

Näherungsweise Erfassung des Einflusses des Gelenkspiels auf die Gelenkkräfte in schnelllaufenden Koppelgetrieben

H. Dresig, T. Thümmel

0. Einleitung

Für die Leistungssteigerung von Textil- und Verarbeitungs-
maschinen erweisen sich schnelllaufende Koppel-
getriebe zunehmend als leistungsbegrenzende Baugrup-
pen. Durch die sich periodisch ändernden Massenkräfte
und Spiel in den Gelenken entstehen Schwingungen und
Stöße, die wiederum die Ursache für Lärm, Verschleiß
und Funktionsstörungen sind [1]. Es ist bekannt, daß
die wirklichen Gelenkkräfte in Koppelgetrieben größer
sind als die, welche sich aus dem Berechnungsmodell der
starrten Maschine ergeben [2].

Die Berechnung der Stoßkräfte in den spielbehafteten
Gelenken der Koppelgetriebe erfolgte bisher durch Lö-
sung von Systemen nichtlinearer Differentialgleichungen
[3], [4]. Dabei ist es schwierig, den Einfluß konstruktiver
Parameter zu analysieren. Vom Standpunkt des Kon-
strukteurs aus gesehen fehlen bisher einfache, leicht zu-
gängliche Berechnungsmethoden zur Ermittlung der
Stoßkräfte in den Gelenken. Dazu soll hiermit ein Bei-
trag geleistet werden.

Das mechanische Modell wird so vereinfacht, daß die
mathematische Lösung einfach und von Hand möglich
ist. Als Ausgangspunkt dienen die Gelenkkräfte des
starrten Mechanismus (z. B. Ergebnisse der EDV-Program-
me [5] und [6]), womit die tatsächlichen Gelenkkraft-
verläufe nur grob angenähert werden.

1. Modellvorstellung und Voraussetzungen

Mit dem mechanischen Modell wird nur jeweils ein spiel-
behaftetes Drehgelenk im Mechanismus erfaßt.

Vor der Untersuchung der spielbehafteten Drehgelenke
werden für alle Drehgelenke Polardiagramme der Kräfte
berechnet. Bild 1 zeigt die Gelenkkraftverläufe, die sich
aus dem Modell des starrten Mechanismus für den Nadel-
antrieb einer Kettenwirkmaschine ergeben.

Die geschlossenen Kurven ergeben sich aus der Verbin-
dung der Endpunkte der Kraftvektoren für alle Getrie-
bestellungen.

Mit der im folgenden vorgeschlagenen vereinfachten
Theorie lassen sich Stoßkräfte für solche Gelenke be-
rechnen, in deren Polardiagrammen sich die Krafrich-
tung nur geringfügig und lediglich der Richtungssinn der
Gelenkkräfte ändert. Die Bewegung in dieser Richtung
wird mit der Koordinate $q = q_1 - q_2$ beschrieben. In
einem derartig belasteten spielbehafteten Drehgelenk
findet ein periodischer Anlagenwechsel des Gelenkbol-
zens im Lager statt. Der Stoßvorgang in einem Dreh-
gelenk mit einer vorherrschenden Krafrichtung kann

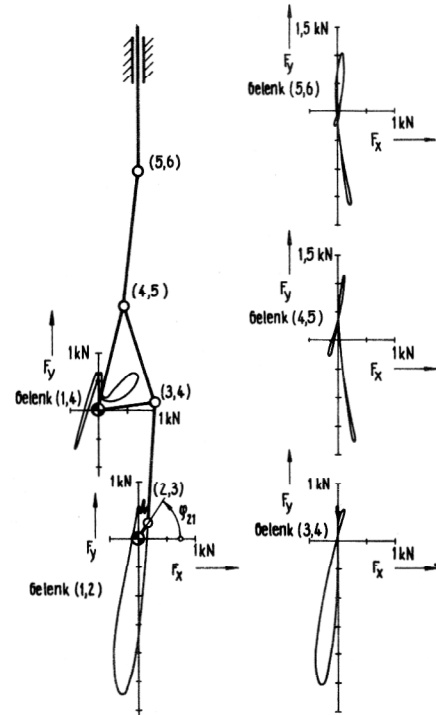


Bild 1
Gelenkkräfte im Nadelantrieb, berechnet am Modell des starrten
Mechanismus

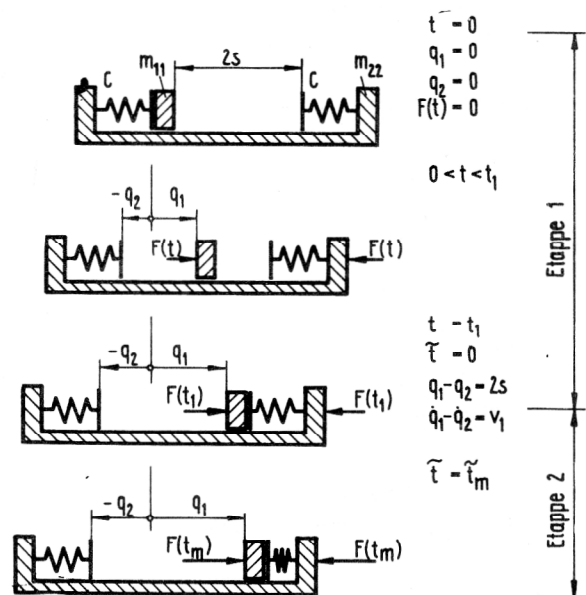
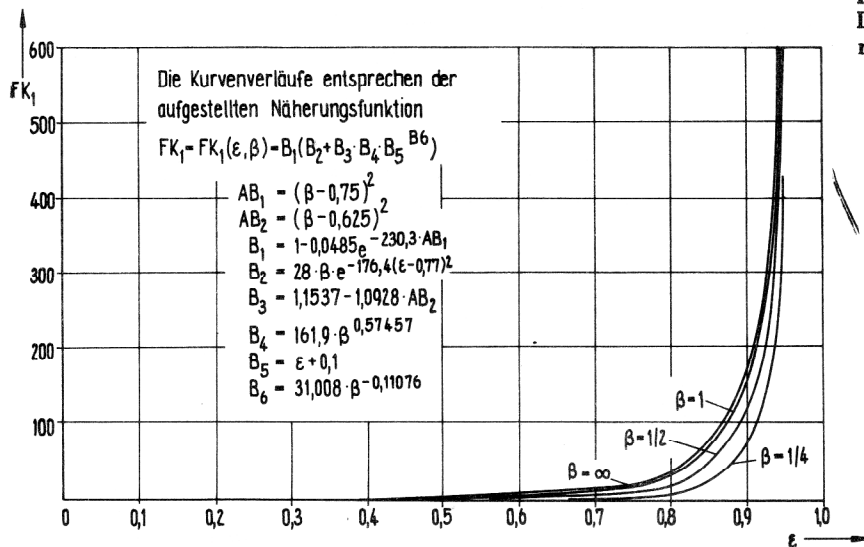


Bild 2
Eindimensionales Zweimassenmodell für ein spielbehaftetes
Drehgelenk

Bild 4
Diagramm der Federkoeffizienten
nach [8; Bild 10]



Das Gelenkspiel $2s$ ist funktionsbedingt und hängt von zahlreichen Faktoren ab: Fertigungstoleranzen, Montagegenauigkeit, Verschleiß u. a. In der Regel liegen die Werte im Bereich

$$2s = (0,00002 \dots 0,0002) \text{ m.} \quad (11)$$

2. Ableitung der Näherungsformel

Der Stoßvorgang im Modell (Bild 2) wird in zwei Etappen unterteilt:

Etappe 1:

Die Massen m_{11} und m_{22} durchlaufen das Spiel $2s$, sie sind nicht gekoppelt, und das System zerfällt in zwei separate Teilsysteme. Diese Etappe entspricht dem Anlagenwechsel des Gelenkbolzens in der Lagerschale. Die Etappe 1 endet mit dem Zusammenprall der Massen m_{11} und m_{22} zur Zeit t_1 mit der Geschwindigkeit v_1 .

Etappe 2:

Die Massen m_{11} und m_{22} sind über die Feder mit der Steifigkeit c gekoppelt. Infolge der Aufprallgeschwindigkeit v_1 und der Erregerkraft F wird die Feder zusammengedrückt. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Massen während der gesamten Etappe 2 gekoppelt bleiben. Es wird nur die erste Halbschwingung mit der ersten Kraftspitze untersucht.

Zur Berechnung der Gelenkkraft F_{12} , die im Modell der Federkraft entspricht, werden für beide Bewegungsstapen über das Kräftegleichgewicht Differentialgleichungen aufgestellt und gelöst.

In Etappe 1 gilt gemäß Gleichung (2), (3) und (4) mit der Vereinfachung (8):

$$F = m_{11} \ddot{q}_1 = \frac{F_0}{t_0} t \quad \text{und} \quad F = -m_{22} \ddot{q}_2 = \frac{F_0}{t_0} t. \quad (12)$$

Mit den Anfangsbedingungen für $t = 0$:

$$q_1 = 0, \quad \dot{q}_1 = 0 \quad \text{und} \quad q_2 = 0, \quad \dot{q}_2 = 0 \quad (13)$$

und den Endbedingungen der Etappe 1 zur Zeit $t = t_1$:

$$q_1 - q_2 = 2s \quad \text{und} \quad \dot{q}_1 - \dot{q}_2 = v_1 \quad (14)$$

lassen sich die Zeit des Zusammenpralls t_1 und die Aufprallgeschwindigkeit v_1 berechnen:

$$t_1 = \sqrt[3]{12 \text{ ms} \frac{t_0}{F_0}} \quad (15)$$

und

$$v_1 = \sqrt[3]{\frac{18 \text{ s}^2 F_0}{m} \frac{6 \text{ s}}{t_0}} = \frac{6 \text{ s}}{t_1} \quad (16)$$

mit der Beziehung für die Massen:

$$m = \frac{m_{11} \cdot m_{22}}{m_{11} + m_{22}} \quad (17)$$

In der Etappe 2 folgt aus der Gleichgewichtsbedingung:

$$m_1 \ddot{q}_1 + c(q_1 - q_2 - 2s) = F \quad (18)$$

$$m_2 \ddot{q}_2 - c(q_1 - q_2 - 2s) = -F \quad (19)$$

Unter Beachtung der Kraftbeziehungen

$$F_{12} = c(q_1 - q_2 - 2s) \quad \text{und} \quad \ddot{F}_{12} = c(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) \quad (20)$$

entsteht daraus eine Differentialgleichung für F_{12} :

$$\ddot{F}_{12} + \omega^2 F_{12} = \omega^2 F \quad (21)$$

mit den Substitutionen:

$$\omega^2 = \frac{c}{m} \quad (22)$$

$$\tau = \omega t_1 \quad (23)$$

$$F = \frac{12 \text{ cs}}{\tau^2} \left(1 + \frac{\omega t}{\tau}\right) \quad (24)$$

In der Nähe des Vorzeichenwechsels (Krafttrichtungswechsel) wird also ein linearer Kraftverlauf angenommen.

Mit den Anfangsbedingungen der Etappe 2 für $t = t - t_1 = 0$:

$$F_{12} = 0 \quad \text{und} \quad \dot{F}_{12} = cv_1 \quad (25)$$

folgt unter Anwendung des Duhamel'schen Integrals [10; S. 112] die Gelenkkraft F_{12} im spielbehafteten Drehgelenk:

$$F_{12}(\tilde{t}) = \frac{12 cs}{\tau^2} \left[1 + \frac{\omega t}{\tau} + \left(\frac{\tau}{2} - \frac{1}{\tau} \right) \sin \omega \tilde{t} - \cos \omega \tilde{t} \right]. \quad (26)$$

Aus der notwendigen Bedingung ($\dot{F}_{12}(\tilde{t}_m) = 0$) und der hinreichenden Bedingung für ein Maximum ($\ddot{F}_{12}(\tilde{t}_m) < 0$) ergibt sich nach kurzer Rechnung die maximale Gelenkkraft:

$$F_{12\max} = \frac{12 cs}{\tau^2} \left(\frac{1}{2} \tau + 1 + \frac{1}{\tau} \omega \tilde{t}_m \right) \quad (27a)$$

$$\text{wobei gilt: } \cos \omega \tilde{t}_m = \frac{4 - 2\tau^2 - 2\tau^3}{\tau^4 + 4} \quad (27b)$$

$$\text{und } \sin \omega \tilde{t}_m = \frac{\tau^4 - 2\tau^2 - 4\tau}{\tau^4 + 4}. \quad (27c)$$

In erster Näherung folgt aus Gleichung (27) nach einer Reihenentwicklung des Arcuscosinus für $x \approx \frac{\pi}{2}$:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x \quad (28)$$

für die maximale Gelenkkraft im spielbehafteten Drehgelenk:

$$F_{12\max} = \frac{12 cs}{\tau^2} \left[\frac{1}{2} \tau + 1 + \frac{1}{\tau} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\tau^3 + 2\tau^2 - 4}{\tau^4 + 4} \right) \right] \quad (29)$$

3. Diskussion des Parametereinflusses auf die maximale Gelenkkraft

Der Anstieg des Kraftverlaufes ($\frac{F_o}{t_o}$) ist proportional Ω^3 wegen Gleichung (1) und (8), denn:

$$\frac{F_o}{t_o} = \frac{F_o}{\varphi_o} \cdot \frac{\varphi_o}{t_o} = \frac{(m_{\varphi q, \varphi} - \frac{1}{2} m_{\varphi \varphi, q}) \Omega^2}{\varphi_o} \Omega = k_1 \cdot \Omega^3 \quad (30)$$

Damit gilt:

$$\tau = \omega t_1 = \sqrt[6]{\frac{144 c^3 s^2}{k_1^2 m \Omega^6}} \quad (31)$$

Die Kraftspitze setzt sich nach Gleichung (27) aus folgenden zwei Summanden zusammen:

$$F_{12\max} = F_{s1} + F_{s2} \quad (32)$$

$$F_{s1} = \frac{12 cs}{\tau^2} \left(1 + \frac{1}{\tau} \arccos \frac{4 - 2\tau^3 - 2\tau^2}{4 + \tau^4} \right) \quad (33)$$

$$F_{s2} = \frac{6 cs}{\tau} \sim \Omega. \quad (34)$$

Dabei entspricht F_{s1} der Gelenkkraft im starren Mechanismus. Der zusätzliche Kraftanteil durch den Spieleinfluß (F_{s2}) ist einfach proportional der Drehzahl.

Die maximale Gelenkkraft unter Berücksichtigung des Spiels berechnet sich angenähert zu:

$$F_{12\max} = c \cdot s \cdot f(\tau). \quad (35)$$

Die Funktion $f(\tau)$ ist in Bild 5 dargestellt, sie lautet:

$$f(\tau) = \frac{6}{\tau} + \frac{12}{\tau^2} + \frac{12}{\tau^3} \arccos \frac{4 - 2\tau^3 - 2\tau^2}{4 + \tau^4}. \quad (36)$$

Die maximale Stoßkraft wird also wesentlich durch den Wert der Kennzahl τ entsprechend Gleichung (31) bestimmt. Die Parameter gehen mit unterschiedlichen Potenzen ein. Den größten Einfluß hat die Drehgeschwindigkeit (Ω), den geringsten die Masse (m). Die Steigung des Kraftverlaufes (k_1) läßt sich konstruktiv nur schwer beeinflussen. Der Einfluß der Steifigkeit der Gelenkelemente und des Spiels kann nicht allein aus Bild 5 und Gleichung (31) ersehen werden, der Faktor $c \cdot s$ ist entsprechend Gleichung (35) zu beachten.

Die Anzahl der durch das Gelenkspiel bedingten Kraftspitzen entspricht nach dieser vereinfachten Theorie der Anzahl der Vorzeichenwechsel einer Gelenkkraft. Die wiederholten Stöße sind als wesentliche Lärmursache anzusehen. Die Lärmentwicklung kann nicht nur durch

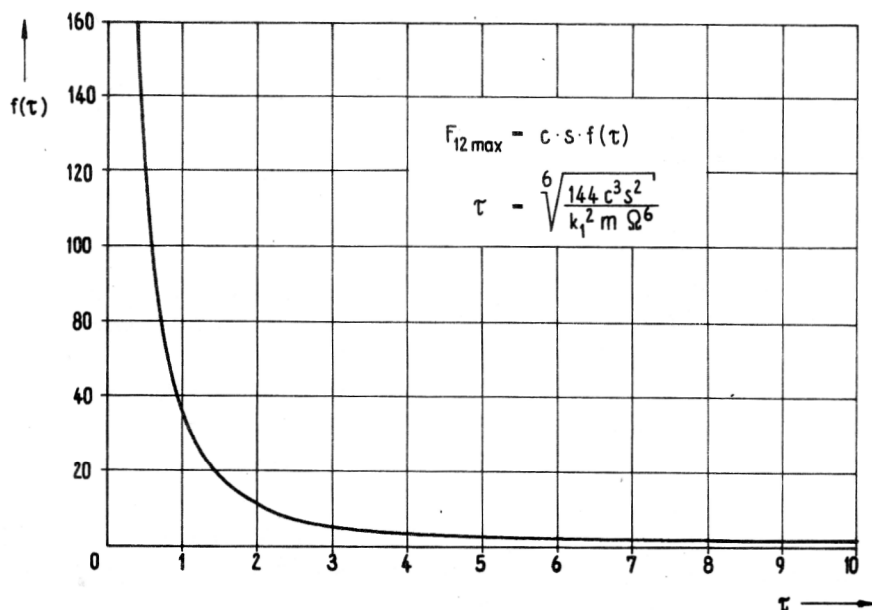


Bild 5
Darstellung der Funktion $f(\tau)$

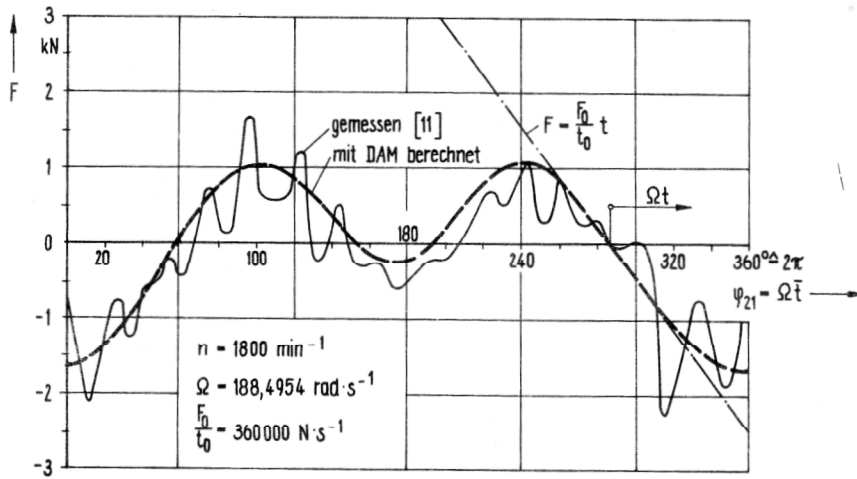


Bild 6
Zeitverläufe der Kraft
im Gelenk N (5, 6)

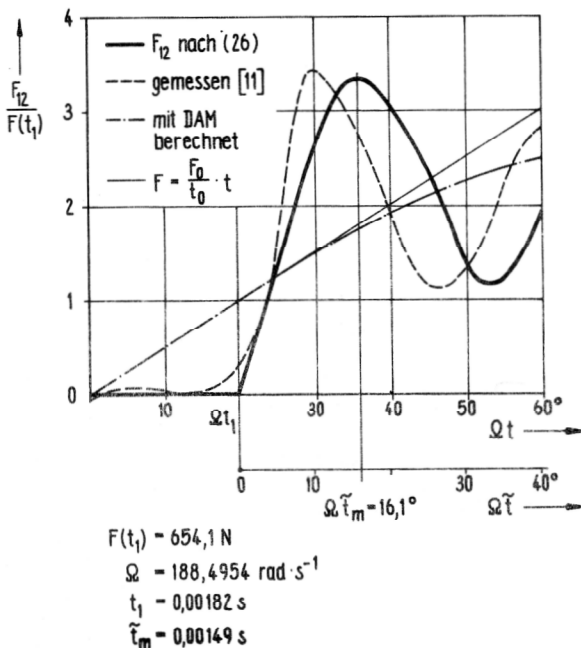


Bild 7
Vergleich von berechnetem und gemessenem Kraftverlauf

möglichst kleines Spiel vermindert werden, sondern auch durch Beeinflussung der anderen in der Kennzahl τ auftretenden Parameter.

Der Konstrukteur hat die Möglichkeit, die Anzahl der Vorzeichenwechsel und den Kraftanstieg der Gelenkkräfte zu beeinflussen. Anzustreben sind Mechanismen mit Gelenkkraftverläufen, bei denen kein abrupter Kraftrichtungswechsel auftritt.

4. Vergleich der Rechnung mit Meßergebnissen

Vor Zwirner, Helm [11] und Hertzsch [1] wurden Messungen an den spielbehafteten Koppelgetrieben einer Kettenwirkmaschine vorgenommen. Im Bild 6 sind Zeitverläufe der Kraft im Gelenk (5, 6) des Nadelantriebes dargestellt. Die Kraftspitze bei dem Winkel $\varphi_{21} \approx 320^\circ$ wurde mit der vereinfachten Theorie nachgerechnet. Folgende Parameter wurden dafür ermittelt:

$m = 3,6 \text{ kg}$ nach Gleichung (7), (17),

$c = 10^7 \text{ Nm}^{-1}$ nach Gleichung (9),

$2s = 0,0001 \text{ m}$ nach Beziehung (11) und

$\frac{F_0}{t_0} = 360000 \text{ N} \cdot \text{s}^{-1}$ nach Bild 6.

Der Kraftverlauf nach Gleichung (26) ist in Bild 7 dem gemessenen und dem am starren Mechanismus berechneten Kraftverlauf gegenübergestellt. Die Kraftspitze $F_{12\text{max}} = 2182 \text{ N}$, berechnet nach Gleichung (27), beträgt 97 % der gemessenen maximalen Gelenkkraft $F_{12\text{max}} = 2250 \text{ N}$.

Weiterhin verdeutlicht Bild 8 den Einfluß der Parameter c , m und s auf die maximale Gelenkkraft. Dafür sind die oben ermittelten Parameter verwendet. Nur der bezüglich seines Einflusses auf die Kraftspitze untersuchte Parameter wird innerhalb eines sinnvollen Intervalles variiert.

Weitere Beispiele sind in [12] enthalten und bestätigen ebenso die Brauchbarkeit der hier dargelegten vereinfachten Theorie.

5. Zusammenfassung

In diesem Beitrag werden Gelenkkräfte in schnellaufenden Koppelgetrieben mit Spiel in den Gelenken untersucht. Das Verhalten des Mechanismus mit Spiel und Elastizitäten wird mittels eines einfachen, lokal begrenzten Modelles erklärt. Der Stoßvorgang in einem Gelenk wird modelliert. Die Beschränkung auf ein in einer vorherrschenden Richtung belastetes Drehgelenk und vereinfachende Annahmen führen zu linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Es wird der Kraftverlauf unmittelbar nach einem Anlagenwechsel des Gelenkbolzens in der Lagerschale berechnet. Die vereinfachte Theorie wird durch Meßergebnisse bestätigt. Der Einfluß der Parameter Federsteifigkeit, Masse, Spiel, Kraftanstieg und Drehzahl auf die Maximalkraft wird quantitativ geklärt und eine dimensionslose Kennzahl zur Beurteilung vorgeschlagen. Aus den Beziehungen kann der Konstrukteur Maßnahmen ableiten, die zur Verringerung der Kraftspitzen und somit zur Verminderung der Schwingungen, des Lärms, des Verschleißes und der Funktionsstörungen beitragen.

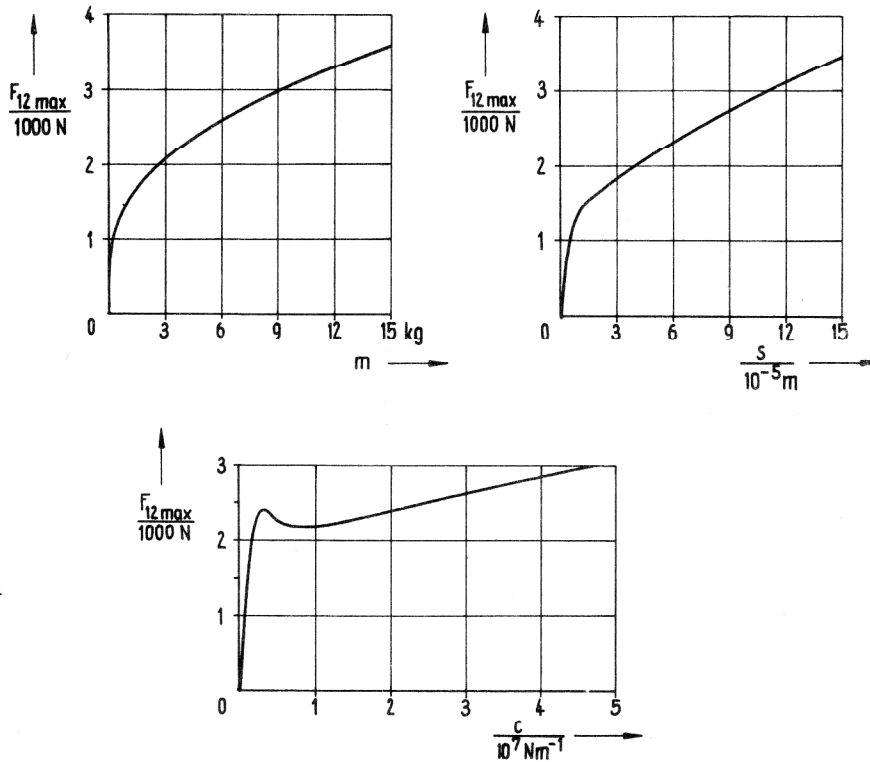


Bild 8
 Einfluß der Parameter auf die Kraftspitze im spielbehafteten Drehgelenk
 a Einfluß der Federsteifigkeit
 b Einfluß der Masse
 c Einfluß des Gelenkspiels

LITERATUR

- [1] Hertzsch, M.: Analyse dynamischer Probleme an Kettenwirkmaschinen. Textiltechnik 27 (1977) Heft 9, S. 573 – 576.
- [2] Autorenkollektiv: Getriebetechnik Koppelgetriebe. 1. Auflage, (Herausgeber: Volmer, J.) VEB Verlag Technik Berlin 1979.
- [3] Auersperg, J.: Zur Untersuchung kleiner Schwingungen in ebenen Koppelgetrieben mit mehreren Freiheitsgraden. Dissertation TH Karl-Marx-Stadt 1980.
- [4] Sergejev, V. I.; Judin, K. M.: Issledovanije dinamiki ploskich mehanizmov s sasorami izd. „Nauka“, Moskva 1974
- [5] Autorenkollektiv (Leitung: Dresig, H.): Anwenderbeschreibung zum Programm DAM (Dynamische Analyse ebener Mechanismen) Teil 1. Studienanleitung TH Karl-Marx-Stadt, Sektion MB 1979.
- [6] Autorenkollektiv (Leitung: Dresig, H.): Anwenderdokumentation KOGEOP, Teil 1. TH Karl-Marx-Stadt 1973.
- [7] Dizioglu, B.: Getriebelehre Dynamik. VEB Verlag Technik Berlin 1969.
- [8] Strümpfel, H.: Ein Beitrag zur Untersuchung der dynamischen Wirkung des Spiels in Drehgelenken ebener Koppelgetriebe unter Berücksichtigung von Reibung und Dämpfung. Diss. TH Karl-Marx-Stadt 1978.
- [9] Taschenbuch Maschinenbau, Band 1/II, 3. Auflage, VEB Verlag Technik Berlin 1975.
- [10] Fischer, U.; Stephan, W.: Mechanische Schwingungen. 1. Auflage, VEB Fachbuchverlag Leipzig 1981.
- [11] Helm, W.; Zwirner, H.-O.: Messungen an Koppelgetrieben einer Kettenwirkmaschine. Diplomarbeit TH Karl-Marx-Stadt, Sektion MB 1975.
- [12] Thümmel, T.: Dynamisch günstige Antriebe von Kettenwirkmaschinen. Diplomarbeit TH Karl-Marx-Stadt, Sektion MB 1981.

Anschrift der Verfasser:
 Prof. Dr. sc. techn. H. Dresig
 Dipl.-Ing. T. Thümmel
 Technische Hochschule
 Sektion Maschinen-Bauelemente
 9010 Karl-Marx-Stadt
 Straße der Nationen 62