TECHNISCHE MECHANIK 3 (1982) Heft 1
Manuskripteingang: 12. 10. 1981

Zur Behandlung dünnwandig geschlossener Konstruktionen mit einer verallgemeinerten halbmomentenfreien Schalentheorie nach Wlassow

Wolfgang Kissing

1. Einleitung

Dünnwandige geschlossene Konstruktionen besitzen in Gestalt ein- und mehrzelliger Kastenträger große Verbreitung in der Fördertechnik, dem Bauwesen und dem Schiffbau. Ihre Behandlung mit analytischen Berechnungsmodellen besitzt trotz vorhandener leistungsfähiger numerischer Berechnungsverfahren nach wie vor Bedeutung. Dies ist besonders dann der Fall, wenn Aussagen über das Gesamtverhalten einer Konstruktion erforderlich sind, für die ein regelmäßiger Aufbau vorausgesetzt und der Einfluß konstruktiver Details hierbei vernachlässigt werden kann.

Im folgenden wird das Berechnungsmodell der halbmomentfreien Schale nach Wlassow in einer verallgemeinerten Form vorgestellt, die sowohl die Berücksichtigung der sonst bei Wlassow [1] vernachlässigten Querdehnungen in den Wandscheiben sowie die Behandlung auch stationärer Temperaturlastfälle ermöglicht.

2. Voraussetzungen

Ausgangspunkt ist ein Schalenmodell nach Bild 1. In der Schale, die aus ebenen Wandelementen besteht, werden die Längsbiege- und Torsionsmomente gegenüber den Querbiegemomenten vernachlässigt. σ_z und τ_{zs} sind damit gleichmäßig, und σ_s linear über δ verteilt. Neben den Schubverformungen der Mittelfläche und den Längsdehnungen werden hier auch die Querdehnungen in den Wandelementen einbezogen. Für die äußeren Belastungen wird angenommen, daß sie nur in den Ebenen der Wandelemente wirken. Das stationäre Temperaturfeld wird als Differenzfeld gegenüber einem spannungslosen Ausgangszustand verstanden. Die Temperaturen sollen über die Wanddicke gleichmäßig verteilt sein. Zur Beschreibung der Längs- und Querdeformationen u und v der Mittelfläche werden nach Wlassow [1] endliche Reihen von Produktansätzen der Form

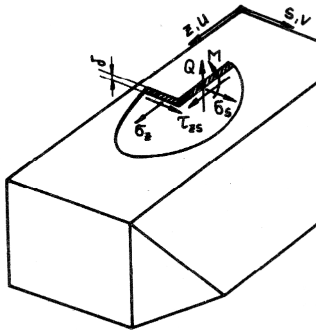

Bild 1

$$u(z,s) = \sum_{i=1}^{m} U_i(z) \cdot \varphi_i(s) \, ;$$
$$v(z,s) = \sum_{k=1}^{n} V_k(z) \cdot \psi_k(s) \qquad (1)$$

eingeführt. Die $\varphi_i(s)$ und $\psi_k(s)$ sind dabei die verallgemeinerten Koordinaten der Längs- und der Querverschiebungen, $U_i(z)$ und $V_k(z)$ die zugehörigen verallgemeinerten Längs- bzw. Querverschiebungen. Bei Annahme zwischen den Kanten linear verlaufender Längsverschiebungen lassen sich genau so viel unabhängige verallgemeinerte Koordinaten φ_i definieren, wie der Querschnitt Kanten aufweist. Zur Darstellung allgemeinerer Verschiebungsgesetze erhöht sich die Anzahl der Freiheitsgrade m entsprechend. Mit den verallgemeinerten Koordinaten ψ_k werden sowohl die den Freiheitsgraden des Querrahmenmechanismus (Gelenksystem eines Abschnittes $dz = 1$) entsprechenden Querverschiebungen als auch die Querdehnungen der Wandelemente beschrieben. Bei konstanten Ansätzen für die Querdehnungen wird damit die Anzahl der Freiheitsgrade n gleich der doppelten Kantenzahl, liegt für allgemeinere Dehnungsansätze jedoch entsprechend darüber.

3. Elastisches Potential der halbmomentenfreien Schale

Für den ebenen Spannungszustand gilt unter Einbeziehung der thermischen Dehnungen

$$\epsilon_z = \epsilon_{z\,el} + \alpha_t T = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_s) + \alpha_t T$$
$$\epsilon_s = \epsilon_{s\,el} + \alpha_t T = \frac{1}{E}(\sigma_s - \nu\sigma_z) + \alpha_t T \qquad (2)$$
$$\gamma_{zs} = \gamma_{zs\,el} = \frac{1}{G}\tau_{zs} = \frac{2(1+\nu)}{E} \circ \tau_{zs}$$

und die Umstellung nach den Spannungen ergibt

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\nu^2}[\epsilon_z + \nu\epsilon_s - (1+\nu)\alpha_t T]$$
$$\sigma_s = \frac{E}{1-\nu^2}[\epsilon_s + \nu\epsilon_z - (1+\nu)\alpha_t T] \qquad (3)$$
$$\tau_{zs} = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \gamma_{zs}$$

Berücksichtigt man, daß die Normalspannungen nur längs der elastischen Dehnungen Formänderungsenergie speichern, erhält man für die Formänderungsenergie des Membranspannungszustandes der Mittelfläche

$$
\begin{aligned}
W^*_{im} &= \frac{1}{2}(\sigma_z \epsilon_{zel.} + \sigma_{sm}\epsilon_{smel.} + \tau_{zs}\gamma_{zs}) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_z^2 + \epsilon_{sm}^2 + 2\nu\epsilon_z\epsilon_{sm}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2E}{1-\nu}\alpha_t T(\epsilon_z + \epsilon_{sm} - \alpha_t T) + \frac{E}{2(1+\nu)}\cdot\gamma_{zs}^2\right] \\
W_{im} &= \int\limits_{(v)} W^*_{im}\, dV = \int\limits_{(l)}\oint W^*_{im}\,\delta\, ds\, dz
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Die Formänderungsenergie der Querbiegemomente wird wegen der vernachlässigten Längsbiegemomente ($\sigma_{bz} = 0$)

$$
W_{ib} = \frac{1}{2}\int\limits_{(l)}\oint \frac{M^2}{EI}\, ds\, dz \tag{5}
$$

Unter M ist dabei das auf die Längeneinheit bezogene Querbiegemoment zu verstehen. Entsprechend ist $I = \delta^3/12$ bzw. bei vorhandenen Querversteifungen $I = I'/b$ mit I' als Trägheitsmoment eines Querstreifens der Breite b einschließlich der in b enthaltenen Versteifungen.

Mit $p(z,s)$ und $q(z,s)$ als verteilter äußerer Längs- und Querbelastung wird hiernach für das elastische Potential

$$
\Pi = W_i - W_a = W_{im} + W_{ib} - W_a
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi = \int\limits_{(l)}\oint \Bigg[\Bigg\{ &\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial s}\right] \\
&- \frac{E}{1-\nu}\alpha_t T\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial s} - \alpha_t T\right] \\
&+ \frac{E}{4(1+\nu)}\left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\Bigg\}\delta + \frac{1}{2}\cdot\frac{M^2}{EI} \\
&- pu - qv\Bigg]\, ds\, dz
\end{aligned}
\tag{6}
$$

und nach Einsetzen der Produktansätze (1) sowie von

$$
M = \sum_{k=1}^{n} V_k(z)\circ M_k(s) \tag{7}
$$

mit $M_k(s)$ als Momentenverlauf im elementaren Querrahmen infolge $V_k = 1$ erhalten:

$$
\begin{aligned}
\Pi = \int\limits_{(l)}\oint \Bigg[\Bigg\{ &\frac{E}{2(1-\nu^2)}\cdot\Bigg[\left(\sum_{i=1}^{m} U_i'\varphi_i\right)^2 + \\
&+\left(\sum_{k=1}^{n} V_k\psi_k'\right)^2 + 2\nu\sum_{i=1}^{m} U_i'\varphi_i\cdot \\
&\cdot\sum_{k=1}^{n} V_k\psi_k'\Bigg] - \frac{E}{1-\nu}\alpha_t T\Bigg[\sum_{i=1}^{m} U_i'\varphi_i \\
&+ \sum_{k=1}^{n} V_k\psi_k' - \alpha_t T\Bigg] + \frac{E}{4(1+\nu)} \\
&\cdot\left(\sum_{i=1}^{m} U_i\varphi_i' + \sum_{k=1}^{n} V_k'\psi_k\right)^2\Bigg\}\delta \\
&+ \frac{1}{2EI}\left(\sum_{k=1}^{n} V_k M_k\right)^2 - p\cdot\sum_{i=1}^{m} U_i\varphi_i \\
&- q\sum_{k=1}^{n} V_k\psi_k\Bigg]\, ds\, dz
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Das in [2] für die halbmomentenfreie Schale angegebene elastische Potential weicht in den thermischen Anteilen von (8) ab, da dort die Formänderungsenergie mit den Gesamtdehnungen und nicht allein mit den elastischen Dehnungsanteilen ermittelt wird.

4. Variationsproblem und DGl.-System

Das Prinzip vom Minimum des elastischen Potentials führt auf das Variationsproblem

$$
\Pi = \int\limits_{(l)} F(z, U_j, U_j', V_h, V_h')\, dz \Longrightarrow \text{Min.} \tag{9}
$$

Die insgesamt m + n Eulerschen DGln. des Variationsproblem

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial U_j} - \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial F}{\partial U_j'}\right) &= 0 \qquad j = 1, \ldots, m \\
\frac{\partial F}{\partial V_h} - \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial F}{\partial V_h'}\right) &= 0 \qquad h = 1, \ldots, n
\end{aligned}
\tag{10}
$$

ergeben das DGl.-System

$$
\begin{aligned}
&2(1+\nu)\left[\sum_{i=1}^{m} U_i''\oint\varphi_i\varphi_j\,\delta\, ds\right. \\
&\left.+\nu\sum_{k=1}^{n} V_k'\oint\psi_k'\varphi_j\,\delta\, ds\right] \\
&-(1-\nu^2)\left[\sum_{i=1}^{m} U_i\oint\varphi_i'\varphi_j'\,\delta\, ds\right. \\
&\left.+\sum_{k=1}^{n} V_k'\oint\psi_k\varphi_j'\,\delta\, ds\right] + \frac{2(1+\nu)(1-\nu^2)}{E}\oint p\,\varphi_j
\end{aligned}
$$

$$- 2(1+\nu)^2 \alpha_t \oint \frac{\partial T}{\partial z} \varphi_j \, \delta \, ds = 0$$

$$j = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} U_i' \oint \varphi_i' \psi_h \, \delta \, ds + \sum_{k=1}^{n} V_k'' \oint \psi_k \psi_h \, \delta \, ds$$

$$- \frac{2}{1-\nu} \left[\sum_{k=1}^{n} V_k \oint \psi_k' \psi_h' \, \delta \, ds \right.$$

$$\left. + \nu \sum_{i=1}^{m} U_i' \oint \varphi_i \psi_h' \, \delta \, ds \right]$$

$$+ \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \alpha_t \oint T \cdot \psi_h' \, \delta \, ds$$

$$- 2(1+\nu) \sum_{k=1}^{n} V_k \cdot \frac{1}{E} \oint \frac{M_k M_h}{EI} \, ds$$

$$+ \frac{2(1+\nu)}{E} \oint q \, \psi_h \, ds = 0 \tag{11}$$

$$h = 1, \ldots, n$$

mit den natürlichen Randbedingungen:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial U_j'} \right|_o^l = 0 \qquad \left. \frac{\partial F}{\partial V_h'} \right|_o^l = 0 \tag{12}$$

Werden in (11) die Querdehnungen in den Wandelementen wieder vernachlässigt, dann sind sowohl alle $\psi_k' = 0$ und auch $\nu = 0$ zu setzen. Das dann entstehende DGl.-System

$$2 \sum_{i=1}^{m} U_i'' \oint \varphi_i \varphi_j \, \delta \, ds - \sum_{i=1}^{m} U_i \oint \varphi_i' \varphi_j' \, \delta \, ds -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} V_k' \oint \psi_k \varphi_j' \, \delta \, ds + \frac{2}{E} \oint p \, \varphi_j \, ds -$$

$$- 2\alpha_t \oint \frac{\partial T}{\partial z} \varphi_j \, \delta \, ds = 0$$

$$j = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} U_i' \oint \varphi_i' \psi_h \, \delta \, ds + \sum_{k=1}^{n} V_k'' \oint \psi_k \psi_h \, \delta \, ds -$$

$$-2 \sum_{k=1}^{n} V_k \frac{1}{E} \oint \frac{M_k M_h}{EI} \, ds + \frac{2}{E} \oint q \, \psi_h \, ds = 0 \tag{13}$$

$$h = 1, \ldots, n$$

entspricht bis auf den Umstand, daß hier durch das Nullsetzen der Querkontraktionszahl konsequenterweise $E/G = 2$ wird, dem von Wlassow in [1] angegebenen DGl.-System.

Definiert man die folgenden Querschnittsgrößen und verallgemeinerten Belastungen

$$a_{ji} = \oint \varphi_j \varphi_i \, \delta \, ds \, ; \quad b_{ji} = \oint \varphi_j' \varphi_i' \, \delta \, ds \, ;$$

$$c_{jk} = \oint \varphi_j' \psi_k \, \delta \, ds \, ; \quad d_{jk} = \oint \varphi_j \psi_k' \, \delta \, ds \, ;$$

$$e_{hi} = \oint \psi_h \varphi_i' \, \delta \, ds \, ; \quad f_{hi} = \oint \psi_h' \varphi_i \, \delta \, ds \, ;$$

$$r_{hk} = \oint \psi_h \psi_k \, \delta \, ds \, ; \qquad h_{hk} = \oint \psi_h' \psi_k' \, \delta \, ds \, ;$$

$$s_{hk} = \frac{1}{E} \oint \frac{M_h M_k}{EI} \, ds \tag{14}$$

$$p_j = \oint p \, \varphi_j \, ds \, ; \qquad p_j^* = p_j - \frac{E\alpha_t}{1-\nu} \oint \frac{\partial T}{\partial z} \varphi_j \, \delta \, ds$$

$$q_h = \oint q \, \psi_h \, ds \, ; \qquad q_h^* = q_h + \frac{E\alpha_t}{1-\nu} \oint T \, \psi_h' \, \delta \, ds$$

dann erhält man für (11) die vereinfachte Schreibweise.

$$\sum_{i=1}^{m} \left(U_i'' a_{ji} - U_i \frac{1-\nu}{2} b_{ji}\right) + \sum_{k=1}^{n} V_k' \left(\nu d_{jk} - \frac{1-\nu}{2} c_{jk}\right)$$

$$+ \frac{1-\nu^2}{E} p_j^* = 0 \qquad j = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} U_i' \left(\frac{1-\nu}{2} e_{hi} - \nu f_{hi}\right) + \sum_{k=1}^{n} \left[V_k'' \frac{1-\nu}{2} r_{hk}\right.$$

$$\left. - V_k \left[\left(h_{hk} + (1-\nu^2) \, s_{hk}\right)\right]\right] + \frac{1-\nu^2}{E} q_h^* = 0 \tag{15}$$

$$h = 1, \ldots, n$$

Die natürlichen Randbedingungen (12) führen auf die Definition der verallgemeinerten Längs- und Querkräfte

$$P_j(z) = \oint \sigma_z \varphi_j \, \delta \, ds = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\sum_{i=1}^{m} U_i' a_{ji} + \nu \sum_{k=1}^{n} V_k d_{jk} \right]$$

$$- \frac{E\alpha_t}{1-\nu} \oint T \varphi_i \, \delta \, ds$$

$$Q_h(z) = \oint \tau_{zs} \psi_h \, \delta \, ds = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\sum_{i=1}^{m} U_i e_{hi} \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} V_k' r_{hk} \right] \tag{16}$$

die dann an dem Schalenende mit statischen Randbedingungen verschwinden müssen.

Für die Spannungen in der Mittelfläche gelten die mit (1) aus (3) leicht ableitbaren Beziehungen

$$\sigma_z(z,s) = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\sum_{i=1}^{m} U_i' \varphi_i + \nu \sum_{k=1}^{n} V_k \psi_k'\right]$$

$$- \frac{E}{1-\nu} \alpha_t T(z,s)$$

$$\sigma_{sm}(z,s) = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\nu \sum_{i=1}^{m} U_i' \varphi_i + \sum_{k=1}^{n} V_k \psi_k'\right]$$

$$- \frac{E}{1-\nu} \alpha_t T(z,s)$$

$$\tau_{zs}(z,s) = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\sum_{i=1}^{m} U_i \varphi_i' + \sum_{k=1}^{n} V_k' \psi_k\right] \qquad (17)$$

Den Spannungen σ_{sm} sind noch die Biegespannungen σ_{sb} aus den Querbiegemomenten zu überlagern.
Ihre Größtwerte betragen

$$\sigma_{sb\,max} = \pm \frac{M \cdot \delta}{2I} \qquad (18)$$

5. Zusammenfassung

Prismatische dünnwandige ein- und mehrzellige Kastenträger können mit dem Berechnungsmodell der verallgemeinerten halbmomentenfreien Schale behandelt werden. Die Querdehnungen in den Wänden finden dabei Berücksichtigung. Auch ist die Untersuchung stationärer Temperaturlastfälle hiermit möglich.
Durch die Auswahl der verallgemeinerten Koordinaten der Längs- und Querverschiebungen werden einerseits die Verformungsmöglichkeiten qualitativ bestimmt und andererseits die Struktur des entstehenden DGl.-Systems festgelegt. Es ist zweckmäßig, vollorthogonale verallgemeinerte Koordinaten zu verwenden und damit mögliche Entkopplungen im DGl.-System zu erreichen.
Durch Anwendung der Methode der Anfangsparameter lassen sich querschnittsspezifisch allgemeine Lösungen angeben. Auf der Grundlage dieser Methode ist auch die Einbeziehung starrer Querschotte in den zu untersuchenden Kastenträgern in einfacher Weise möglich. Bei längeren Kastenträgern führt jedoch gerade die Methode der Anfangsparameter leicht zu numerisch instabilen Lösungen, denen dann im konkreten Fall durch andere Verfahren zu begegnen ist.

LITERATUR

[1] Wlassow, W. S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Akademie Verlag Berlin 1958.

[2] Obraszow, I. F.: Variacionnye metody rasceta tonkostennych aviacionnych konstrukcij. Izd. Masinostroenie Moskva 1966

Anschrift des Verfassers:
Doz. Dr.-Ing. Wolfgang Kissing
Ingenieurhochschule, Sektion
Technologie des Maschinenbaues
2400 Wismar, Philipp-Müller-Straße