

Zur Modellierung von Schwingungssystemen, die periodisch übersetzende Getriebe enthalten

J. Rößler

1. Einleitung

Ungleichmäßig übersetzende Getriebe spielen zur Erzeugung bestimmter technologisch bedingter Bewegungsgesetze im Be- und Verarbeitungsmaschinenbau eine wichtige Rolle. Die Analyse der dynamischen Erscheinungen, die mit der Arbeit derartiger Maschinen im Zusammenhang stehen, erfordert nach wie vor einen großen Aufwand und ist theoretisch noch nicht voll beherrschbar. Seit mehr als zehn Jahren wird intensiv an der Lösung dieser Problematik gearbeitet und als Ergebnis liegen heute mehrere anwendungsbereite Rechenprogramme vor. So beispielsweise das Programm DAM [1], das die dynamische Analyse praktisch beliebiger ebener Mechanismen erlaubt.

Bei höheren Arbeitsgeschwindigkeiten ergeben sich indessen infolge der nunmehr nicht mehr zu vernachlässigenden Elastizitäten innerhalb der Mechanismen und der ihnen angeschlossenen Elemente völlig neue Verhältnisse und die Ergebnisse der Untersuchungen starrer Mechanismen sind nur noch bedingt anwendbar. Wie die Arbeiten von Wulfson [2] und anderer Autoren zeigten, können dynamische Effekte derartige Ergebnisse vollständig entwerfen.

Daher gab es bereits frühzeitig Bestrebungen, die Elastizitäten der Getriebeglieder in die Untersuchung mit einzubeziehen. In dem Programm KOGEAN [3] war beispielsweise die automatische Zusammenstellung der Bewegungsgleichungen elastischer Mechanismen vorgesehen, die von Khang [4] mit Hilfe eines Schritt-für-Schritt-Verfahrens integriert werden konnten. Dieses Verfahren erweist sich allerdings für die Gewinnung von Aussagen über das stationäre Verhalten derartiger Mechanismen als wenig effektiv, wemgleich mit dem verwendeten Doppelschrittverfahren [5] hohe Rechengeschwindigkeiten bei geringem numerischen Fehler erzielt werden konnten. Diese geringe Effektivität ergibt sich insbesondere aus der Notwendigkeit, zur befriedigenden Klärung von Parametereinflüssen zahlreiche „numerische Experimente“ durchführen zu müssen.

Weitere Untersuchungen von Fiedler [6] und Auersperg [7] konzentrierten sich daher unmittelbar auf das Auffinden periodischer Lösungen für die Bewegung elastischer Mechanismen. In allen genannten Arbeiten bleiben aber die Untersuchungen auf den Mechanismus beschränkt, während vor- und nachgeschaltete Elemente des Antriebssystems von Sonderfällen abgesehen unberücksichtigt bleiben müssen.

Einen Zugang zur komplexen Lösung dieses Problems liefert Wulfson [2] mit dem Begriff des „kinematischen Analogons“ eines Mechanismus und einer daraus abge-

leiteten Untersuchungsmethodik. Diese Herangehensweise stützt sich u. a. darauf, daß in vielen Fällen die Massen der zwischengeschalteten Getriebeglieder gegenüber den Massen der An- und Abtriebsglieder eine untergeordnete Rolle spielen und damit vernachlässigt werden können. Für den als Beispiel untersuchten Antrieb von Kettenwirkmaschinen konnte dies von Hertzsch [8] bestätigt werden.

Andererseits liefert die Methode der finiten Elemente (FEM) nach Klein [9] eine aussichtsreiche einheitliche Methodik zur Untersuchung von Mechanismen, darunter von Mechanismen mit elastischen Gliedern, und den vor- und nachgeschalteten elastischen Elementen. Die Idee dazu geht auf van der Werff [10] zurück, der die Bewegung von Mechanismen mit Hilfe der FEM untersucht und dabei die Starrkörperbewegung nicht ausschließt, sondern als Lösung der kinematischen Analyse verwendet.

Im folgenden soll der Begriff des „kinematischen Analogons“ mit den einfachsten Elementen der FEM in Verbindung gebracht werden. Daraus wird eine Untersuchungsmethodik für mechanische Schwingungssysteme abgeleitet, die ungleichmäßig übersetzende Getriebe enthalten.

2. Modellbildung

Die Arbeit [11] enthält einige interessante Überlegungen für die Ableitung mathematischer Modelle technischer Vorgänge und Prozesse. Zwei Schlussfolgerungen daraus verdienen an dieser Stelle hervorgehoben zu werden:

1. Für ein und denselben Prozeß sind mehrere Modelle möglich und sinnvoll, wobei sich die Modelle in einem fortgeschritteneren Stadium auf vorangegangene Modellvorstellungen und die dazu angestellten Untersuchungen stützen können. Daraus ergibt sich die Untersuchung der hier in Rede stehenden mechanischen Systeme in zwei Modellstufen [12]: „globale“ Modelle für die Untersuchung der parameterabhängigen Eigenfrequenzen und Eigenformen; „lokale“ Modelle zur Klärung des Einflusses dissipativer Faktoren und äußerer Erregungen.

2. Ein besonders „kühner“ Schritt in einem frühen Stadium der Modellbildung kann zu übersichtlicheren, besser deutbaren und damit insgesamt wertvolleren Ergebnissen führen als eine Modellierung, die möglichst jede Einzelheit zu erfassen bestrebt ist und damit auf umfangreiche Differentialgleichungssysteme führt, deren Lösung nunmehr auf einer schwieriger überschaubaren Stufe Vereinfachungen erfordert oder nur noch mit Schritt-für-Schritt-Verfahren bei den bekannten Nachteilen ausgeführt werden kann.

Für die Lösung des Gesamtproblems wurde ein Ablaufplan (Bild 1) entworfen, dessen erste Stufe, die Bildung des sogenannten „globalen“ Modells hier beschrieben werden soll.

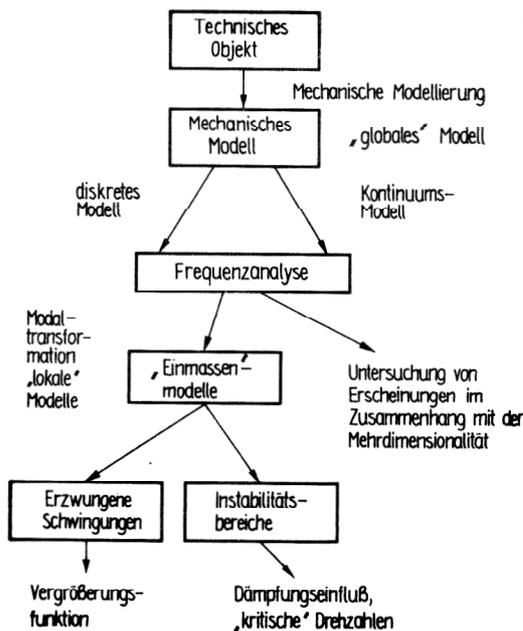


Bild 1
Berechnungsschema für die Untersuchung mechanischer Systeme mit zeitlich veränderlichen Parametern

2.1. Strukturelemente

Die zu untersuchenden Strukturen werden aus den Elementtypen „Stab“ und „Mechanismus“ zusammengesetzt, wobei diskrete Massen und diskrete Federn an den Knoten beliebig hinzugefügt werden können.

Für das Stabelement sollen nach Bild 2 die folgenden Beziehungen gelten (vgl. [13]):

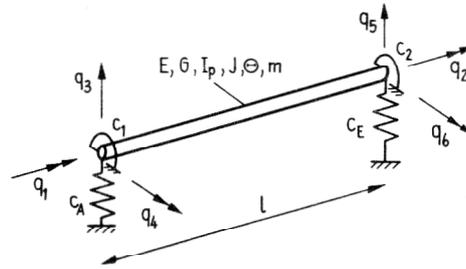


Bild 2
Bezeichnungen am Stabelement

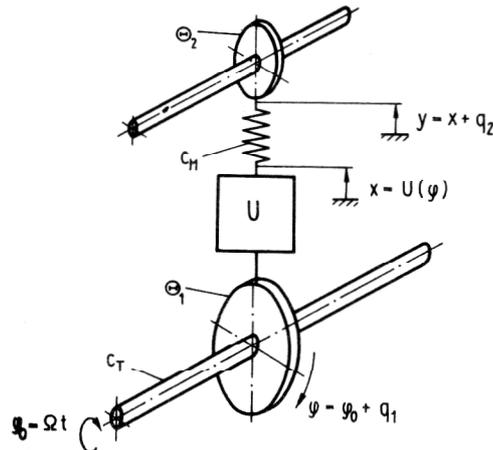


Bild 3
Bezeichnungen am Element „Mechanismus“

Steifigkeitsmatrix

$$K_{Se} = \begin{bmatrix} c_T + c_1 & -c_T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & c_T + c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 12e + c_A & 6el & -12e & 6el \\ \text{symmetrisch} & & & 4el^2 & -el & 2el^2 \\ & & & & 12e + c_E & -6el \\ & & & & & 4el^2 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

wobei $c_T = GI_p/l$, $e = EJ/l^3$, I_p – polares Flächenträgheitsmoment, J – axiales Flächenträgheitsmoment, l – Elementlänge, G – Schubmodul, E – Elastizitätsmodul.

Massenmatrix

$$M_{Se} = \frac{1}{420} \begin{bmatrix} 140 \Theta & 70 \Theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 140 \Theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 156 m & 22 ml & 56 m & -13 ml \\ & \text{symmetrisch} & & 4 ml^2 & 13 ml & -3 ml^2 \\ & & & & 156 m & 22 ml \\ & & & & & 4 ml^2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

wobei Θ – polares Massenträgheitsmoment des Stabelementes, m – Elementmasse.

Die Beziehungen für das Element „Mechanismus“ lassen sich aus Bild 3 ableiten. Es gelten die Gleichungen (vgl. [2]):

$$\begin{aligned} \Theta_1 \ddot{q}_1 + c_T q_1 - c_M U' q_2 &= 0 \\ \Theta_2 U' \ddot{q}_1 + \Theta_2 \ddot{q}_2 + c_M q_2 &= -\Theta_2 U'' (\Omega + \dot{q}_1)^2, \end{aligned} \quad (3)$$

wobei Θ_1, Θ_2 – Massenträgheitsmomente der im An- bzw. Abtrieb konzentrierten Massen; $U' = dU/d\varphi$ – Übertragungsfunktion erster Ordnung; Ω – „ideale“ Antriebswinkelgeschwindigkeit; q_1 – Differenz zwischen tatsächlicher Antriebsbewegung und „idealer“ Bewegung; q_2 – dsgl. für den Abtrieb; c_T – Federsteife im Abtrieb; c_M – summarische Federsteife des Mechanismus (ist im allgemeinen Fall eine Funktion des Antriebswinkels φ). In symmetrischer Form lauten die Gleichungen (3)

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 &= b_1 \\ a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + c_{21} q_1 + c_{22} q_2 &= b_2, \end{aligned} \quad (4)$$

wobei

$$\begin{aligned} a_{11} &= \Theta_1 + \Theta_2 U'^2 \\ a_{12} &= a_{21} = \Theta_2 U' \\ a_{22} &= \Theta_2; \\ c_{11} &= c_T, \quad c_{22} = c_M, \quad c_{12} = c_{21} = 0. \end{aligned}$$

Das führt auf die Elementmatrizen

Steifigkeitsmatrix

$$K_{Me} = \begin{pmatrix} c_T & 0 \\ 0 & c_M \end{pmatrix}, \quad (5)$$

wobei c_T in der Regel bereits durch das Stabelement der Antriebswelle erfasst ist.

Massenmatrix

$$M_{Me} = \begin{pmatrix} \Theta_1 + \Theta_2 U'^2 & \Theta_2 U' \\ \Theta_2 U' & \Theta_2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

2.2. Programmierung

Unter Verwendung der Elementmatrizen (1), (2), (5) und (6) wurde ein Rechenprogramm erarbeitet, mit dem erste Testrechnungen erfolgreich abgelaufen sind. Bei der Programmgestaltung wurde dabei das Stabelement in die Elemente „Welle“ und „Balken“ aufgetrennt. Als Parameter wurde zunächst nur die Übertragungsfunktion 1. Ordnung U' vorgesehen.

Die Lösung des Matrizen-Eigenwertproblems erfolgt mit den ESER-Standardprogrammen der Matrizennumerik bei einfacher Genauigkeit. Der Programmablauf ist auf Bild 4 schematisch dargestellt.

2.3. Beispiel

Als Beispiel wurde das auf Bild 5 gezeigte Schema eines Antriebssystems untersucht. Dabei wurden die folgenden Daten angenommen:

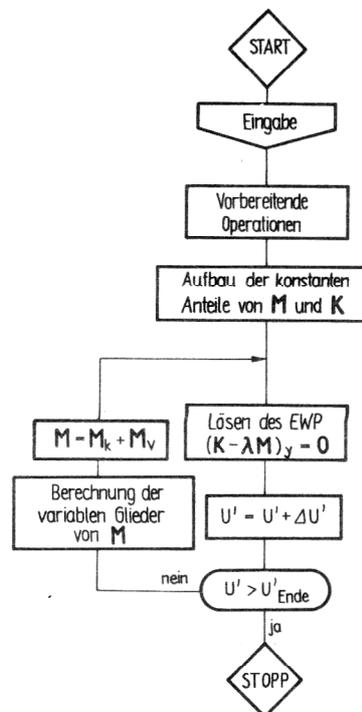


Bild 4
Programmablauf für die Untersuchung des „Globalmodells“

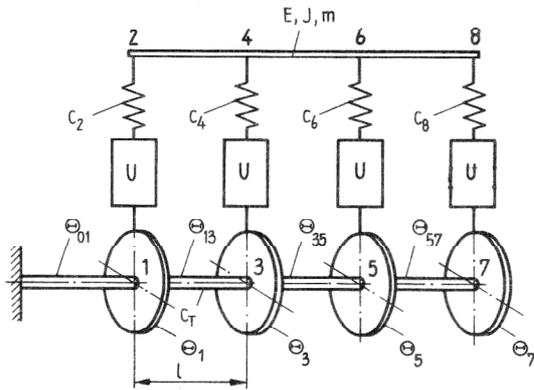


Bild 5
Beispiel eines Antriebssystems

Die Ergebnisse sind auf den Bildern 6 und 7 für $U' = 0$ und $U' = 0,5$ gezeigt. Als Parameter sind die Eigenwerte λ aufgetragen.

Für $U' = 0$ zeigen Welle und Balken voneinander völlig unabhängige Schwingungsformen. Besonders hinzuweisen ist auf die Schwingungsformen bei $\lambda = 26,5; 122; 1100; 1990$ und 7530 . Diese Formen, sowie die in noch ausgeprägterem Maße bei $U' = 0,5$ vorhandenen analogen Formen lassen sich nach [14] für die dort beschriebenen Fälle mit $|k| \geq 1$ erklären.

Bei $U' = 0,5$ hat sich das Bild der Schwingungsformen infolge des unverhältnismäßig großen Sprungs der Übertragungsfunktion vollständig gewandelt. Die Spanne der Eigenwerte hat sich verbreitert. Das entspricht der in [12] gefundenen „Aufspaltung“ des Eigenfrequenzspektrums und der zu beobachtenden Verbreiterung des Frequenzbereiches bei Anwachsen des Parameters U' .

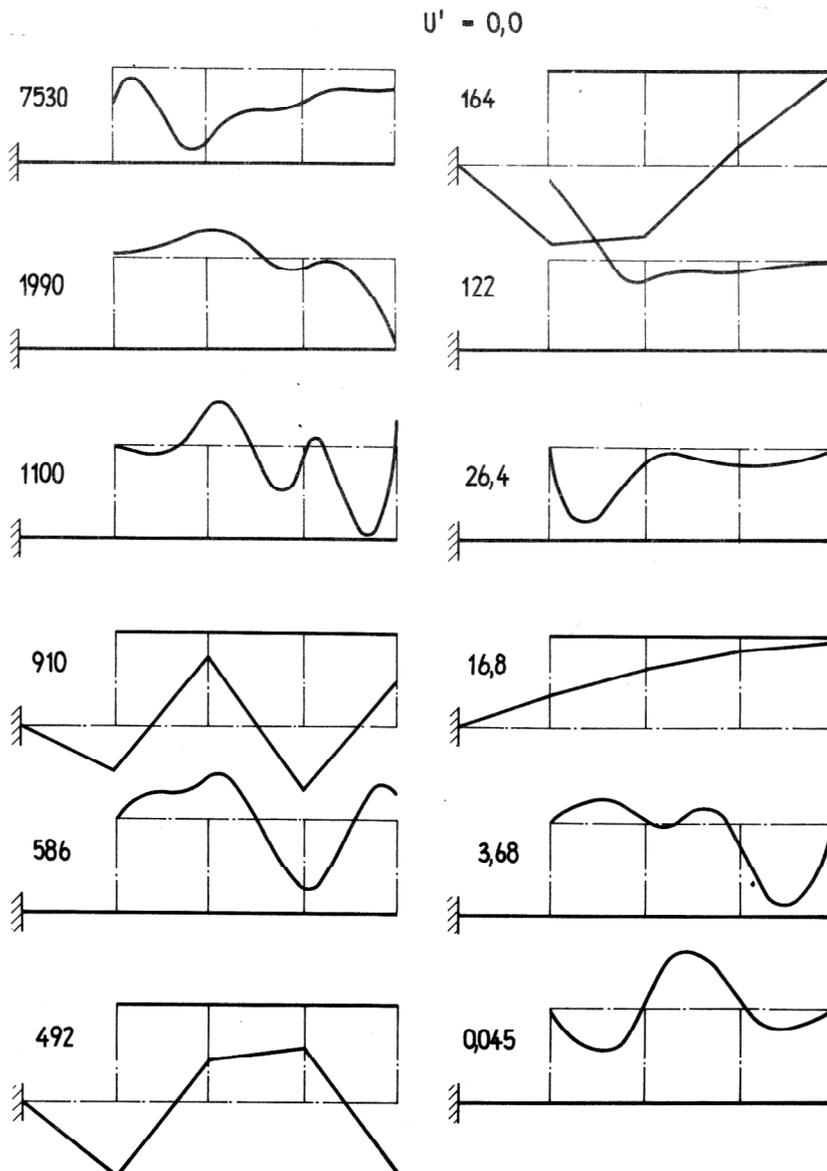


Bild 6
Schwingungsformen für $U' = 0$

$c_T = 7,59 \cdot 10^6$ Ncm für alle Wellenabschnitte,
 $E = 2,1 \cdot 10^7$ N/cm², $J = 13,74$ cm⁴, $l = 67,5$ cm,
 $c_2, \dots, c_8 = 3,0 \cdot 10^5$ N/cm,
 $\Theta_{01}, \dots, \Theta_{57} = 32,5$ kgcm², $\Theta_1, \dots, \Theta_7 = 29$ kgcm²,
 $m_{24}, \dots, m_{68} = 5,47$ kg.

3. Schlussfolgerungen

Mit Hilfe der vorgestellten Modellierung von Systemen, in denen ungleichförmig übersetzende Getriebe enthalten sind, gelingt es, die Schwingungserscheinungen in derartigen Systemen zu beschreiben. Die Ergebnisse erster

$$U' = 0,5$$

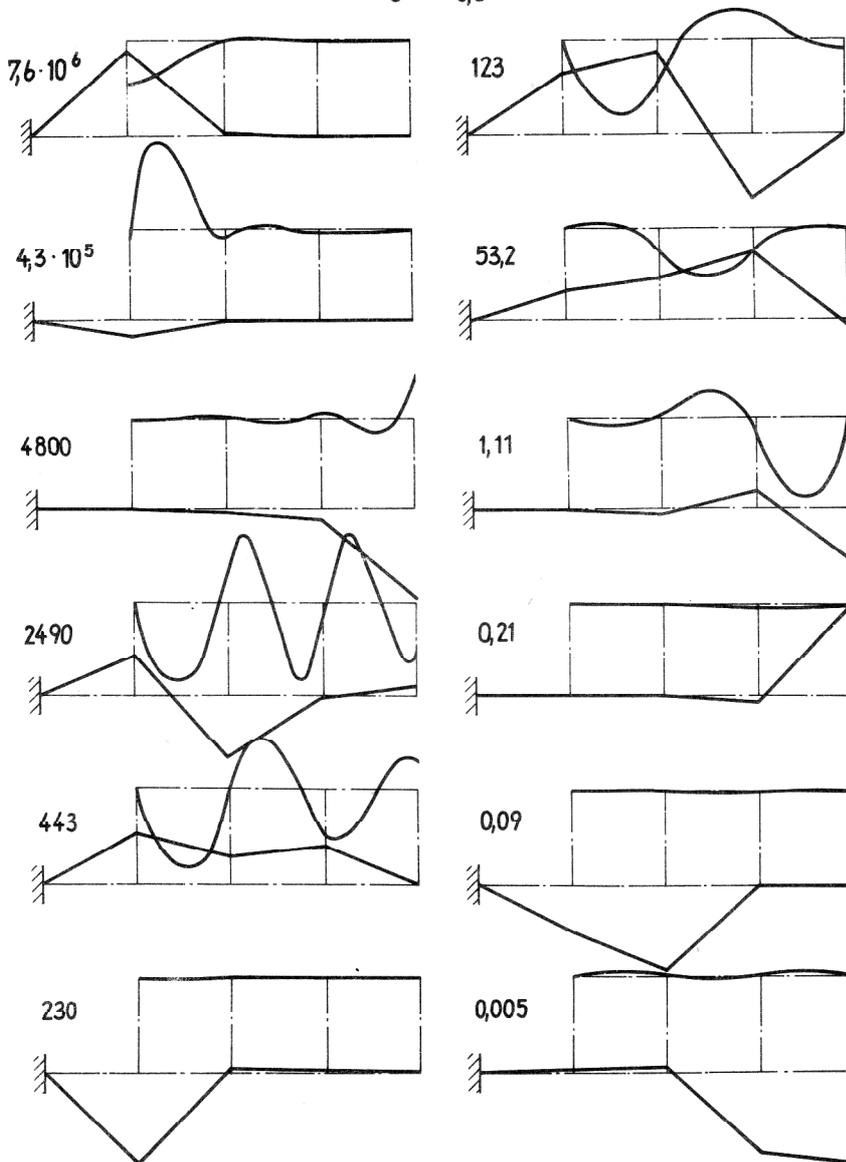


Bild 7
Schwingungsformen für $U' = 0,5$

Anschrift des Verfassers:
Dr.-Ing. J. Rößler
Technische Hochschule
Sektion Maschinen-Bauelemente
9010 Karl-Marx-Stadt
Straße der Nationen 62.

Testrechnungen stimmen qualitativ mit in der Literatur beschriebenen Erscheinungen für derartige Systeme überein.

Infolge der verwendeten Untersuchungsmethode (FEM) ist jedoch gegenüber den bisher beschriebenen Verfahren mit einer größeren Breite erfassbarer mechanischer Systeme zu rechnen.

Die Deutung der Ergebnisse und die Ableitung der überaus wichtigen Bedingungen für eine Entkopplung der über die Mechanismen gekoppelten Schwingungssysteme bedürfen noch weiterer Untersuchungen.

LITERATUR

- [1] Anwenderinformation zum Programm DAM. Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt.
- [2] Wulfson, J. I.: Dinamiceskie rascety ciklovyh mekhanizmov. izd. „Masinostroenie“, Leningrad 1976.
- [3] Göcke, H.; Rößler, J.: Kogean — Ein Algorithmus zur vollautomatisierten Analyse ebener Mechanismen, von der Berechnung bis zur lochbandgesteuerten Zeichnungsausgabe. Wiss. Z. Techn. Hochsch. Karl-Marx-Stadt 15 (1973) H. 1, S. 203 — 248.
- [4] Nguyen van Khang: Über eine Methode zur Lösung der Bewegungsgleichungen für ebene Mechanismen mit mehreren Freiheitsgraden. Wiss. Z. Techn. Hochsch. Karl-Marx-Stadt 17 (1975) H. 1, S. 59 — 70.
- [5] Gumpert, W.: Numerische Integration gewisser Bewegungsdifferentialgleichungen mit einem Doppelschrittverfahren. Wiss. Z. Techn. Hochsch. Karl-Marx-Stadt 17 (1975) H. 1, S. 53 — 58.
- [6] Fiedler, B.: Zur Berechnung von Schwingungen in Mechanismen von Verarbeitungsmaschinen. Textiltechnik 27 (1977) H. 9.
- [7] Auersperg, J.: Zur Untersuchung kleiner Schwingungen in ebenen Koppelgetrieben mit mehreren Freiheitsgraden. Diss. TH Karl-Marx-Stadt 1979.
- [8] Hertzsch, M.: Beitrag zur Analyse dynamischer Probleme an Kettenwirkmaschinen. Diss. TH Karl-Marx-Stadt 1980.
- [9] Klein, B.: Ein Beitrag zur rechnerunterstützten Analyse und Synthese ebener Gelenkgetriebe unter besonderer Berücksichtigung mathematischer Optimierungsstrategien und der Finite-Element-Methode. Diss. Ruhr-Universität Bochum 1977.
- [10] Van der Werff, K.: Kinematic and dynamic analysis of mechanisms, a finite element approach. Diss. Technische Hochschule Delft 1977.
- [11] Blechmann, I. I., Myskis, A. D., Panovko, J. G.: Prikladnaja matematika: predmet, logika, osobennosti podchodov. izd. „Naukova dumka“, Kiev 1976. (russ.)
- [12] Wulfson, J. I.: Ispol'zovanie ierarchii dinamiceskich modelej pri issledovanii kolebanij krupnyh ciklovyh sistem. „Mechanika masin“ 53. Izd. „Nauka“ 1978, S. 88 — 99. (russ.)
- [13] Dankert, J.: Numerische Methoden der Mechanik. Fachbuchverlag Leipzig 1977.
- [14] Wulfson, J. I.: Zur Methodik der Untersuchung erzwungener Schwingungen in einem verzweigten Mechanismensystem regulärer Struktur. Techn. Mech. 3 (1982) H. 1, S.