

# Zur Optimierung von Ständerrobotern

B. Heimann, H. Loose, C.-D. Schmidt

## 1. Motivation

Gegenwärtig im Einsatz befindliche Industrieroboter werden in der Regel am Arbeitsort programmiert. Entsprechend der technologischen Aufgabe wird eine gewünschte Bahn durch Betätigung des Antriebes der einzelnen Roboterachsen stückweise realisiert. Die zwischen den Bahnstücken liegenden Umschaltunkte für jeden Antrieb werden in den Speicher der Steuerung eingeschrieben und dienen dann bei der automatischen Reproduktion als Zwischenziele. So entsteht das bei vielen Robotern geläufige Punkt-zu-Punkt-Fahren, wobei die Geschwindigkeit in allen Zwischenpunkten fast auf Null zurückgeht.

Die Nachteile dieser Vorgehensweise sind offenbar:

Während der Programmierungsphase stehen die Industrieroboter und alle technologisch mit ihm verketeten Geräte und Maschinen nicht für die Produktion zur Verfügung.

Bei der Programmierung werden nur eine oder wenige Roboterachsen gleichzeitig verfahren.

Optimalitätsforderungen hinsichtlich Zeit- und Energieminimierung sowie materialschonende Bewegung können auf diese Weise nicht oder nur sehr mangelhaft berücksichtigt werden.

Durch externe Programmierung auf der Grundlage vorausberechneter optimaler Steuerungs- und Bahnverläufe lassen sich diese Nachteile vermeiden. Da die Ermittlung der optimalen Steuerung dabei aber allein durch computergestützte Berechnungen erfolgen muß, d. h. ohne augenscheinliche Zwischenkontrolle der Lage des Greifers und der anderen beweglichen Elemente des Industrieroboters, kann eine Lösung des Problems nur dann den bestehenden Anforderungen genügen, wenn die mathematische Formulierung des Optimalsteuerungsproblems die realen Verhältnisse auch genügend genau widerspiegelt.

Im einzelnen sind für die mathematische Behandlung des Optimalsteuerungsproblems formalisierbare Kenntnisse notwendig über:

- a) das mathematische Modell der Roboterdynamik
- b) die Leistungsfähigkeit der Antriebe der einzelnen Achsen
- c) den Arbeitsraum des Industrieroboters
- d) die technologische Aufgabe
- e) die Güteforderungen an den zu planenden Bewegungsvorgang.

## 2. Modell

Beim Aufstellen des mathematischen Modells der Roboterdynamik ist für den Fall der Berechnung optimaler Steuerungen die dynamische Reaktion des die Lage und

Geschwindigkeit des Manipulators beschreibenden Zustandsvektors

$$\vec{x}(t)^T = (q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

auf einen bestimmten Verlauf des Vektors  $\vec{u}(t)$ , der steuerungsmäßig zu beeinflussenden Achsantriebskräfte und -momente, im folgenden Steuergrößen genannt, von Interesse.

Der praktische Entwurf des Modells kann auf folgendem Weg erfolgen:

Konstruktion eines mechanischen Modells in Form eines holonomen Starrkörpersystems mit kinematischer Baumstruktur

Aufstellung der Bewegungsgleichungen mit Hilfe einer formalen Methode (Lagrange, Hamilton)

Bestimmung der in den Gleichungen auftretenden Parameter durch Messungen am Objekt bzw. Berechnung aus den Konstruktionsdaten.

Diese Vorgehensweise führt für ein mechanisches Modell mit  $n$  Freiheitsgraden auf ein nichtlineares System von  $2n$  gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$F(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \vec{u}) = \vec{0} \text{ bzw. bei Auflösbarkeit nach den Ableitungen auf } \dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, \vec{u}).$$

Als konkretes Beispiel wurde ein Industrieroboter in Ständerausführung betrachtet, dessen kinematisches Schema in Bild 1 dargestellt ist.

Unter Vernachlässigung des Einflusses der Greiferbewegung erhält man das folgende System von Bewegungsgleichungen mit drei Freiheitsgraden:

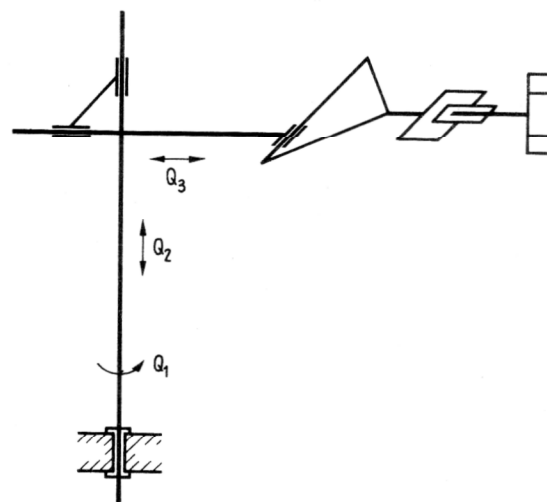


Bild 1  
 Kinematisches Schema eines Industrieroboters in Ständerausführung

$$(x_2 + x_3 q_3 + x_4 q_3^2) \ddot{q}_1 + x_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 + 2x_4 q_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 = Q_1(t)$$

$$x_4 (\ddot{q}_2 + g) = Q_2(t) \quad (1)$$

$$x_4 \ddot{q}_3 - \frac{1}{2} x_3 \dot{q}_1^2 - x_4 q_3 \dot{q}_1^2 = Q_3(t)$$

mit

$$x_1 = \frac{m_3}{3} + m_L, \quad x_2 = \Theta + l^2 x_1, \quad x_3 = -l(m_3 + 2m_L),$$

$$x_4 = m_3 + m_L$$

und  $\Theta$  = Trägheitsmoment der Drehbewegung

$l$  = Länge des Auslegers

$m_3$  = Masse der vertikal veränderbaren Teile  
(außer Greifermasse)

$m_L$  = Summe aus Last- und Greifermasse

$Q_1(t) \dots Q_3(t)$  = Achsenantriebskräfte bzw.  
-momente.

Hierbei charakterisieren  $q_1$  die Drehbewegung,  $q_2$  die Vertikalbewegung und  $q_3$  die Translationsbewegung des Roboterarms. Das Problem der Punkt-Punkt-Steuerung besteht in der Überführung des Roboters aus einer gegebenen Anfangsposition in eine gewünschte Endlage:

$$\vec{q}(0) = \vec{q}_0 = (q_{01}, q_{02}, q_{03})^T$$

$$\vec{q}(T) = \vec{q}_1 = (q_{11}, q_{12}, q_{13})^T$$

wobei  $T$  – Zeitpunkt des Erreichens der gewünschten

Position und  $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$  – Vektor der Lagekoordinaten.

Die Bahnkurve zwischen diesen Punkten wird mittels einer Optimierungsstrategie ermittelt.

### 3. Optimierung

Setzt man  $\vec{x}^T := (\vec{q}, \dot{\vec{q}})^T$ , kann die Optimalsteuerungsaufgabe in eine kanonische Form gebracht werden:

Bewegungsgleichung:

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, \vec{u}, t)$$

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0 = (\vec{q}_0, \vec{0})^T, \quad \vec{x}(1) = \vec{x}_1 = (\vec{q}_1, \vec{0})^T$$

Optimierungskriterium:

$$J(\vec{u}) = \int_0^T g(\vec{x}, \vec{u}, t) dt \rightarrow \min_{\vec{u} \in U} \quad (U - \text{Steerraum})$$

Das Kostenfunktional  $J(\vec{u})$  kann in verschiedenen Varianten auftreten:

a)  $g(\vec{x}, \vec{u}, t) = 1$     zeitoptimales Problem

b)  $g(\vec{x}, \vec{u}, t) = \vec{u}^T R \vec{u}$ ;  $R = R^T > 0$

optimal bezüglich der Steuergrößen

c)  $g(\vec{x}, \vec{u}, t) = \vec{u}^T R \vec{u} + \vec{x}^T Q \vec{x}$ ;  $Q = Q^T \geq 0$   
energieoptimal

### d) gemischtes Kriterium

Die gewöhnliche Einschränkung der Theorie der optimalen Steuerung  $\vec{u} \in U$  ( $U$  begrenzt und abgeschlossen) kann physikalisch leicht interpretiert werden und beschreibt die Begrenzung der Steuerkräfte.

Die Bewegungsmöglichkeiten des Manipulators werden natürlich nicht allein durch seine Dynamik, sondern auch durch seine konstruktive Gestaltung als räumliches Gebilde begrenzt. Alle im Rahmen des Optimalsteuerungsproblems zur Konkurrenz zugelassenen Greiferbahnen müssen also innerhalb des Bewegungsraumes  $R_B$  des Manipulators liegen. Diese anschaulich offensichtliche Tatsache darf aber bei der Aufgabenformulierung nicht außer acht gelassen werden. Innerhalb des Bewegungsraumes existieren gegebenenfalls noch verbotene Bereiche, z. B. Hindernisse, die umfahren werden müssen. Hindernisse können durch ihre spezielle geometrische Form und ihre Lage im Bewegungsraum auch Raumbereiche für den Greifer unzugänglich machen, die nicht direkt von ihnen ausgefüllt werden. So ergibt sich endlich der Arbeitsraum  $R_A$  des Manipulators als Teilmenge seines Bewegungsraumes, bzw. als Menge aller derjenigen Raumpunkte, die durch den Greifer erreichbar sind. Die mathematische Beschreibung dieser Nebenbedingung erfolgt durch ein System von Ungleichungen für die Lage des Manipulators charakterisierenden Koordinaten  $q_i$  des Zustandsvektors  $\vec{x}^T$ :  $c_1(q_i(t)) \leq 0$

Aus technischen und technologischen Gründen kann es notwendig werden, weitere Bewegungsbeschränkungen zu berücksichtigen. So darf besonders bei Transportvorgängen die Verfahrensgeschwindigkeit des Greifers nicht so groß werden, daß durch ein Anwachsen der Fliehkräfte die Haftung des transportierten Objekts gefährdet wird. Diese Geschwindigkeitsrestriktionen lassen sich wieder durch ein System von Ungleichungen erfassen, in das nun aber die den Geschwindigkeitszustand des Manipulators charakterisierenden Koordinaten  $\dot{q}_i$  eingehen:

$$c_2(\dot{q}_i(t)) \leq 0$$

Wie aus (1) ersichtlich, ist die Gleichung für die vertikale Bewegung des Manipulators nicht mit den anderen Gleichungen verkoppelt. Mehr noch, man kann diese lineare Gleichung in die folgende Standardform überführen [1]:

$$\dot{z}(t) = u(t) - g \quad \text{mit } 0 \leq t \leq T$$

Unter Beachtung der Randbedingungen

$$z(0) = \dot{z}(0) = \dot{z}(T) = 0; \quad z(T) = z_1$$

und des gemischten Optimalitätskriteriums

$$J(u) = \int_0^T [\alpha + \beta u^2(t)] dt \rightarrow \min_{|u| \leq u^0}$$

erhalten wir folgende Lösungen:

1.  $\beta > 0$

Optimale Zeit:  $T^4 = \frac{36 z_1^2 \beta}{\alpha + \beta g^2}$

$$u_{\text{opt}} = -12 \frac{z_1}{T^3} t + 6 \frac{z_1}{T^2} + g$$

2.  $\beta = 0$  (zeitoptimal)

$$\text{Optimale Zeit: } T^2 = \frac{4 u^0 |z_1|}{4 u^0 z - g^2}$$

$$u_{\text{opt}} = \begin{cases} u^0 \text{ sign } z_1 & 0 \leq t \leq t_s \\ -u^0 \text{ sign } z_1 & t_s < t \leq T \end{cases}$$

mit  $t_s$  = Schaltzeitpunkt für die bang-bang-Steuerung. Da die beiden verkoppelten Gleichungen in (1) eine geschlossene analytische Behandlung nicht zulassen, entwickeln wir nun ein Konzept zur Reduzierung des Optimalsteuerproblems auf eine Parameteroptimierung. Wir nehmen an, daß die Lösung unseres Gleichungssystems in Reihen der Art

$$q_i(t) = \varphi_0(t) + \sum_{n=1}^N a_{ni} \varphi_n(t) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (2)$$

darstellbar ist. (Das Problem wird dabei auf das geschlossene Zeitintervall  $[0,1]$  transformiert). Die Funktionen  $\varphi_0(t)$ ,  $\varphi_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) genügen den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \varphi_0(0) &= q_{0i} ; \varphi_0(1) = q_{1i} \\ \dot{\varphi}_0(0) &= 0 ; \dot{\varphi}_0(1) = 0 \quad i = 1, 3 \end{aligned}$$

und

$$\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = \dot{\varphi}_n(0) = \dot{\varphi}_n(1) = 0.$$

Die weiteren Schritte seien hier kurz angedeutet:

1. Einsetzen von (2) in die nichtlinearen Gleichungen (1), wir erhalten den Steuervektor in Abhängigkeit von  $a_{ni}$   $\vec{u} = \vec{u}(a_{ni})$
2. Reduktion auf ein Parameteroptimierungsproblem durch Einsetzen von (1) und  $\vec{u}(a_{ni})$  in das Kostenfunktional

$$\begin{aligned} \min_{\vec{u} \in U} J(\vec{u}) &\rightarrow \min_{a_{ni}} J(a_{ni}) \end{aligned}$$

### 3. Parameteroptimierung

Wir bemerken noch, daß die Substitution (2) nur die Berechnung einer suboptimalen Lösung gestattet. Da die Differentialgleichungen in (1) nicht gelöst werden müssen, arbeitet die Prozedur sehr effektiv. Begrenzungen des Zustands- und Steuertraumes können bei entsprechender Wahl der Parameteroptimierungsmethode leicht berücksichtigt werden.

## 4. Ergebnisse

Für konkrete Berechnungen wurden zunächst zwei Varianten von Approximationspolynomen benutzt:

A)  $\varphi_0(t) = q_{0i} + (q_{1i} - q_{0i})(3t^2 - 2t^3)$   
 $\varphi_n(t) = (t^2 - 2t^3 + t^4) t^{n-1} \quad n = 1, 2, \dots$  (siehe Bild 2)

B)  $\varphi_0(t) = q_{0i} + (q_{1i} - q_{0i})(3t^2 - 2t^3)$   
 $\varphi_{2n-1}(t) = t^{n+1} (1-t)^{n+1} \quad n = 1, 2, \dots$   
 $\varphi_{2n}(t) = t^{n+2} (1-t)^{n+1}$  (siehe Bild 3)

Bei einer weiteren Rechnung (Variante C) wurden kubische B-Splines benutzt [2]. Die Lösungen werden dann durch die folgende Reihe approximiert:

$$q_i(t) = \sum_{n=-1}^{N+2} a_{ni} : B_n(t) \quad , \text{ wobei}$$

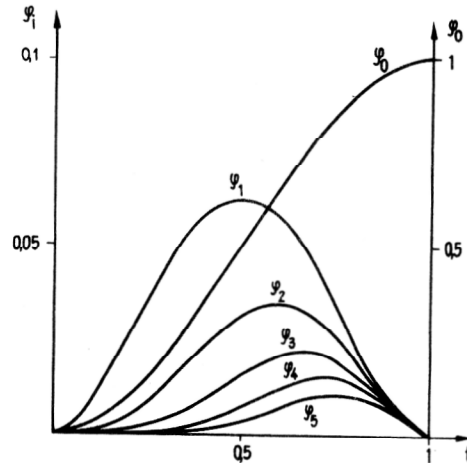


Bild 2  
Approximationspolynome  $\varphi_n$  der Variante A mit  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

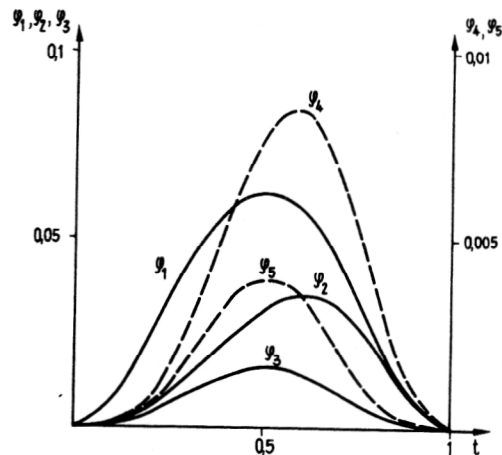


Bild 3  
Approximationspolynome  $\varphi_n$  der Variante B mit  $n = 1, 2, 3, 4, 5$

$$B_n(t) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (t-t_{i-2})^3 & t \in [t_{i-2}, t_{i-1}] \\ h^3 + 3h^2(t-t_{i-1}) + 3h(t-t_{i-1})^2 - 3(t-t_{i-1})^3 & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ h^3 + 3h^2(t_{i+1}-t) + 3h(t_{i+1}-t)^2 - 3(t_{i+1}-t)^3 & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ (t_{i+2}-t)^3 & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}] \end{cases}$$

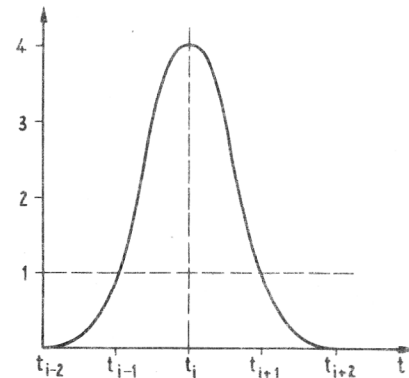
Bild 4  
Kubischer B-Spline

und  $h$  – Intervalllänge (Unterteilung äquidistant, Bild 4). Aus der Erfüllung der Randbedingungen folgen die Beziehungen:

$$a_{-1i} = a_{1i}, \quad a_{N+2,i} = a_{Ni}, \quad a_{0i} = \frac{1}{4}(q_{0i} - 2a_{1i}),$$

$$a_{N+1,i} = \frac{1}{4}(q_{1i} - 2a_{Ni})$$

Die Parameteroptimierung wurde mit einem modifizierten Nelder/Mead-Verfahren durchgeführt. Dieses Verfahren basiert auf einem Simplex-Algorithmus [3, 4]. Die Dimension des Parametervektors ist mit  $2N$  gegeben. In unseren Rechnungen wurde  $N = 1, 2, 3, 4$  und  $5$  gesetzt (Beispiele vgl. Bild 5 bis 8). Der Vergleich der erhaltenen Resultate zeigte, daß bei Benutzung der B-Splines die Rechenzeit durchschnittlich um rund 50 % gesenkt werden kann. Begrenzungen des Steuer- oder des Zustandsvektors können leicht in jedem Iterationsschritt der Simplex-Prozedur kontrolliert werden. Gegenüber dem Startvektor wurde durch die Prozedur eine wesentlich optimalere Bahnkurve ermittelt, die etwa einer zehnfachen Energieeinsparung entspricht. Demgegenüber waren die Unterschiede in den erhaltenen Minimalwerten der Kostenfunktionale in allen Beispielrechnungen gering. Die kleinsten Werte der Funktionale wurden mit Polynomen der Variante B erreicht.



#### LITERATUR

- [1] Athans, M.; Falb, P. L.: Optimale Steuerung (russ.), Isd. Masinstro'enie, Moskva, 1968.
- [2] Prenter, P. M.: Splines and variational methods. John Wiley and Sons, New York, 1975.
- [3] Nelder, J. A.; Mead, R.: A simplex method for function minimization. Computer Journal 7 (1965), S. 308 – 313.
- [4] Ehlert, J.: Zur Konvergenz von Simplexmethoden. Preprint P 27/80, AdW d. DDR, ZIMM.
- [5] Heimann, B.; Loose, H.; Schuster, G.: Contribution to optimal control of an industrial robot. Proceedings of 4<sup>th</sup> CISM-IFTOMM Symposium on Theory and Practice of Robots and Manipulators, Zaborow, 8 – 12 September 1981, S. 211 – 219.

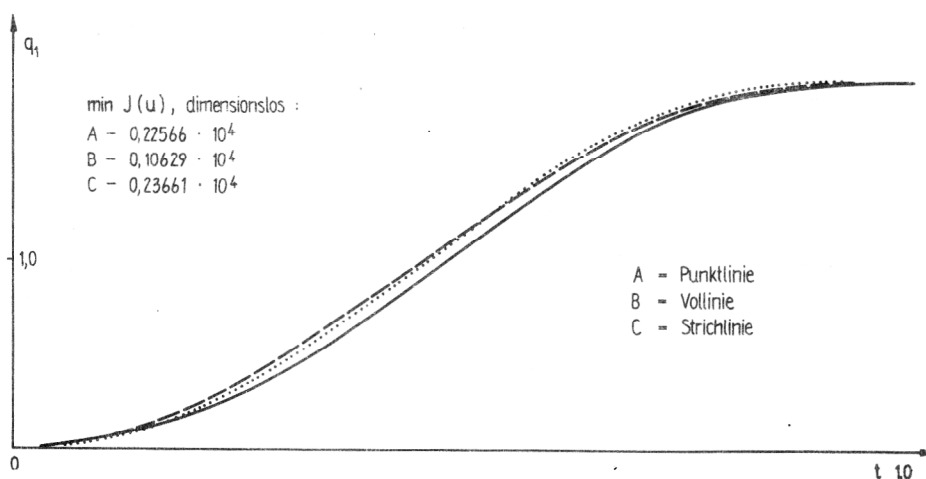


Bild 5  
Vergleich der optimalen Drehwinkelkurven der Varianten A ( $N = 5$ ), B ( $N = 5$ ) und C ( $N = 3$ ) bei identischen Startvektoren (alle Koeffizienten bei  $q_1$  sind gleich 1, bei  $q_3$  gleich 0,5). Auf die gleichen Beispielrechnungen beziehen sich auch die folgenden Bilder.

Anschrift des Verfassers:  
Dr. sc. B. Heimann  
Akademie der Wissenschaften der DDR,  
Institut für Mechanik  
1105 Berlin, Neukirchstraße 62

