underline{K}_{ieSj} \underline{x}_e = \underline{F}_{Sj}^{(3)} \underline{x}_e \end{aligned} \quad (32a)$$

und unter Berücksichtigung der Massenkopplung ergibt sich

$$\begin{aligned} \underline{x}_{iSj} &= - (\underline{I} + \lambda \underline{K}_{iiSj}^{-1} \underline{M}_{iiSj}) \underline{K}_{iiSj}^{-1} (\underline{K}_{ieSj} - \lambda \underline{M}_{ieSj}) \underline{x}_e = \\ &= \underline{F}_{Sj}^{(3)} \underline{x}_e + (\lambda \underline{K}_{iiSj}^{-1} \underline{M}_{ieSj} + \lambda^2 \underline{K}_{iiSj}^{-1} \underline{M}_{iiSj} \underline{K}_{iiSj}^{-1} \underline{M}_{ieSj}) \underline{x}_e \\ &= \underline{F}_{Sj}^{(4)} \underline{x}_e. \end{aligned} \quad (32b)$$

Mit

$$\underline{x}^T = \underline{x}_e^T \left\{ \underline{F}_{Sj1}^{(k)}, \dots, \underline{F}_{Sj}^{(k)T}, \dots, \underline{F}_{Sm}^{(k)T}, \underline{I} \right\} = \underline{x}_e^T \underline{H}^{(k)T}, \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (33)$$

läßt sich nun (5) zur Hyperstruktur

$$(\underline{H}^{(k)T} \underline{K} \underline{H}^{(k)} - \lambda \underline{H}^{(k)T} \underline{M} \underline{H}^{(k)}) \underline{x}_e = 0 \quad (34)$$

kondensieren. Es ist damit gezeigt, daß je nach Anzahl der Glieder, die aus (27) mitgeführt werden, in (34) nichtlineare Eigenwertprobleme beliebigen Grades entstehen können. Unter Benutzung der Beziehung (31a), (31b), (32a) und (32b) sollen mit folgenden verkürzten Schreibweisen

$$\begin{aligned} \underline{T}_1 &= \underline{K}_{iiSj}^{-1} \underline{K}_{ieSj}, \quad \underline{T}_2 = \underline{K}_{iiSj}^{-1} \underline{M}_{ieSj} \quad \text{und} \\ \underline{T}_3 &= \underline{K}_{iiSj}^{-1} \underline{M}_{iiSj} \end{aligned} \quad (35)$$

die Superelementmatrizen abgeleitet werden. Mit (31a) ergibt sich

$$\underline{\bar{K}}_{Sj}^{(1)} = \underline{K}_{eeSj} - \underline{K}_{ieSj}^T \underline{K}_{iiSj}^{-1} \underline{K}_{ieSj} \quad (36)$$

und

$$\underline{\bar{M}}_{Sj}^{(1)} = \underline{M}_{eeSj} + \underline{T}_1^T \underline{M}_{iiSj} \underline{T}_1 - \underline{M}_{ieSj}^T \underline{T}_1 - \underline{T}_1^T \underline{M}_{ieSj}$$

Unter Verwendung von (31b) ist

$$\begin{aligned} \underline{\bar{K}}_{Sj}^{(2)} &= \underline{K}_{Sj}^{(1)} \\ \text{und} \\ \underline{\bar{M}}_{Sj}^{(2)} &= \underline{\bar{M}}_{Sj}^{(1)} - \underline{M}_{ieSj} \underline{T}_1 - \underline{T}_1^T \underline{M}_{ieSj} - \lambda \underline{M}_{ieSj}^T \underline{T}_2 + \\ &+ \lambda^2 \underline{T}_2^T \underline{M}_{iiSj} \underline{T}_2. \end{aligned} \quad (37)$$

Die Nutzung von (32a) ergibt

$$\begin{aligned} \underline{\bar{K}}_{Sj}^{(3)} &= \underline{K}_{Sj}^{(2)} \\ \text{und} \\ \underline{\bar{M}}_{Sj}^{(3)} &= \underline{\bar{M}}_{Sj}^{(2)} + 2 \underline{T}_1^T \underline{M}_{iiSj} \underline{T}_1 - \lambda (\underline{T}_1^T \underline{T}_3 \underline{M}_{iiSj} \underline{T}_1 + \\ &+ \underline{T}_1^T \underline{T}_3 \underline{M}_{ieSj} + \underline{M}_{ieSj}^T \underline{T}_3 \underline{T}_1) + \lambda^2 \underline{T}_1^T \underline{M}_{iiSj} \underline{T}_3 \underline{T}_1. \end{aligned} \quad (38)$$

Wird nun (32b) verwendet, so folgt

$$\bar{K}_{Sj}^{(4)} = \bar{K}_{Sj}^{(1)}$$

und

$$\begin{aligned} \bar{M}_{Sj}^{(4)} = & \bar{M}_{Sj}^{(3)} - \underline{T}_2^T \underline{K}_{ieSj} - \underline{K}_{ieSj}^T \underline{T}_2 + \lambda (2 \underline{T}_2^T \underline{M}_{ieSj} - \\ & - \underline{T}_2^T \underline{T}_3^T \underline{K}_{ieSj} - \underline{M}_{ieSj}^T \underline{K}_{iiSj}^{-1} \underline{M}_{ieSj} - \underline{K}_{ieSj}^T \underline{T}_3 \underline{T}_2) + \\ & + \lambda^2 (\underline{T}_2^T \underline{M}_{iiSj} \underline{T}_2 + 2 \underline{M}_{ieSj}^T \underline{T}_3 \underline{T}_2) - \\ & - \lambda^3 \underline{T}_2^T \underline{M}_{iiSj} \underline{K}_{iiSj}^{-1} \underline{T}_2 + \lambda^4 \underline{T}_2^T \underline{T}_3 \underline{M}_{iiSj} \underline{T}_3 \underline{T}_2. \end{aligned} \quad (39)$$

In [10] werden Verfahren zur Lösung des bei Anwendung von (38) folgenden Eigenwertproblems für eine Hyperstruktur (Reduktion auf quadratische Glieder, diagonale Massenmatrix) gegeben. Es zeigt sich eine Verbesserung der Eigenwerte gegenüber der Anwendung von (36) zur Erzeugung von Superelementen besonders bei Kondensation auf sehr wenige externe Knoten. Der Aufwand zur Lösung nichtlinearer Eigenwertprobleme ist allerdings deutlich höher. Deshalb erscheint bei allen Modellen, die in den Substrukturen eine hohe Anzahl externer Knoten für die Bindungen benötigen (das trifft für 3D-Modelle in der Regel zu), eine Beschränkung auf die statische Kondensation nach (36) ausreichend. Für die statische Kondensation folgt aus der Tatsache, daß in (31a) alle aus den Massenbeschleunigungen hervor-

gehenden Terme fehlen, daß die Wirkungen der Massenkraft nur über die externen Freiheitsgrade wiedergegeben werden. Die zu den Bindungen zusätzlich eingeführten externen Freiheitsgrade müssen daher die Eigenformen im gesuchten Bereich des Spektrums darzustellen gestatten. Aus (14) und (30) folgt, daß die Konvergenz für die statische Kondensation um so besser ist, wenn es gelingt, die internen Freiheitsgrade in steifere, starre Bereiche zu legen. Es bietet sich an, den Eigenwert ϑ_{Sj1} aus (14) als Bewertungsgröße für die Güte des Superelements heranzuziehen (Vergleich mit einer vom Problembearbeiter vorgegebenen Grenzfrequenz, bis zu der brauchbare Eigenfrequenzen gewünscht werden). Ein solcher Algorithmus, auf der Basis einer statischen Kondensation, wird im Programmsystem COSAR, Zweig Dynamik [17] genutzt.

3. Realisierung einer Superelementtechnik im Programmsystem COSAR, Zweig Dynamik

Im Programmsystem COSAR, Zweig Dynamik, wird die statische Kondensation für jede Substruktur ($j = 1, 2, \dots, m$) im Prozessor SUPELD realisiert, dessen schematischer Aufbau und Algorithmus im Bild 1 gezeigt ist. Die Schritte 1., 3. und 4. sind für die Superelementtechnik der Elastostatik ebenso auszuführen. Der Aufbau der Substrukturen in COSAR-Dynamik erfolgt analog COSAR/E80 (s. Nutzerhandbuch [21]). Zusätzlich zu den Matrizen K_{iiSj} (MKLL), K_{ieSj} (MKLE)

Der Prozessor SUPELD wird aus dem Hauptprozessor SYMAGE gerufen.

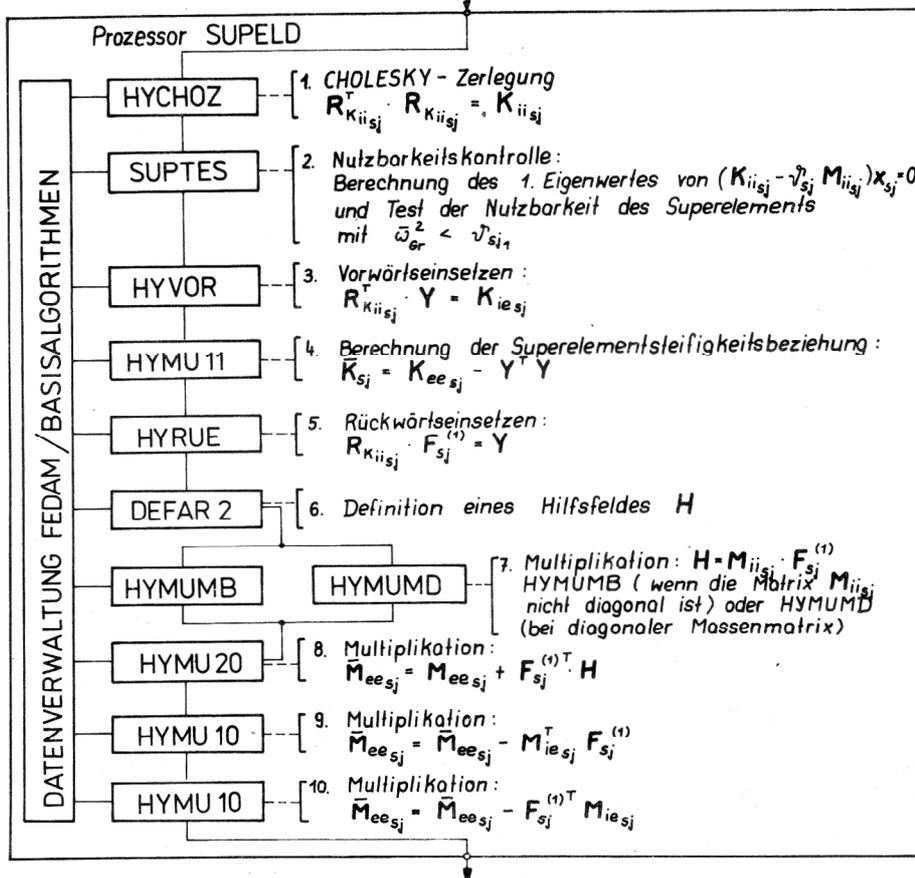


Bild 1
Prozessor SUPELD

und K_{eeSj} (MKEE) werden hier jedoch die Matrizen M_{iiSj} (MMLL), M_{icSj} (MMLE) und M_{ecSj} (MMEE) definiert und aufgebaut. Im Prozessor SUPELD werden daraus die Superelementbeziehungen nach Gl. (36) berechnet. Im Bild 1 sind nur die wesentlichen Prozessoren für die Hypermatrizen eingezeichnet, alle Basisalgorithmen zur Verarbeitung der Submatrizen und die Routinen der Datenverwaltung werden weggelassen. Die Lösung des linearen Eigenwertproblems für die Hyperstruktur (2) erfolgt, wie in [14, 16, 17] beschrieben.

4. Demonstrationsbeispiel

Im ersten Beispiel wurde ein Balken durch zwei Superelemente approximiert, wobei die beiden zugehörigen Substrukturen mit jeweils nur einem räumlichen Element (60-Freiheitsgrade – Hexaeder, HK60) sehr grob diskretisiert wurden. Als externe Knoten dienen die Verbindungsknoten zwischen den beiden Substrukturen und in der zweiten Substruktur (vgl. Bild 2, II) zwei zusätzliche Knoten. Zum Vergleich wurde der mit zwei HK60-Elementen vernetzte, unreduzierte Balken herangezogen (vgl. Bild 2, I). Trotz der relativ ungünstigen Externknotenverteilung ist eine recht gute Übereinstimmung der Lösungen I und II zu erkennen.

Nicht immer läßt sich eine sinnvolle Substrukturierung erreichen, so daß es unter Umständen möglich sein muß,

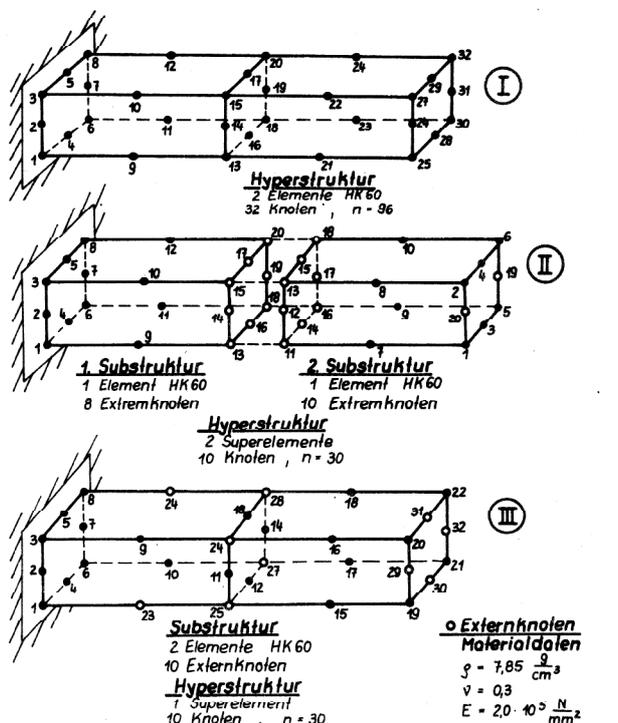


Bild 2
Testbeispiele

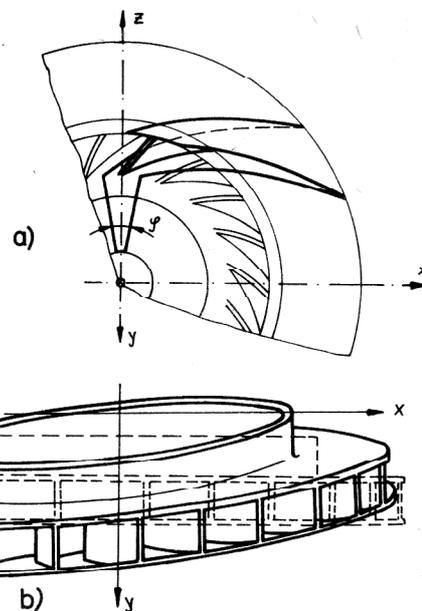


Bild 3
a) Lage einer Substruktur im Laufrad
b) 1. Eigenform mit unverformter Lage

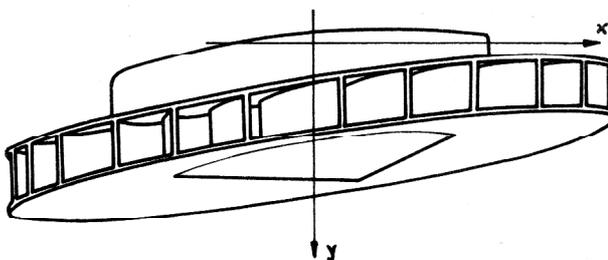


Bild 4
2. Eigenform

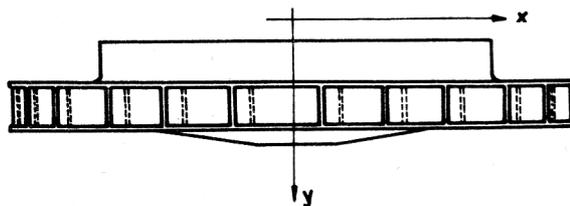


Bild 5
3. Eigenform

auch eine Gesamtstruktur zu kondensieren. Mit dem zweiten Beispiel soll demonstriert werden, daß eine solche Möglichkeit auch im Rahmen der in COSAR-Dynamik vorhandenen Substruktur-/Superelementtechnik realisierbar ist. Dazu wird die zu kondensierende Gesamtstruktur zur Substruktur erklärt, und die Hyperstruktur besteht dann aus nur einem Superelement (vgl. Bild 2, II).

Als umfangreiches Beispiel soll ein segmentsymmetrisches Verdichterlaufrad dienen, welches unter Nutzung

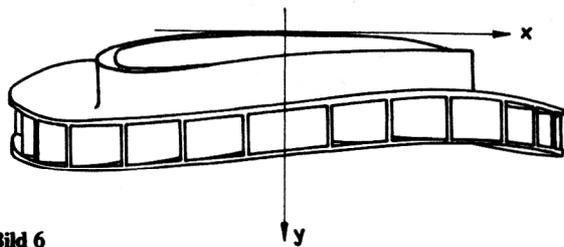


Bild 6
4. Eigenform

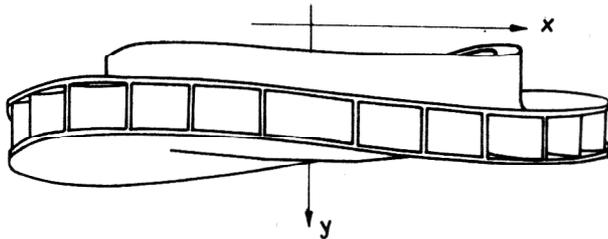


Bild 7
5. Eigenform

der gezeigten Superelementtechnik durch statische Kondensation berechnet wurde. Als Substruktur wurde ein Segment benutzt. Die Approximation dieses Segments erfolgte durch 13 Elemente (HK60). Das gesamte Verdichtterlauftrad setzt sich aus 18 solcher Segmente zusammen. Die Welle wurde nicht mit modelliert. Das Verdichtterlauftrad wurde am Innenrand der Tragscheibe unver-schieblich gelagert. Als externe Knoten wurden alle Verbindungsknoten zu den benachbarten Segmenten und zusätzlich zwei Knoten auf der Schaufel benutzt. Für ϑ_{Sj_1} ergab sich ein Wert von $0,4536 \cdot 10^5$, was bedeutet, daß bis zu einer Grenzfrequenz von ca. 10 kHz vertretbare Fehler eingebracht werden.

Nach dem Aufbau der Systemmatrizen \bar{M} und \bar{K} aus den 18 Superelementen (Dimension 1512, halbe Bandweite 330) erfolgte die Berechnung der fünf betragskleinsten Eigenwerte und -vektoren. Als Fehlerschranke (relative Abweichung der Eigenwertnäherung zweier aufeinanderfolgender Iterationsschritte) wurde $\epsilon = 0,01$ angegeben. Zur Ermittlung der fünf Eigenwerte und -vektoren waren insgesamt 4 Iterationsschritte erforderlich. Die gesamte Berechnung des Laufrades erfolgte in mehreren Rechnerläufen (ES 1040). Die Bilder 3 bis 7 zeigen die berechneten Eigenformen in der x-y-Ebene dargestellt. Ohne Nutzung der Superelementtechnik hätte das Berechnungsmodell bei gleicher Vernetzung 5994 Freiheitsgrade.

LITERATUR

- [1] Guyan, R.J.: Reduction of stiffness and mass matrices. AIAA Journal 3 (1965) No. 2, p. 380.
- [2] Irons, B.M.: Eigenvalue economises in vibration problems. Journal Roy. Aeron. Soc. 67 (1963), p. 526–528.
- [3] Irons, B.M.: Structural Eigenvalueproblems: Elimination of Unwanted Variables. AIAA Journal 3 (1965), p. 961–962.
- [4] Ramsden, J.N.; Stoker, J.R.: Mass Condensation: A Semi-Automatic Method for Reducing the Size of Vibration Problems. Int. J. Num. Meth. Engng. 1 (1969), p. 333–349.
- [5] Geradin, M.: Error Bounds for Eigenvalues Analysis by Elimination of Variables. J. of Sound and Vibration 19 (1971) No. 2, p. 111–132.
- [6] Wright, G.C.; Miles, G.A.: An economical Method for Determining the smallest Eigenvalues of large linear Systems. Int. J. Num. Meth. Engng. 3 (1971), p. 25–33.
- [7] Yee-Tak Leung, A.: An Accurate Method of Dynamic Condensation in Structural Analysis. Int. J. Num. Meth. Engng. 12 (1978), p. 1705–1715.
- [8] Shah, V.N.; Raymund, M.: Analytical Selection of Masters for the reduced Eigenvalue Problem. Int. J. Num. Meth. Engng. 18 (1982), p. 89–98.
- [9] Arora, J.S.; Nguyen, D.T.: Eigensolution for large structural systems with substructures. Int. J. Num. Meth. Engng. 15 (1980) p. 333–341.
- [10] Johnson, C.P.; Craig, R.R.; Yargicoglu, A.; Rajatabhothi: Quadratic reduction for the eigenproblem. Int. J. Num. Meth. Engng. 15 (1980), p. 911–923.
- [11] Habedank, G.: Über die Reduktion der Anzahl der Freiheitsgrade bei der Schwingungsberechnung von Strukturen. VDI-Bericht 221 (1974): VDI-Schwingungstagung, S. 73–79.
- [12] Hurty, W.C.: Dynamic analysis of structural systems using component modes. AIAA Journal 3 (1965), p. 678–685.
- [13] Craig, R.R., Bampton, M.C.C.: Conpling of Substructures for dynamic analysis. AIAA Journal 6 (1968), p. 1313–1319.
- [14] Fischer, U.; Mang, H.; Zehn, M.: Anwendung der Finite-Elemente-Methode zur Untersuchung dynamischer Probleme an festen Körpern (russ.). Uspechi Mechaniki 3 (1980), No. 2, S. 113–139.
- [15] Zehn, M.: Konzeption der Systemvariante COSAR-Eigenschwingungen 5. Tagung Festkörpermechanik (1982). VEB Fachbuchverlag Leipzig 1982, VII/1–10.
- [16] Zehn, M.: FEM-Formulierungen für Eigenwertprobleme und Konzeption des Systems COSAR-Eigenschwingungen (COSAR-DEIG) Vorträge zum Problemseminar Finite Elemente Gaußig 1981. TU Dresden (1981), H. 2, S. 40–46.
- [17] Zehn, M.: Berechnung der Eigenschwingungen dreidimensionaler Modelle unter Nutzung der Methode der finiten Elemente Dissertation, TH Magdeburg (1981).
- [18] Ruge, P.: Schwingungsberechnung zusammengesetzter Systeme durch modale Synthese. Ing.-Archiv 52 (1982), H. 3/7 S. 177–182.
- [19] Altenbach, J.; Fischer, U.: Anwendung der Methode der Finiten Elemente zur Analyse dreidimensionaler Modelle der Kontinuumsmechanik. Z. Technische Mechanik 1 (1980) H. 1, S. 3
- [20] Craig, R.R.: Methods of component mode Synthesis. The Shook and Vibration Digest 9 (1977), p. 3–10.
- [21] Nutzerhandbuch COSAR/E80. TH Magdeburg (1980).
- [22] Leung, Y.-T.: An accurate method of dynamic substructuring with simplified computation. Int. J. Num. Meth. Engng. 14 (1979), p. 1241–1256.

Anschrift des Verfassers:

Dr.-Ing. Manfred Zehn
Technische Hochschule Otto von Guericke
Sektion Maschinenbau
3010 Magdeburg
PSF 124