Manuskripteingang: 16. 11. 1981

Algorithmus zur kinematischen Analyse ebener Koppelgetriebe

E. E. Peisach

1. Einführung

In der Arbeit wird ein Algorithmus zur kinematischen Analyse beliebiger Mechanismen aus der Familie ebener Koppelgetriebe mit einem Freiheitsgrad beschrieben, deren Struktur durch folgende Merkmale gekennzeichnet ist:

a) Das Anfangsglied ist mit dem Gestell durch eine rotierende Kurbel verbunden.

b) Außer dem Anfangsglied und dem Gestell besitzt das Getriebe ein oder mehrere Zweischläge (Dyaden).

c) Alle Gelenke des Getriebes sind Drehgelenke, bis auf eine Ausnahme, vgl. Punkt d).

d) Falls eins der Glieder der letzten Dyade mit dem Gestell verbunden ist, dann kann dieses Gelenk entweder ein Dreh- oder ein Schubgelenk sein.

e) Ein beliebiges Glied des Getriebes darf nicht mehr als 3 Gelenke mit nicht zusammenfallenden Zentren haben. Diese Einschränkung ist praktisch immer erfüllt.

Die Mehrzahl der Getriebe, die in Maschinen und Geräten angewendet werden, gehört zu der hier betrachteten Familie. Im Bild 1 ist als Beispiel das zehngliedrige Getriebe für den Nadelantrieb einer Wirkmaschine angeführt.
Auf der Grundlage des beschriebenen Algorithmus wurde ein Rechenprogramm aufgestellt. Dieses Programm wird sowohl selbständig (bei der Analyse des Getriebes), als auch als getrennter Block im Programm zur optimalen Synthese eines Getriebes benutzt, die durch iterative Analyse erfolgt [1].
Die Analyse eines beliebigen Getriebes aus der betrachteten Familie mit Hilfe eines Programmes wird dadurch möglich, daß ein einheitliches Bezeichnungssystem für alle Gelenke und die konstanten Parameter des Mechanismus eingeführt wurde. Alle seine strukturellen Besonderheiten sind in Form der Strukturmatrix kodiert.
Die bei der Getriebeanalyse gesuchten Größen (die Lagen, die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Abtriebsgliedes) werden im Programm mit analytischen Formeln bestimmt, d. h. in geschlossener Form, so daß genaue Resultate bei verhältnismäßig geringem Rechenaufwand erhalten werden.

2. Numerierung der Strukturgruppen und Glieder

Die Zahl der Gruppen im Getriebeschema sei m, wobei zur ersten Gruppe das Gestell und das Antriebsglied gehören, während die übrigen Gruppen Dyaden sind. Die erste Gruppe erhält die Nummer 1, die übrigen Dyaden die Nummern 2, 3, . . m, wobei folgendes Prinzip zu beachten ist: Beide Glieder der k-ten Dyade sind mit Gliedern der Dyade 1 verbunden, deren Nummer kleiner als k ist. So wird die Dyade 2 mit Gliedern der Dyade 1 verbunden, d. h. eins der zwei äußeren Gelenke mit dem Antriebsglied und das zweite mit dem Gestell. Die Dyade 3 wird mit Gliedern der Dyaden 1 und/oder 2 verbunden usw. Das Getriebe besteht aus 2m Getriebegliedern und 3m–2 Gelenken. Die Getriebeglieder werden von 1 bis 2m numeriert, wobei folgende Regeln einzuhalten sind:

1. Das Gestell erhält die Nummer 1 und das Antriebsglied die Nummer 2.

2. Die Nummern der Glieder der k-ten Dyade sind 2k–1 und 2k. Wenn eins der Glieder der k-ten Dyade zu einem Gelenk im Gestell gehört, dann erhält es die Nummer 2k (k = 2, 3, . . . m).
   Man muß zwei Fälle unterscheiden:
   Fall S_1:
   Wenn $k < m$ oder $k = m$ und das Glied 2m kein Schubglied ist.
   Fall S_2:

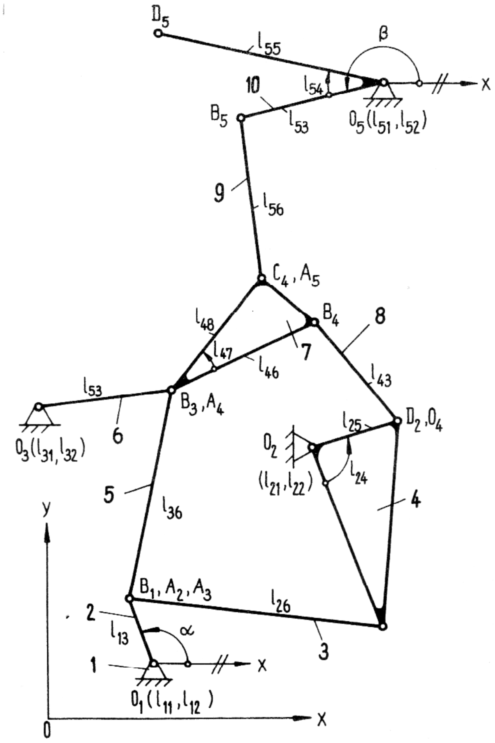

Bild 1
Beispiel eines Mechanismus aus der betrachteten Mechanismenfamilie

Wenn $k = m$ und das Glied 2m ein Schubglied ist.

Das Abtriebsglied des Getriebes ist eins der beiden Glieder der m-ten Dyade.

3. Bezeichnung der Gelenke

Es werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

0_1 = Zentrum des Gelenks, welches die Glieder 1 und 2 verbindet

B_1 = Zentrum des Gelenks, welches die Glieder 2 und 3 verbindet

B_k = Zentrum des Gelenks, welches die Glieder 2k–1 und 2k verbindet ($k = 2, 3, \ldots m$)

A_k = Zentrum des Gelenks, welches das Glied 2k–1 mit einem der Glieder der Gruppe mit der Nummer $i < k$ verbindet ($k = 2, 3, \ldots m$)

0_k = Zentrum des Gelenkes, welches das Glied 2k mit einem der Glieder der Gruppe mit der Nummer $j < k$ im Falle S_1 verbindet $k = 2, 3, \ldots m$)

0_m = Ursprung des Lotes, das senkrecht von der Schubgeraden X durch den Ursprung 0 des x-y-Koordinatensystems geht. Der Strahl der Schubgeraden X geht durch Punkt B_m (Fall S_2)

C_k = drittes Gelenk auf dem Glied 2k–1, das nicht mit den Gelenken A_k und B_k zusammenfällt und dieses Glied mit einem Glied der Dyade mit der Nummer $r > k$ ($k = 2, 3, \ldots m-1$) verbindet

D_k = drittes Gelenk auf dem Glied 2k, das nicht mit den Gelenken 0_k und B_k zusammenfällt und dieses Glied mit einem Glied der Dyade mit der Nummer $s > k$ ($k = 1, 2, \ldots m-1$) verbindet.

Im Falle, daß die Koordinaten eines Punktes des Gliedes 2m–1 oder 2m zu bestimmen sind, wird dieser Punkt entsprechend mit C_m oder D_m bezeichnet.
Der Punkt C_k (oder D_k) entfällt im Getriebeschema, falls das Glied 2k–1 (oder 2k) nur zwei nicht zusammenfallende Gelenke besitzt. Entsprechend der oben beschriebenen Systematik haben einige der Gelenke im Getriebeschema je zwei oder mehr Bezeichnungen. Bild 1 zeigt die Bezeichnung der Glieder und Gelenke gemäß dieser Systematik für ein Beispiel. Auf Bild 2 ist eine Dyade abgebildet, die an jedem ihrer Glieder je drei Gelenke hat. Auf Bild 3 ist die n-te Dyade für den Fall dargestellt, daß das Glied 2m ein Schubglied ist

4. Strukturmatrix

Alle strukturellen Besonderheiten eines zu untersuchenden Getriebes, die seine Struktur innerhalb der Menge der betrachteten Strukturfamilie zu identifizieren erlauben, kann man in numerischer Form mit Hilfe der sogenannten Strukturmatrix beschreiben:

$$\mathbf{M} = (M_{kr}) \qquad (k = 2,3,\ldots m\,;\; r = 1,2,3) \qquad (1)$$

Die Anzahl der Zeilen in der Matrix **M** ist gleich der Anzahl der Dyaden im Getriebeschema, und die Anzahl der Spalten entspricht der Anzahl der Strukturkennzeichen, welche jede Dyade kennzeichnen.

Die Elemente M_{k1}, M_{k2}, M_{k3} charakterisieren folgende Strukturkennzeichen der k-ten Dyade:

M_{k1} = den ausgewählten Punkt, mit dem der Punkt A_k verbunden ist

M_{k2} = den ausgewählten Punkt (oder das Glied), mit dem der Punkt 0_k verbunden ist, und im Falle $k = m$ auch die Tatsache, ob ein Schubglied vorhanden ist oder nicht

M_{k3} = die Montagevariante der Dyade (es gibt zwei mögliche Montagevarianten jeder Dyade).

Die Werte, welche den Elementen M_{k1} und M_{k2} bei den verschiedenen möglichen Situationen zugewiesen werden, sind in den Tabelle 1 und 2 ausgewiesen.

Tabelle 1
Bedeutung der Elemente M_{k1} der Strukturmatrix

Punkt A_k wird verbunden mit dem Punkt	Zahlenwert der Matrizenelemente M_{k1}
A_i	$-(k-i)$
B_i	$k-i$
C_i	$m+k-i$
D_i	$-(m+k-i)$
0_i	$2m+k-i$
$k = 2,3,\ldots, m$;	$i < k$

Tabelle 2
Bedeutung der Elemente M_{k2} der Strukturmatrix

Punkt 0_k wird verbunden mit dem Punkt (oder Glied)	Zahlenwert der Matrizenelemente M_{k2}
A_i	$-(k-i)$
B_i	$k-i$
C_i	$m+k-i$
D_i	$-(m+k-i)$
0_i	$2m+k-i$
Gestellpunkt, der nicht mit 0_i zusammenfällt	0
Schubglied 2m	m
$k = 2,3,\ldots, m$;	$i<k$

Das Element M_{k3} erhält im Falle S_1 folgenden Wert:

$$M_{k3} = \operatorname{sign}\,[M_{0_k}(\overrightarrow{A_k B_k})] \qquad (2)$$

wobei rechts die Signum-Funktion (das Vorzeichen) des Momentes des Vektors $\overrightarrow{A_k B_k}$ relativ zum Punkt 0_k steht. Das Element M_{k3} nimmt den Wert $+1$ oder -1 an: wenn die Drehung des Vektors $\overrightarrow{A_k B_k}$ um den Punkt 0_k entgegen dem Uhrzeigersinn verläuft, dann ist $M_{k3} = +1$, im anderen Falle ist $M_{k3} = -1$. Im Falle S_2 wird dem Element M_{m3} der Wert

$$M_{m3} = \operatorname{sign}[(\overrightarrow{A_m B_m})\, X] \qquad (3)$$

zugewiesen. In Formel (3) steht rechts das Vorzeichen der Projektion des Vektors $\overrightarrow{A_m B_m}$ auf die Achse X, d. h. M_{m3} nimmt die Werte +1 oder −1 an.

Die Größe M_{k3}, die durch Formel (2) bestimmt wird, dient als Kriterium für die Kennzeichnung der Montagevariante der Dyade, wie das in Bild 2 gezeigt wird. Jeder der beiden möglichen Montagevarianten entspricht ein eindeutiger Wert von M_{k3}, d. h. +1 oder −1. Dasselbe trifft auch auf die Größe M_{m3} zu, die durch Formel (3) bestimmt wird; allerdings ist dies nur auf die Dyade anwendbar, die in Bild 3 dargestellt ist.

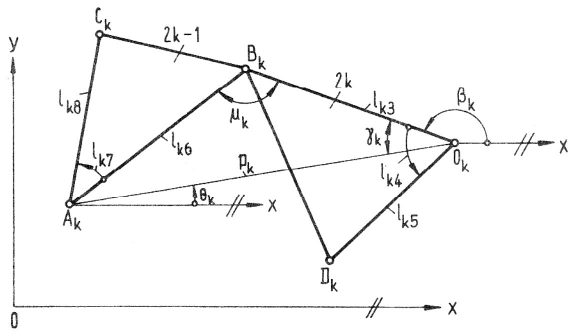

Bild 2
Dyade mit 3 Drehgelenken

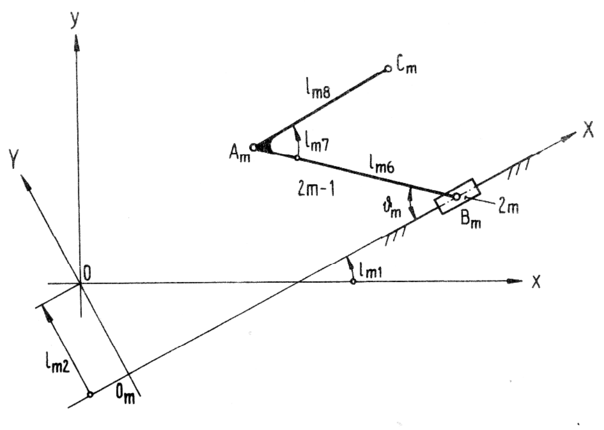

Bild 3
Dyade mit 2 Drehgelenken und einem Schubgelenk

Es ist bemerkenswert, daß bei der Arbeit eines konkreten Getriebes sich während der Bewegung die Montagevarianten seiner Dyaden nicht verändern und infolgedessen auch die Werte der Größen M_{k3} ($k = 2, 3, \ldots, m$) unveränderlich bleiben.

Die Strukturmatrix des in Bild 1 gezeigten Getriebeschemas hat die Form

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -7 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bei der Vorbereitung der Eingabedaten für die EDVA werden gemäß dem gegebenen Getriebeschema die Werte der Elemente der Strukturmatrix **M** aufgestellt. Bei der Abarbeitung des EDV-Programms wird automatisch die umgekehrte Operation vollzogen: Aus den bekannten Werten der Elemente der Strukturmatrix **M** wird das Getriebeschema des untersuchten Getriebes ermittelt.

Beispielsweise möge gegeben sein: $m = 5$, $k = 4$, $M_{k2} = -7$. Gesucht sei der Punkt, mit dem Punkt 0_4 verbunden ist. Weil $-2m < M_{42} < -m$, ist 0_4 mit einem D_i verbunden (vgl. Tabelle 2). Weil in diesem Falle $M_{k2} = -(m + k - i)$, ist also $i = M_{k2} + m + k = 2$, d. h. 0_4 ist mit D_2 verbunden.

5. Bezeichnung der konstanten Parameter

Zu den konstanten Parametern des Getriebes gehören die Gliedlängen, die Lagerkoordinaten und die festen Winkel, d. h. die Größen, die sich bei der Bewegung des Getriebes nicht ändern. Es wird die Matrix der konstanten Getriebeparameter eingeführt:

$$L = (l_{kj}) \qquad (k = 1,2,\ldots m\,;\ j = 1,2,\ldots,8) \qquad (4)$$

Hierbei ist k die laufende Nummer der Strukturgruppe und j die laufende Nummer des Parameters in den Grenzen der gegebenen Strukturgruppe.

Der Sinn der Bezeichnungen l_{kj} in den beiden Fällen ist folgender:

a) Fall S_1:

$$l_{k1} = x_{0_k},\ l_{k2} = y_{0_k},\ l_{k3} = \overline{0_k B_k},\ l_{k4} = \sphericalangle B_k 0_k D_k,$$
$$l_{k5} = \overline{0_k D_k},\ l_{k6} = \overline{A_k B_k},\ l_{k7} = \sphericalangle B_k A_k C_k,$$
$$l_{k8} = \overline{A_k C_k}\,; \qquad (5)$$

b) Fall S_2:

$$l_{m1} = \sphericalangle(x,X),\ l_{m2} = y_0,\ l_{m3} = l_{m4} = l_{m5} = 0,$$
$$l_{m6} = \overline{A_m B_m},\ l_{m7} = \sphericalangle B_m A_m C_m,\ l_{m8} = \overline{A_m C_m}\,.$$

Im Fall S_1 sind x_{0_k} und y_{0_k} die Koordinaten der Punkte 0_k im x-y-Koordinatensystem. Wenn $M_{k2} \neq 0$ ist, dann ergibt sich $l_{k1} = l_{k2} = 0$. Wenn der Punkt D_k fehlt, dann gilt $l_{k4} = l_{k5} = 0$.

Im Falle S_2 wird außer dem x-y-Koordinatensystem ein zweites unbewegliches Koordinatensystem eingeführt: $0_m XY$ (Bild 3).

In den Formeln (6) ist Y_o die Y-Koordinate des Punktes 0. Fehlt der Punkt C_k, dann gilt in den Fällen S_1 und S_2: $l_{k7} = l_{k8} = 0$.

Die Anzahl der Elemente der Parametermatrix **L** ist $8 \cdot m$. Die Anzahl der tatsächlichen Getriebeparameter ist immer kleiner als $8 \cdot m$, wenn diejenigen Elemente der Matrix **L** nicht mit einbezogen werden, die gleich Null sind. So besitzt das in Bild 1 gezeigte Getriebe 21 tatsächliche Parameter und 19 Elemente der Matrix **L** sind gleich Null.

6. Möglichkeiten des Programms

Es werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

α – Winkel des Gliedes 1 (Bild 1);

β – Winkel des Gliedes 2m (im Falle S_1);

μ_k – Übertragungswinkel in der k-ten Dyade ($k = 2, 3, \ldots, m$ im Fall S_1; $k = 2, 3, \ldots, m-1$ im Fall S_2);

ϑ_m Druckwinkel in der m-ten Dyade (im Fall S_2);

$x_{B_m}, y_{B_m}, x_{C_m}, y_{C_m}, x_{D_m}, y_{D_m}$ sind die Koordinaten der Punkte B_m, C_m und D_m;
X ist die X-Koordinate des Punktes B_m im Fall S_2;

$\beta' = \dfrac{d\beta}{d\alpha}$ und $\beta'' = \dfrac{d^2\beta}{d\alpha^2}$ sind die Übertragungsfunktionen erster und zweiter Ordnung im Fall S_1;

$X' = \dfrac{dX}{d\alpha}$ und $X'' = \dfrac{d^2X}{d\alpha^2}$ sind die Übertragungsfunktionen erster und zweiter Ordnung im Fall S_2;

ω_o, ϵ_o sind die Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung des Antriebsgliedes

ω, ϵ sind die Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung des Gliedes 2m (im Fall S_1);

v, a sind Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes B_m im Fall S_2.

Die Winkel α und β verlaufen von der x-Achse aus entgegen dem Uhrzeigersinn. Der Winkel α ist eine unabhängige Veränderliche, d. h. er ist eine verallgemeinerte Koordinate des Getriebes. Die Winkel μ_k und ϑ_k (vgl. Bilder 2 und 3) charakterisieren die Qualität der Übertragung der Bewegungen und Kräfte im Getriebe (auf Grund kinematischer Größen).
Das beschriebene Programm erlaubt, für die mit der Schrittweite $\Delta\alpha$ aufeinanderfolgenden Werte des Winkels α festzustellen, ob das Getriebe in Form einer geschlossenen kinematischen Kette existiert. Wenn das Getriebe existiert, dann wird für das gegebene α bestimmt:

a) im Fall S_1: $\beta, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_m$;

b) im Fall S_2: $x, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_{m-1}, \vartheta_m$.

Außerdem können auf Wunsch des Auftraggebers auch andere Werte ermittelt werden:

1. x_{B_m}, y_{B_m}; 2. x_{C_m}, y_{C_m}; 3. x_{D_m}, y_{D_m};
4. β', β''; 5. ω, ϵ; 6. v, a.

(Die Punkte 3, 4, 5 nur im Fall S_1, Punkt 6 nur im Fall S_2).

Die Auswahl der konkreten Analyseobjekte erfolgt dadurch, daß die Werte 0 oder 1 den Kennziffern R_1, $R_2, \ldots, R_6$ zugewiesen werden, welche zu den Eingabedaten gehören. Wenn beispielsweise die Koordinaten der Punkte C_m gefunden werden sollen, dann wird $R_2 = 1$ gesetzt, im entgegengesetzten Fall ist $R_2 = 0$. Wenn $R_5 = 1$ oder $R_6 = 1$ dann müssen ω_o und ϵ_o gegeben sein.

Infolgedessen gehören zu den Eingabedaten für das EDV-Programm folgende Werte und Matrizen: m, **M**, **L**, $R_1, R_2, \ldots, R_6$, α_o, $\Delta\alpha$, N, und auch ω_o und ϵ_o wenn $R_5 = 1$ oder $R_6 = 1$. Die Rechenwerte α_i des Winkels α werden durch folgende Formel bestimmt:

$$\alpha_i = \alpha_o + \Delta\alpha \cdot i \qquad (i = 0, 1, \ldots N) \tag{7}$$

Alle Winkelgrößen werden in Grad in die EDVA eingegeben und auch in Grad ausgegeben.

7. Bestimmung der Lagen und Übertragungsfunktionen

Die Lage der Glieder und Gelenke des Getriebes werden für einige α aufeinanderfolgend für die Strukturgruppen mit den Nummern $1, 2, \ldots, m$ bestimmt. Anfangs werden die Koordinaten des Punktes B_1 nach folgenden Formeln ermittelt:

$$x_{B_1} = l_{11} + l_{13}\cos\alpha, \quad y_{B_1} = l_{12} + l_{13}\sin\alpha.$$

Wenn $l_{15} > 0$, dann werden die Koordinaten des Punktes D_1 nach den Formeln

$$x_{D_1} = l_{11} + l_{15}\cos(\alpha + l_{14}),$$

$$y_{D_1} = l_{12} + l_{15}\sin(\alpha + l_{14}).$$

bestimmt.

Die Lage der Glieder der k-ten Dyade ($k = 2, 3, \ldots, m$) wird in drei Etappen bestimmt; im Fall S_1 sind dies

I) Gemäß den Werten der Elemente M_{k1} der Strukturmatrix **M** werden die Koordinaten der Punkte A_k ermittelt. Wenn beispielsweise $M_{k1} = 1$ ist, dann ist der Punkt A_k mit dem Punkt B_{k-1} verbunden und deshalb gilt dann
$$x_{A_k} = x_{B_{k-1}}, \quad y_{A_k} = y_{B_{k-1}}.$$

II) Gemäß den Werten der Elemente M_{k2} der Strukturmatrix **M** werden die Koordinaten der Punkte 0_k ermittelt, Wenn z. B. $M_{k2} = 0$ ist, dann gilt
$$x_{0_k} = l_{k1}, \quad y_{0_k} = l_{k2}.$$

III) Aus den gefundenen Werten für die Koordinaten der Punkte A_k und B_k und den gegebenen Werten $l_{k3}, l_{k4}, \ldots, l_{k8}$ und M_{k3} wird bestimmt:

a) $\beta_k, \mu_k, x_{B_k}, y_{B_k}$ (Bild 2);

b) x_{D_k}, y_{D_k} – nur bei $l_{k5} > 0$;

c) x_{C_k}, y_{C_k} – nur bei $l_{k8} > 0$.

Laufend wird dabei die Bedingung für die Existenz der k-ten Dyade geprüft. Der Berechnungsalgorithmus der Etappe III wird im folgenden angegeben:

1. $p_k = \sqrt{(x_{0_k} - x_{A_k})^2 + (y_{0_k} - y_{A_k})^2}$;

2. $\cos\mu_k = \dfrac{l_{k3}^2 + l_{k6}^2 - p_k^2}{2 l_{k3} l_{k6}}$

3. Kontrolle: Falls $|\cos\mu_k| < 1$, dann existiert die k-te Dyade; Falls $|\cos\mu_k| \geqslant 1$, dann existiert das Getriebe nicht und die Berechnung wird abgebrochen;

4. $\mu_k = \arccos(\cos \mu_k)$;

5. $$\Theta_k = \begin{cases} \arcsin \dfrac{y_{0k} - y_{Ak}}{p_k} & \text{bei } x_{0_k} \geqslant x_{A_k}, \\ \arcsin \dfrac{y_{0k} - y_{Ak}}{p_k} & \text{bei } x_{0_k} < x_{A_k}; \end{cases}$$

6. $\gamma_k = \arccos \dfrac{l_{k3}^2 + p_k^2 - l_{k6}^2}{2 p_k l_{k3}}$;

7. $\beta_k = \pi + \Theta_k + M_{k3}\, \gamma_k$;

8. $x_{B_k} = x_{0_k} + l_{k3} \cos \beta_k$,

   $y_{B_k} = y_{0_k} + l_{k3} \sin \beta_k$;

9. $x_{D_k} = x_{0_k} + l_{k5} \cos(\beta_k + l_{k4})$,

   $y_{D_k} = y_{0_k} + l_{k5} \sin(\beta_k + l_{k4})$;

10. $x_{C_k} = x_{A_k} + l_{k8} \cos(\beta_k + M_{k3}\, \mu_k + l_{k7})$,

    $y_{C_k} = y_{A_k} + l_{k8} \sin(\beta_k + M_{k3}\, \mu_k + l_{k7})$.

Der Punkt 9 des Algorithmus wird nur ausgeführt, falls $l_{k5} > 0$, und Punkt 10 nur bei $l_{k8} > 0$. Der bei der Getriebeanalyse gesuchte Winkel β fällt mit dem Winkel β_m zusammen.

Im Fall S_2 gibt es einige Unterschiede, wenn die Lage der Glieder der m-ten Dyade bestimmt wird. Die Koordinaten der Punkte 0_m (Etappe II) werden nach den Formeln

$$x_{0_m} = l_{m2} \sin l_{m1}, \qquad y_{0_m} = -l_{m2} \cos l_{m1}$$

bestimmt, und zwar nur einmal vor Beginn der Auswahl des Winkels α.

Während der Etappe III werden bestimmt:

a) ϑ_m, X; b) x_{B_m}, y_{B_m} – nur bei $R_1 = 1$;

c) x_{C_m}, y_{C_m} – nur bei $R_2 = 1$.

Nebenbei wird die Bedingung für die Existenz der m-ten Dyade geprüft.

Der Algorithmus lautet bei k = m im Falle S_2:

1. $x_{A_m} = x_{A_m} \cos l_{m1} + y_{A_m} \sin l_{m1}$,

   $Y_{A_m} = l_{m2} - x_{A_m} \sin l_{m1} + y_{A_m} \cos l_{m1}$;

2. $\sin \vartheta_m = |Y_{A_m}| / l_{m6}$;

3. Kontrolle: Wenn $\sin \vartheta_m < 1$, dann existiert die m-te Dyade; wenn $\sin \vartheta_m \geqslant 1$, dann existiert das Getriebe nicht und die Berechnung wird unterbrochen;

4. $\vartheta_m = \arcsin(\sin \vartheta_m)$;

5. $X = X_{A_m} + M_{m3} \cdot \sqrt{l_{m6}^2 - Y_{A_m}^2}$;

6. $x_{B_m} = x_{0_m} + X \cos l_{m1}$,

   $y_{B_m} = y_{0_m} + X \sin l_{m1}$;

7. $x_{C_m} = x_{A_m} + M_{m3}\, l_{m8} \cos(l_{m1} + l_{m7} - M_{m3}\, \kappa\, \vartheta_m)$,

   $y_{C_m} = y_{A_m} + M_{m3}\, l_{m8} \sin(l_{m1} + l_{m7} - M_{m3}\, \kappa\, \vartheta_m)$,

   wobei $\kappa = \operatorname{sign}(Y_{A_m})$ ist.

Der Punkt 6 des Algorithmus wird nur ausgeführt, wenn $R_1 = 1$ ist und Punkt 7 nur, wenn $R_2 = 1$ ist.

Die analytische Bestimmung der Übertragungsfunktionen erster und zweiter Ordnung (β', β'') führt für $m > 2$ zu sehr komplizierten Berechnungsformeln und einem wesentlich komplizierteren Algorithmus. In dem beschriebenen Programm werden die Übertragungsfunktionen β' und β'' nicht mit analytischen, sondern mit numerischen Methoden bestimmt, die kaum zu einer Vergrößerung des Programmtextes führen.

Die Funktionen β' und β'' werden mit folgenden Näherungsformeln gefunden:

$$\beta' = \frac{\beta(\alpha+\delta) - \beta(\alpha-\delta)}{2\delta}; \qquad \beta'' = \frac{\beta(\alpha+\delta) - 2\beta(\alpha) + \beta(\alpha-\delta)}{\delta^2} \tag{8}$$

wobei δ ein kleiner Parameter ist, z. B. $\delta = 10^{-4}$.

Aus obigen Formeln ist ersichtlich, daß man zur Berechnung der Übertragungsfunktionen bei irgendeinem Wert des Winkels nicht nur mit dem beschriebenen Algorithmus den Winkel β bei einem gegebenen α ermitteln muß, sondern auch bei den Winkeln $\alpha - \delta$ und $\alpha + \delta$. Angesichts dessen, daß der Winkel δ klein ist, garantieren die Formeln (8) eine hohe Rechengenauigkeit für die Übertragungsfunktionen.

Die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung des Gliedes 2m wird im Fall S_1 mit folgenden Formeln gefunden:

$$\omega = \beta' \omega_0; \qquad \epsilon = \beta' \epsilon_0 + \beta'' \omega_0^2. \tag{9}$$

Auf analoge Weise werden die Übertragungsfunktionen X' und X'' und auch die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung a des Schubgliedes im Fall S_2 gefunden.

8. Schlußbemerkungen

Das Programm, das nach den oben beschriebenen Algorithmen ausgearbeitet wurde, existiert in 2 Varianten, in den Sprachen ALGOL – 60 und FORTRAN IV. Die Rechenzeit der Maschine, die für die Analyse eines Mechanismus für eine Winkelstellung des Antriebsgliedes 1 benötigt wird, hängt von der Anzahl n der Glieder des Mechanismus und von der Rechengeschwindigkeit der EDVA ab. Bei der Realisierung des Programms auf der EDVA „ODRA–1204" (2...3000 Operationen je Sekunde unter Benutzung des ALGOL–60–Kompilers) betrug z. B. bei n = 10 die Rechenzeit t = 0,6 s.

Mit Hilfe des Programms wurden kinematische Untersuchungen an vielen Dutzend Verarbeitungsmaschinen (Textilmaschinen, polygrafischen Maschinen, Verpakkungsmaschinen u. a.) durchgeführt. Außerdem wurde dieses Programm als Analyseblock bei der optimalen Synthese der Mechanismen von Wirkmaschinen verschiedener Typen, von Verpackungsautomaten und Funktionsgeneratoren benutzt. Das Programm wurde in den Studienprozeß am Leningrader Institut für Textil- und Leichtindustrie namens S. M. Kirow eingeführt, und es wird von Studenten bei Beleg- und Diplomarbeiten für die Projektierung benutzt.

LITERATUR

[1] Peisach, E. E.: Algoritm sintesa prostranstvennych peredatocnych rycaznych mechanismov (Algorithmus zur Synthese räumlicher Übertragungs-Koppelgetriebe). Leningrad: Sbornik naucnych trudov, LITLP im. S. M. Kirova, 11, 1971.

[2] Peisach, E. E.: Kinematiceskij analis ploskich mnogosvennych sarnirnych mechanismov pri pomosci EZVM (Kinematische Analyse ebener mehrgliedriger Gelenkgetriebe mit Hilfe von EDVA. Leningrad: Sbornik naucnych trudov, LITLP im. S. M. Kirova, 12 (1971) 2.

[3] Peisach, E. E.: Sintes rycaznych mechanismov na osnove metodov masinnoi optimisazii (Synthese von Gelenkgetrieben auf Basis der Methoden der maschinellen Optimierung). Mechanika masin, Vyp. 41 (1973). Verlag Nauka.

[4] Peisach, E. E.: Optimisazionnyi sintes rycaznych mechanismov (Optimale Synthese von Gelenkgetrieben) Abschn. 2 im Buch „Rascet i Konstruirovaije mechanismov i detali priborov". Leningrad: Verlag Masinostroenije, 1975

Anschrift des Verfassers:
Prof. Dr. sc. techn. E. E. Peisach
Institut für Textil- und Leichtindustrie
Lehrstuhl Theoretische Mechanik
Leningrad