

# Modellierung und Berechnung turbulenter Strömungen und Anwendungen in der Technik

## Teil 2: Formulierung der Randbedingung

G. Naue, J. Kohlmann, W. Schmidt, R. Scholz, P. Wolf

### 1. Einleitung

Im ersten Teil unserer Artikelreihe [1] wurden zwei Wege zur Modellierung turbulenter Strömungsprozesse vorgestellt. Bei der Arbeitsmethode, die auf symmetrischen Ansätzen für die turbulente Schubspannung basiert, ist der Schwerpunkt der Modellierung auf die Bestimmung der turbulenten Transportkoeffizienten, speziell der Turbulenzviskosität, gerichtet. Durch die Anwendung von 2-Parameter-Modellen zur Berechnung der Turbulenzviskosität konnten auch Rezirkulationsströmungen erfolgreich berechnet werden. Insbesondere die Modelle mit den Turbulenzparametern Turbulenzenergie ( $k$ ) und Dissipationsrate ( $\epsilon$ ) beziehungsweise Turbulenzenergie und Turbulenzcharakteristik ( $W$ ) [2], [3] wurden in einer Vielzahl von Arbeiten mit guten Ergebnissen verwendet.

Wird für die Gesamtspannung in der Impulsgleichung ein unsymmetrischer Tensor verwendet, so tritt neben der Geschwindigkeit eine weitere kinematische Variable, der Spin  $\beta_k$  auf, die vektoriellen Charakter besitzt. Der Spin charakterisiert die mittlere Drehung der Turbulenzelemente. Aus ihm werden Nichtdiagonalelemente des Tensors der Reynoldsschen Scheinspannungen berechnet. Der Impulsmomentensatz besitzt bei dieser Modellierung besondere Bedeutung, da aus ihm der Spin ermittelt wird.

Im Ergebnis beider Wege der Modellierung erhielten wir Gleichungssysteme, in denen alle Gleichungen mit Ausnahme der Kontinuitätsgleichung vom elliptischen Typ sind. Folglich müssen für alle Variablen auf allen Rändern des betrachteten Lösungsgebietes Randbedingungen formuliert werden. Bei der Berechnung turbulenter Strömungen erfordert die Formulierung der Randbedingungen an festen Berandungen des Strömungsgebietes die Ableitung spezieller Modelle.

### 2. Formulierung der allgemeinen Transportgleichung

Die Anwendung der Turbulenzmodelle soll auf stationäre, zweidimensionale ebene bzw. rotationssymmetrische Probleme erfolgen. Eine analytische Lösung der vollständigen Modellgleichungen zur Beschreibung turbulenter Strömungen ist nur für Spezialfälle möglich. Im allgemeinen muß das gekoppelte Differentialgleichungssystem numerisch gelöst werden.

Zur Integration von Feldproblemen der Strömungsmechanik werden meist Differenzenverfahren verwendet, die die Berechnung der Funktionswerte in diskreten

Punkten des Strömungsgebietes ermöglichen. Für die Lösung unserer Aufgaben verwendeten wir das von Gosman u. a. [4] beschriebene Differenzenverfahren.

Dazu war es notwendig, die Grundvariablen des zweidimensionalen Strömungsproblems, die Geschwindigkeiten  $\bar{v}_1$  und  $\bar{v}_2$  und den Druck  $\bar{p}$ , durch die Variablen Wirbelstärke  $\omega$  und Stromfunktion  $\psi$  zu ersetzen. Die Stromfunktion ist so definiert, daß sie die Kontinuitätsgleichung integriert. Für eine inkompressible Strömung gilt für kartesische Koordinaten

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (1)$$

Die Wirbelstärke wird als Rotation des Geschwindigkeitsfeldes multipliziert mit dem Faktor 2 definiert. Bei der zweidimensionalen Strömung besitzt der Vektor der Wirbelstärke nur die Komponente senkrecht auf der Ebene der beiden Geschwindigkeitsvektoren. In kartesischen Koordinaten gilt

$$\omega = \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \quad (2)$$

Durch die Anwendung des Rotoroperators auf die Impulsgleichung erhält man die Wirbeltransportgleichung, die Berechnungsgleichung für die Wirbelstärke. Dabei wird der Druck als abhängige Variable aus dem Gleichungssystem eliminiert, was sich günstig auf die Konvergenzgeschwindigkeit der numerischen Lösung auswirkt. Der Druckgradient, der bei der Lösung des Strömungsproblems in den natürlichen Variablen  $\bar{v}_1$ ,  $\bar{v}_2$ ,  $\bar{p}$  als Quellterm in der Impulsgleichung enthalten ist, bereitet bei der numerischen Berechnung erhebliche Schwierigkeiten, da er die Triebkraft des Strömungsprozesses ist und numerische Fehler sich als starke Beschleunigungseffekte auf die Strömung auswirken. Zur Erzielung der Konvergenz des numerischen Lösungsverfahrens muß eine ständige Korrektur des Geschwindigkeitsfeldes derart erfolgen, daß der Massenerhaltungssatz erfüllt ist. Eine weitere Schwierigkeit bei der Druckberechnung besteht in der Festlegung des Druckes entlang fester Begrenzungswände.

Andererseits bereitet die Formulierung von Randbedingungen für die Wirbelstärke an festen Wänden ebenfalls Schwierigkeiten, da hierzu die Kenntnis des Geschwindigkeitsfeldes vorliegen müßte.

Die Stromfunktion wird aus einer Poissongleichung berechnet, die man durch das Einsetzen der Definitionsgleichungen (1) in die Gleichung (2) erhält.

Der wesentliche Vorteil bei der Verwendung der Stromfunktion als abhängige Variable ist in der steten Erfüllung der Massenbilanz zu sehen. Die Notwendigkeit der Vorgabe des Volumenstromes zur Bestimmung der Randwerte für die Stromfunktion stellt eine Einschränkung dar und ermöglicht keine Berechnung von Strömungen, die durch einen vorgegebenen Druckgradienten realisiert werden. Außerdem muß das interessierende Geschwindigkeitsfeld durch numerische Differentiation der Stromfunktion gewonnen werden, wodurch ein zusätzlicher numerischer Fehler verursacht wird. Dies kann sich insbesondere auf die Genauigkeit der Berechnung der Produktionsterme für die Turbulenzparameter Turbulenzenergie, Dissipationsrate und Turbulenzcharakteristik (vergl. Tabelle 1 und 3) an Orten mit großen Krümmungen im Geschwindigkeitsfeld auswirken.

Bei der Rechnung in den Variablen Wirbelstärke und Stromfunktion wird das Gleichungssystem um eine Gleichung reduziert. Alle Variablen können durch einen einheitlichen Gleichungstyp beschrieben werden. Diese allgemeine Gleichung lautet in kartesischen Koordinaten

$$a \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ b \frac{\partial(c\varphi)}{\partial x_1} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ b \frac{\partial(c\varphi)}{\partial x_2} \right\} + d = 0 \quad (3)$$

und in zylindrischen Koordinaten

$$a \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ br \frac{\partial(c\varphi)}{\partial z} \right\} - \frac{\partial}{\partial r} \left\{ br \frac{\partial(c\varphi)}{\partial r} \right\} + rd = 0 \quad (4)$$

Die Koeffizienten der allgemeinen Transportgleichungen (3) und (4) können den Tabellen 1, 2 und 3 entnommen werden.

Tabelle 1

Koeffizienten der allgemeinen Transportgleichung (3) für das Turbulenzmodell mit symmetrischen Spannungsansätzen für inkompressible Strömung

| $\varphi$   | a | b                                       | c             | d  |
|---|---|---|---------------|--|
| $\psi$  | 0 | 1                                       | 1             | $-\omega$  |
| $\omega$  | 1 | 1                                       | $\nu + \nu_t$ | $-g\beta\nu \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}$   |
| k   | 1 | $\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}$          | 1             | $-\nu_t G + \epsilon - g\beta\nu \frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_2}$   |
| $\epsilon$  | 1 | $\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon}$   | 1             | $-c_1 \frac{\epsilon}{k} \nu_t G + c_2 \frac{\epsilon^2}{k} - c_3 \frac{\epsilon}{k} g\beta\nu \frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_2}$ |
| $\bar{T}$   | 1 | $\frac{\nu}{Pr_r} + \frac{\nu_t}{Pr_t}$ | 1             | 0  |
| $\bar{c}$   | 1 | $\frac{\nu}{Sc} + \frac{\nu_t}{Sc_t}$   | 1             | 0  |
| $G = 2 \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v_z}{\partial x_1} + \frac{\partial v_z}{\partial x_2} \right)^2$ |   |   |               |  |

Tabelle 2

Koeffizienten der allgemeinen Transportgleichung (3) für das Turbulenzmodell mit unsymmetrischen Spannungsansätzen für inkompressible Strömung

| $\varphi$     | a | b                     | c                          | d   |
|---------------|---|-----------------------|----------------------------|---|
| $\psi$        | 0 | 1                     | 1                          | $-\omega$   |
| $\omega$      | 1 | 1                     | $\frac{\alpha}{\vartheta}$ | $-\frac{b}{\vartheta} \left( \frac{\partial^2 \bar{\beta}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{\beta}}{\partial x_2^2} \right) - g\beta\nu \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1}$ |
| $\bar{\beta}$ | 1 | $\frac{c}{\vartheta}$ | 1                          | $-\bar{M} + 4b\bar{\beta}$  |

Tabelle 3

Koeffizienten der allgemeinen Transportgleichung (4) für das Turbulenzmodell mit symmetrischen Spannungsansätzen für Strömungen mit veränderlicher Dichte

| $\varphi$   | a     | b   | c               | d  |
|---|-------|---|-----------------|--|
| $\psi$  | 0     | $\frac{1}{\vartheta r^2}$                 | 1               | $-\frac{\omega}{r}$  |
| $\frac{\omega}{r}$  | $r^2$ | $r^2$                                     | $\eta + \eta_t$ | $-r \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_z^2 + v_r^2}{2} \right) \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_z^2 + v_r^2}{2} \right) \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial z} \right] - \frac{\partial(\bar{\beta} v_z^2)}{\partial z}$ |
| $r v_\theta$  | 1     | $r^2(\eta + \eta_t)$                      | $\frac{1}{r^2}$ | 0  |
| k   | 1     | $\eta + \frac{\eta_t}{\sigma_k}$          | 1               | $-\eta_t G + c_D \bar{\beta} k W^{1/2}$  |
| W   | 1     | $\eta + \frac{\eta_t}{\sigma_W}$          | 1               | $-c_1 \eta_t \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r\omega)}{\partial r} \right)^2 \right] - c_3 \frac{W}{k} \eta_t G + c_2 \bar{\beta} W^{\frac{3}{2}}$  |
| h   | 1     | $\frac{\eta}{Pr_r} + \frac{\eta_t}{Pr_t}$ | 1               | $-\bar{Q}$   |
| c   | 1     | $\frac{\eta}{Sc} + \frac{\eta_t}{Sc_t}$   | 1               | $-\bar{J}$   |
| $G = 2 \left[ \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 + \left[ r \frac{\partial(v_\theta/r)}{\partial z} \right]^2 + \left[ r \frac{\partial(v_\theta/r)}{\partial r} \right]^2$ |       |   |                 |  |

In den Tabellen 1 und 2 werden in den Quelltermen der Wirbeltransportgleichung die Kräfte infolge thermischer Auftriebs berücksichtigt. Die Modellierung erfolgte nach der Boussinesqvereinfachung für Strömungen mit geringen Dichteänderungen.

In der Tabelle 3 sind die Koeffizienten für eine kompressible Strömung in Zylinderkoordinaten angegeben. Die Definitionen von Stromfunktion und Wirbelstärke sind hier

$$v_z = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_r = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (5)$$

und

$$\omega = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}. \quad (6)$$

Das „tank and tube“-Differenzenverfahren nach Gosman u. a. [4] wird aus der allgemeinen Differentialgleichung (3) oder (4) durch Integration über endliche Volumenelemente mit Annahmen über die Verteilung der Variablen zwischen den Knotenpunkten des orthogonalen Netzes abgeleitet. Im Ergebnis wird ein Fünf-Punkte-Differenzenschema mit Aufwind-Differenzenapproximation der Konvektionsterme erhalten. Die Lösung der

linearisierten algebraischen Gleichungssysteme erfolgt mit dem sukzessiven Über- bzw. Unterrelaxationsverfahren.

### 3. Formulierung der Randbedingungen für die Transportgleichungen

Bei der Untersuchung technischer Strömungsprozesse in Apparaten oder Räumen wird das Strömungsgebiet in den meisten Fällen von Einströmrandern, Ausströmrandern, einem Symmetrierand und festen Wänden begrenzt. Auf diesen Rändern müssen für die gesuchten Variablen Bedingungen formuliert werden, die ihr physikalisches Verhalten auf dem Rand möglichst genau beschreiben, da die Randbedingungen die Lösung der entsprechenden Transportgleichung zum Teil wesentlich beeinflussen. Der Formulierung der Randbedingung muß deshalb die gleiche Aufmerksamkeit geschenkt werden wie der Entwicklung der Turbulenzmodelle und der numerischen Lösungsmethode.

Treten in den Randbedingungen Ableitungen auf (Randbedingungen 2. oder 3. Art), so sind für diese unter der Beachtung der Konvergenz und Stabilität Differenzenapproximationen zu bilden.

#### 3.1. Einströmrand

Die Formulierung der Randbedingungen an den Einströmrandern ist für die Ausbildung der Strömung unmittelbar nach dem Rand und teilweise für die Strömung im gesamten Lösungsgebiet von entscheidender Bedeutung. So ist bekannt, daß die Form des Geschwindigkeitsprofils im Querschnitt einer plötzlichen Rohrerweiterung die Länge des Rezirkulationsgebietes beeinflusst.

Die Randbedingungen für die Wirbelstärke und die Stromfunktion werden entsprechend den Definitionsgleichungen (1), (2) bzw. (5), (6) aus der Geschwindigkeitsverteilung am Einströmrand berechnet. Geht dem Eintrittsrand eine genügend lange Anlaufstrecke voraus, so kann das Geschwindigkeitsprofil zum Beispiel mit dem Potenzgesetz der ausgebildeten turbulenten Rohr- oder Kanalströmung beschrieben werden. Durch seine Differentiation bzw. Integration erhält man analytische Beziehungen für die Wirbelstärke und Stromfunktion. Liegt das Geschwindigkeitsprofil am Einströmrand als eine Reihe von Meßwerten vor, dann ist die Verteilung der Stromfunktion durch numerische Integration zu ermitteln. Die Wirbelstärke wird nun aus der Poissongleichung für die Stromfunktion berechnet (vergl. z. B. Gleichung 3 und Tabelle 1). Die numerische Differentiation der Stromfunktion ist mit der gleichen Approximationsordnung auszuführen wie sie das verwendete Differenzenverfahren besitzt.

Die Turbulenzenergie kann aus der Verteilung für die ausgebildete turbulente Strömung [5] oder aus dem Turbulenzgrad

$$k = \frac{3}{2} Tu^2 v_1^2 \quad (7)$$

ermittelt werden.

Die Dissipationsrate und die Turbulenzcharakteristik werden aus der Turbulenzenergie und dem Turbulenzmaßstab berechnet

$$\epsilon = c_D \frac{k^{3/2}}{l} \quad (8)$$

$$W = \frac{k}{l^2} \quad (9)$$

Die Verteilung des Turbulenzmaßstabes wird aus dem Prandtlischen Mischungsweg

$$l = \sqrt{c_D} l_m \quad (10)$$

berechnet oder aus Meßwerten für den Makromäßig bereitgestellt. Der Spin kann aus der Verteilung der turbulenten Schubspannung im Einströmquerschnitt

$$\bar{\beta} = \frac{\rho}{2b} \overline{v_1' v_2'} \quad (11)$$

oder aus der analytischen Lösung der Rohr- bzw. Kanalströmung ermittelt werden [5].

Bei vielen praktischen Aufgaben ist der Einströmrand sehr viel kleiner als die Abmessungen des Strömungsgebietes. Daraus ergibt sich die Schwierigkeit, eine Gitterteilung zu finden, die das Strömungsverhalten im Einströmrand gut beschreibt, ohne daß infolge einer großen Gitterpunktzahl der numerische Aufwand unermesslich anwächst. Die bisherigen Erfahrungen zeigen außerdem, daß die Formulierung von entsprechenden Differenzformeln für das Ablösegebiet an der konvexen Ecke nur unvollständig beherrscht wird. Durch das Herausschneiden eines kleinen Gebietes nahe dem Eintritt, auf dessen vertikaler Gitterlinie  $x_{10}$  die Werte für die Strömungsgrößen, das können z. B. Meßwerte sein, vorgegeben werden, kann sowohl das Gitter effektiver geteilt als auch der Einfluß der konvexen Ecke richtig erfaßt werden. Die Berechnung der einzelnen Randwerte erfolgt entsprechend der oben aufgezeigten Vorgehensweise. Der Turbulenzmaßstab kann für den im Bild 1 gezeigten Fall eines Wandstrahls mit

$$l = 0,12 \delta_{1/2} \quad (12)$$

abgeschätzt werden.

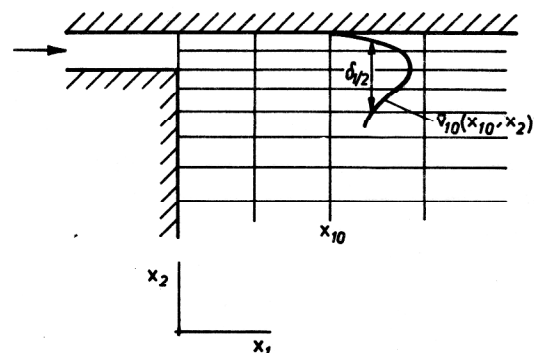


Bild 1  
Formulierung der Randbedingung an einem kleinen Einströmrand

### 3.2. Ausströmränder

Über die Profile der gesuchten Größen an den Ausströmrändern liegen in den meisten Fällen keine Informationen vor. Die homogene Randbedingung 2. Art

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0 \quad (\bar{x}_1 \text{ zum Rand}) \quad (13)$$

kann aber immer erfolgreich angewendet werden, wenn die Quellterme in den Transportgleichungen genügend klein sind. Ungenauigkeiten in den Profilen der gesuchten Größen auf dem Ausströmrand haben nur einen geringen Einfluß auf die Lösung im Inneren des Strömungsfeldes, da bei praktischen Aufgaben der konvektive Transport aus dem Strömungsgebiet die Rückdiffusion weit überwiegt.

### 3.3. Symmetrierand

Auf dem Symmetrierand ist die Stromfunktion konstant, die Wirbelstärke, die Umfangsgeschwindigkeit und der Spin sind null. Die Ableitungen der restlichen Größen normal zum Rand sind aufgrund der Symmetrieforderung null.

Da bei Rechnungen in zylindrischen Koordinaten aus der Wirbeltransportgleichung das Verhältnis  $\omega/r$  ermittelt wird, muß auf dem Symmetrierand  $r = 0$  ein unbestimmter Ausdruck bestimmt werden. Die Autoren von [4] approximieren die axiale Geschwindigkeitskomponente in Achsnähe durch eine Parabel, deren Koeffizienten aus der Verteilung der Stromfunktion ermittelt werden. Die Randbedingung für  $\omega/r$  wird aus der Geschwindigkeitsapproximation entsprechend der Definitionsgleichung (6) berechnet. Bei der Anwendung dieser Randbedingung war die Konvergenzgeschwindigkeit der numerischen Lösungsmethode gering. Zum Teil divergierte die Lösung. Eine gute Konvergenz der Lösung kann erreicht werden, wenn die Wirbelstärke in der Nähe der Symmetrieachse durch eine Parabel approximiert wird

$$\omega = a_1 r + a_2 r^2. \quad (14)$$

Die Koeffizienten  $a_1$  und  $a_2$  werden aus der Verteilung der Wirbelstärke in Achsnähe ermittelt. Die Randbedingung (14) wird in den in [4] veröffentlichten Fortranprogrammen verwendet.

### 3.4. Feste Wände

An festen, stoffundurchlässigen Wänden sind die Normal- und Tangentialkomponenten der Geschwindigkeit null. Daraus folgt, daß die Stromfunktion auf der Wand konstant ist.

Bei anderen Variablen, wie zum Beispiel der Wirbelstärke oder der Temperatur, treten Differentialquotienten in den Randbedingungen an festen Wänden auf. Die Überführung solcher Randbedingungen in geeignete Differenzenausdrücke bereitet erhebliche Schwierigkeiten. Diese sind darauf zurückzuführen, daß bei tur-

bulenten Strömungen in der Nähe fester Wände große Geschwindigkeitsgradienten auftreten und beim Vorliegen eines Stoff- oder Wärmetransportes durch die Wand große Konzentrations- und Temperaturgradienten. Bei den Turbulenzmodellen, die auf effektiven Transportkoeffizienten basieren, kommt als weitere Schwierigkeit die starke Änderung der Transportkoeffizienten in Wandnähe hinzu. Diese nachteilige Eigenschaft besitzt das Turbulenzmodell mit unsymmetrischem Spannungsansatz nicht. Um die in Wandnähe auftretenden großen Gradienten vom numerischen Standpunkt aus mit kleinen Fehlern wiedergeben zu können, wäre eine sehr feine Gitterteilung notwendig, die den rechnerischen Aufwand beträchtlich erhöhen würde. Weiterhin würde damit das Problem entstehen, daß Funktionswerte in der laminaren Unterschicht und im Übergangsbereich berechnet werden müßten und somit bei den Turbulenzmodellen mit effektiven Transportkoeffizienten Laminarisierungseffekte zu berücksichtigen wären.

Vom ingenieurtechnischen Standpunkt aus gesehen, steht oft nicht so sehr das genaue Strömungsverhalten in Wandnähe im Mittelpunkt der Berechnungen, sondern mehr das strömungsinne Gebiet. Um dennoch den Einfluß der festen Wände auf das gesamte Strömungsverhalten in guter Näherung widerspiegeln zu können, werden die Randbedingungen aus speziellen Lösungen der Transportgleichungen, die das Verhalten der wandnahen Strömung beschreiben, abgeleitet.

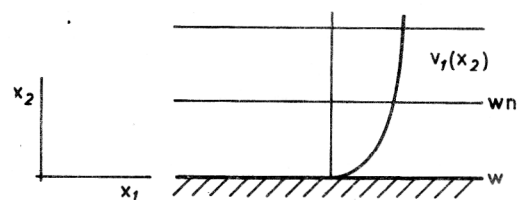


Bild 2  
Wandparallele Strömung

Dazu wird angenommen, daß in Wandnähe eine wandparallele Strömung bei fehlendem Druckgradienten in Längsrichtung existiert. Bei Vernachlässigung von Feldkräften folgt aus dem Impulssatz die Verteilung der Schubspannung in Wandnähe

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{\bar{\tau}_{12}}{\rho} - v_1' v_2' \quad (15)$$

Die Definition der Wirbelstärke vereinfacht sich zu

$$\omega = - \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \quad (16)$$

Zur Ermittlung der Randbedingungen für Turbulenzmodelle mit symmetrischem Spannungsansatz wird für den laminaren Spannungsanteil der Newtonsche Ansatz und für den turbulenten Anteil der Prandtlische Mischungswegansatz verwendet.

$$\frac{\tau}{\rho} = \nu \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} + l^2 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \quad (17)$$

Durch Einführung der bekannten Turbulenzgrößen werden die Impulsleichung und die Definitionsgleichungen für die Wirbelstärke und Stromfunktion dimensionslos dargestellt.

$$v_{*0} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad v_+ = \frac{\bar{v}_1}{v_{*0}}, \quad y_+ = \frac{x_2 v_{*0}}{\nu}, \quad l_+ = \frac{l_m v_{*0}}{\nu} \quad (18)$$

$$\frac{\tau}{\tau_w} = \frac{\partial v_+}{\partial y_+} + l_+^2 \left( \frac{\partial v_+}{\partial y_+} \right)^2 \quad (19)$$

$$\omega = - \frac{v_{*0}^2}{\nu} \frac{\partial v_+}{\partial y_+} \operatorname{sign} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \quad (20)$$

$$v_+ = \frac{1}{\nu} \frac{\partial \psi}{\partial y_+} \quad (21)$$

Der Mischungsweg wird nach dem Ansatz von van Driest berechnet.

$$l_+ = \kappa y_+ [1 - e^{-y_+/A}]; \quad \kappa = 0,4, \quad A = 26 \quad (22)$$

Dieser Ansatz ist sowohl für die laminare Unterschicht als auch für die voll ausgebildete turbulente Strömung gültig. Mit der Prandtlschen Hypothese, daß die Schubspannung in Wandnähe konstant ist, folgt aus dem Impulssatz die Lösung

$$\frac{\partial v_+}{\partial y_+} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4l_+^2}} \quad (23)$$

Somit kann nun in Zusammenhang mit Gleichung (20) die Wirbelstärke von der Wand bis ins voll turbulente Gebiet berechnet werden. Um mit einem grob geteilten Gitternetz in Wandnähe genügend genau die Wirbelstärke berechnen zu können, wird sie nicht auf der Wand, sondern im wandnächsten Gitterpunkt berechnet.

$$\omega_{wn} = - \frac{2 v_{*0}^2}{\nu (1 + \sqrt{1 + 4l_+^2})} \operatorname{sign} \left( \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right) \quad (24)$$

Die Schubspannungsgeschwindigkeit  $v_{*0}$  und der dimensionslose Mischungsweg  $l_+$  im wandnächsten Punkt lassen sich durch den dimensionslosen Abstand  $y_+$  des wandnächsten Gitterpunktes ausdrücken. Der noch unbekannte Wert für  $y_+$  kann durch Integration von Gleichung (21) bestimmt werden. Da sich die van Driestsche Lösung (23) nicht weiter geschlossen integrieren läßt, wird eine abschnittsweise Integration mit dimensionslosen Geschwindigkeitsgesetzen durchgeführt. Der dimensionslose Wandabstand kann nach folgender Vorschrift aus der Differenz der Stromfunktion berechnet werden.

$$y_+ = \begin{cases} \frac{2 |\psi_{wn} - \psi_w|}{\nu} & ; 0 \leq y_+ \leq 5 \\ \frac{0,2}{\nu} |\psi_{wn} - \psi_w| - 2,503 \\ \quad \ln y_+ - 1,61 & ; 5 < y_+ \leq 30 \\ \frac{0,4}{\nu} |\psi_{wn} - \psi_w| - 25,558 \\ \quad \ln y_+ + 1,2 & ; y_+ > 30 \end{cases} \quad (25)$$

Die Turbulenzparameter Turbulenzenergie, Dissipationsrate und Turbulenzcharakteristik sind auf der Wand null. Aus oben aufgeführten Gründen sollen auch für diese Größen die Randbedingungen im wandnächsten Gitterpunkt berechnet werden. Aufgrund des experimentellen Befundes, daß in Wandnähe ein Gleichgewicht zwischen Produktion und Dissipation von Turbulenz besteht, vereinfacht sich die Transportgleichung für die kinetische Energie der Turbulenz.

$$\nu_t \left( \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right)^2 = \epsilon \quad (26)$$

Mit

$$\epsilon = c_D \frac{k^{3/2}}{l} \quad \text{und} \quad \nu_t = c_D \frac{k^2}{\epsilon} \quad (27)$$

für das  $k\epsilon$ -Modell und

$$\epsilon = c_D k W^{1/2} \quad \text{und} \quad \nu_t = k/\sqrt{W} \quad (28)$$

für das  $kW$ -Modell.

Unter Anwendung der Beziehungen (18) bis (23) erhält man folgende Randbedingungen für die Turbulenzparameter im wandnächsten Punkt

$$k_{wn} = \frac{1}{\sqrt{c_D}} v_{*0}^2 \left( 1 - \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4l_+^2}} \right), \quad (29)$$

$$\epsilon_{wn} = \frac{v_{*0}^4}{\nu} \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4l_+^2}} \left( 1 - \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4l_+^2}} \right), \quad (30)$$

$$W_{wn} = \frac{v_{*0}^4}{c_D \nu^2} \frac{4}{1 + \sqrt{1 + 4l_+^2}} = \frac{\omega_{wn}}{c_D} \quad (31)$$

deren Gültigkeit durch die Gleichgewichtsbedingung (26) begrenzt wird.

Im Unterschied zu den Turbulenzmodellen mit effektiven Transportkoeffizienten gilt das Modell mit unsymmetrischem Spannungsansatz bis unmittelbar an die Wand. Auf der festen Wand ist der Spin gleich null. Aus der vereinfachten Impulsleichung kann dann für dieses Turbulenzmodell eine Randbedingung für die Wirbelstärke auf der Wand bestimmt werden. Aufgrund der starken Änderung der Wirbelstärke in Wandnähe müßte die numerische Lösung des Differentialgleichungssystems

mit einer feinen Gitterteilung in Wandnähe erfolgen. Damit besteht auch bei der Anwendung des Turbulenzmodells mit unsymmetrischem Spannungsansatz die Notwendigkeit der Formulierung der Randbedingungen für die Wirbelstärke und den Spin im wandnächsten Punkt. Der Impulsatz und der Impulsmomentensatz werden für die wandparallele Strömung (Bild 2) vereinfacht. Für den Koeffizienten  $n$  im Ansatz für das Feldmoment

$$M = n\omega \quad (32)$$

wird im Vergleich mit dem „universellen Wandgesetz“ der Geschwindigkeit

$$n = 2l_m^2 \omega \quad \text{ermittelt} \quad (33)$$

Für das voll turbulente Gebiet erhält man unter Verwendung der Proportionalität zwischen Mischungsweg und Wandabstand folgende Randbedingungen

$$\omega_{wn} = -\frac{v_{*o}}{\kappa\nu y_+} \operatorname{sign}\left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2}\right), \quad (34)$$

$$\beta_{wn} = -\frac{2}{2\nu} \operatorname{sign}\left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2}\right). \quad (35)$$

Die Gleichung (34) erhält man aus der Gleichung (24) für  $y_+ \gg 1$ . Bei nichtisothermen Strömungen müssen die Wandformeln aus den Transportgleichungen unter Berücksichtigung des Auftriebsterms abgeleitet werden.

Die Randbedingung für die Temperatur kann aus der vereinfachten Wärmetransportgleichung unter Verwendung der Analogie zwischen turbulentem Impuls- und Wärmetransport und dem Prandtlischen Mischungswegansatz abgeleitet werden [6].

$$\bar{T}_{wn} = \frac{\kappa x_2}{Pr_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_2} \left[ \frac{Pr_t}{\kappa} \ln\left(\frac{v_{*o} x_2}{\nu}\right) + C \right] + \bar{T}_w \quad (36)$$

Nach Szablewski [7] ist  $C = 3,36$  und  $Pr_t = 0,9$ .

Die angegebenen Randbedingungen konnten nur unter Nutzung bekannter Gesetzmäßigkeiten turbulenter Strömungen abgeleitet werden. In einer Reihe von Beispielen konnten diese Randbedingungen erfolgreich angewendet werden.

Mit der weiteren Verfeinerung der Turbulenzmodelle muß gleichzeitig eine ständige Verbesserung der Randbedingungen erfolgen. Das trifft insbesondere zu auf Ablösepunkte an konvexen Ecken und auf die Umgebung der Anlegepunkte von Stromlinien. Hieraus erwachsen auch Anforderungen an eine detaillierte experimentelle Untersuchung dieser Prozesse.

#### Symbole

|                      |  |
|----------------------|--|
| a, b, c, d           | Koeffizienten der allgemeinen Transportgleichungen                   |
| A                    | Koeffizient im van Driestansatz                                      |
| $a_1, a_2$           | Koeffizienten der Approximationsparabel der Wirbelstärke             |
| b                    | Koeffizient des Turbulenzmodells mit unsymmetrischem Spannungsansatz |
| c                    | Massenkonzentration  |
| C                    | Koeffizient in der Temperaturrandbedingung                           |
| $c_D, c_1, c_2, c_3$ | Koeffizienten des $k$ - $\epsilon$ bzw. $k$ W-Modells                |
| g                    | Erdbeschleunigung  |

|                      |  |
|----------------------|--|
| h                    | Enthalpie  |
| J                    | Stoffänderungsgeschwindigkeit  |
| k                    | kinetische Energie der Turbulenz                                     |
| l                    | Turbulenzmaßstab   |
| $l_m$                | Prandtlischer Mischungsweg   |
| $l_+$                | dimensionsloser Mischungsweg   |
| M                    | Induktionsmoment im Impulsmomentensatz                               |
| n                    | Koeffizient im Ansatz für das Induktionsmoment                       |
| Pr                   | Prandtlzahl  |
| Q                    | Reaktionswärme   |
| r, z                 | Koordinatenrichtungen der zylindrischen Koordinaten                  |
| Sc                   | Schmidtzahl  |
| T                    | Temperatur   |
| Tu                   | Turbulenzgrad  |
| $v_z, v_r, v_\Theta$ | Komponenten des Geschwindigkeitsvektors in zylindrischen Koordinaten |
| $v_1, v_2$           | Komponenten des Geschwindigkeitsvektors in kartesischen Koordinaten  |
| $v_{*o}$             | Wandschubspannungsgeschwindigkeit                                    |
| $v_+$                | dimensionslose Geschwindigkeit                                       |
| W                    | Turbulenzcharakteristik  |
| $x_1, x_2$           | Koordinatenrichtungen der kartesischen Koordinaten                   |
| $y_+$                | dimensionsloser Wandabstand  |
| $\beta$              | Spin   |
| $\beta_v$            | Volumenausdehnungskoeffizient  |
| $\delta_{1/2}$       | halbe Wandstrahlbreite (Bild 1)                                      |
| $\epsilon$           | Dissipationsrate   |
| $\eta$               | dynamische Viskosität  |
| $\Theta$             | azimutale Koordinate   |
| $\kappa$             | von Karmankonstante  |
| $\nu$                | kinematische Viskosität  |
| $\rho$               | Dichte   |
| $\tau$               | Schubspannung  |
| $\varphi$            | allgemeine Variable  |
| $\psi$               | Stromfunktion  |
| $\omega$             | Wirbelstärke   |

#### Indizes

|    |                    |
|----|--------------------|
| t  | Turbulenzgröße     |
| w  | Wandpunkt          |
| wn | wandnächster Punkt |

#### LITERATUR

- [1] Naue, G.; Schmidt, W. W.; Scholz, R.; Wolf, P.: Modellierung und Berechnung turbulenter Strömungen und Anwendungen in der Technik. Tech. Mech. 1 (1980) 1, S. 89 – 94.
- [2] Launder, B. E.; Spalding, D. B.: Mathematical Models of Turbulence. Academic Press, London and New York, 1972.
- [3] Spalding, D. B.: A Two-equation Model of Turbulence, VDI-Forsch.-Heft, (1972) 549, S. 5 – 16.
- [4] Gosman, A. D.; Pun, W. M.; Runchal, A. K.; Spalding, D. B.; Wolfshtein, M.: Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows. Academic Press, London and New York, 1969.
- [5] Schmidt, W. W.: Modellierung des Impuls- und Energietransportes in turbulenten Strömungen auf der Grundlage eines strukturierten Kontinuums. Dissertation, Techn. Hochschule „Carl Schorlemmer“ Leuna-Merseburg, 1980.
- [6] Scholz, R.: Numerische Berechnung ebener, stationärer Strömungen in Räumen mit Strahlflüftung. Dissertation, Techn. Hochschule „Carl Schorlemmer“ Leuna-Merseburg, 1977.
- [7] Szablewski, W.: Inkompressible turbulente Temperaturgrenzschichten mit konstanter Wandtemperatur. Int. J. Heat Mass Transfer 15 (1972).

Anschrift der Verfasser:

Technische Hochschule „Carl Schorlemmer“  
Sektion Verfahrenstechnik  
4200 Merseburg, Geusaer Str.