

Ein effektives Verfahren zur experimentellen Ermittlung von Systemkennfunktionen mit Hilfe von Pseudozufallssignalen

Friedrich Wahl

0. Einleitung

Moderne Verfahren der experimentellen Systemanalyse basieren auf der Nutzung von Klein- und Mikrorechnern in Verbindung mit dem Algorithmus der schnellen Fouriertransformation [1].

Die hohe Effektivität dieser modernen Verfahren ist u. a. darauf zurückzuführen, daß Erregersignale mit breitbandigem Spektrum (Stoßfunktionen, Sprungfunktionen, Zufallssignale) eingesetzt werden können.

Als besonders leistungsfähig haben sich Zufallssignale erwiesen, die auf digitalem Wege erzeugt werden.

Diese sogenannten Pseudozufallssignale verbinden die nützlichen Eigenschaften natürlicher Rauschsignale mit den für die diskrete Fouriertransformation wichtigen Eigenschaften periodischer Signale [2].

In den folgenden Ausführungen wird besonders auf die Erzeugung von Pseudozufallssignalen eingegangen und die rechentechnische Realisierung für das Hybridrechnersystem HRA 7200 erläutert. Dabei liegt der Schwerpunkt auf einer kurzen Darlegung wichtiger mathematischer Beziehungen zur Signalsynthese und -analyse auf der Grundlage der diskreten Fouriertransformation, wodurch das Verständnis des unter Pkt. 2.1. beschriebenen Funktionsprinzips erleichtert wird.

Die gezeigten Anwendungsbeispiele beschränken sich auf einige typische Aufgaben der experimentellen Systemanalyse. Bezüglich weiterer Anwendungen sei auf [3] und [4] verwiesen.

1. Grundlegende mathematische Beziehungen

1.1. Allgemeines

Im folgenden werden die für die Signalanalyse und -synthese erforderlichen Algorithmen kurz hergeleitet und zusammengestellt.

Den Betrachtungen wird ein Datenfeld von N -komplexen Werten zugrunde gelegt, das mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation vom Zeit- in den Frequenzbereich (bzw. vom Frequenz- in den Zeitbereich) transformiert werden kann. (vgl. Bild 1).

Das Transformationspaar lautet:

Transformation vom Zeit- in den Frequenzbereich

$$Z(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-j \frac{k 2\pi n}{N}} ; k = 0, 1, \dots, (N-1) \quad (1)$$

Transformation vom Frequenz- in den Zeitbereich

$$z(n) = \sum_{k=0}^{N-1} Z(k) e^{+j \frac{k 2\pi n}{N}} ; n = 0, 1, \dots, (N-1). \quad (2)$$

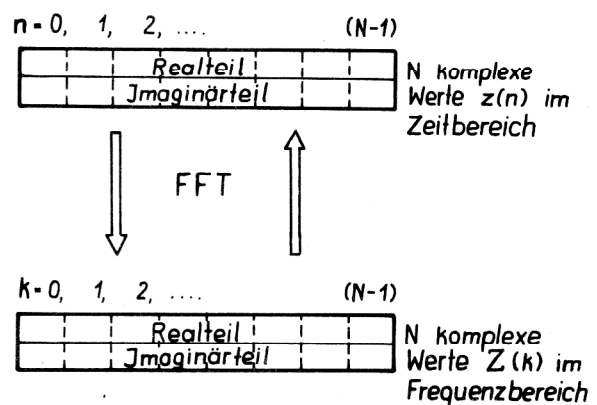


Bild 1
Schematische Darstellung der komplexen diskreten Fouriertransformation

Die rechentechnische Realisierung der Transformationen (1) und (2) erfolgt über den Algorithmus der schnellen Fouriertransformation (im weiteren FFT genannt).

1.2. Leistungsspektren reeller Signale

Die einseitigen Leistungsspektren zweier, zu äquidistanten Zeitpunkten parallel abgetasteter Signale $x(n)$ und $y(n)$ ergeben sich aus den Beziehungen

$$G_{xx}(k) = 2 X^*(k) \cdot X(k); \quad (3)$$

$$G_{yy}(k) = 2 Y^*(k) \cdot Y(k); \quad (4)$$

$$G_{xy}(k) = 2 X^*(k) \cdot Y(k). \quad (5)$$

Die Größen $X(k)$ und $Y(k)$ sind die komplexen halben Amplituden, die man aus den diskret vorliegenden Werten $x(n)$ und $y(n)$ mit Hilfe der FFT gewinnt.

Das effektivste Verfahren zur Berechnung der Größen $X(k)$ und $Y(k)$ besteht darin, die Folgen $x(n)$ und $y(n)$ auf den Real- und Imaginärteil des Datenfeldes

1) Die konjugiert-komplexen Werte werden mit einem Stern gekennzeichnet.

abzuspeichern und anschließend die komplexe FFT auszuführen.

Man erhält auf diese Weise ein komplexes (physikalisch nicht sinnvolles) Amplitudenspektrum, aus dem die gesuchten Amplituden $X(k)$ und $Y(k)$ berechnet werden können.

Dieses Vorgehen ist besonders bei der Ermittlung von Frequenzgängen und Kohärenzfunktionen sinnvoll, da man in diesem Fall die Leistungsspektren (3) bis (5) gleichzeitig benötigt.

Indem man die Folge $x(n)$ auf den Realteil, die Folge $y(n)$ auf den Imaginärteil abspeichert, bildet man die komplexe Folge

$$z(n) = x(n) + jy(n).$$

Das zugehörige Amplitudenspektrum ist dann

$$Z(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) + jy(n)] e^{-j \frac{k 2\pi n}{N}}; \quad (6)$$

$$k = 0, 1, \dots, (N-1).$$

Zur Berechnung der gesuchten Amplituden $X(k)$ und $Y(k)$ aus den $Z(k)$ benötigt man die aus (6) folgenden Beziehungen

$$Z(N-k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) + jy(n)] e^{+j \frac{k 2\pi n}{N}}; \quad (7)$$

$$Z^*(N-k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - jy(n)] e^{-j \frac{k 2\pi n}{N}} \quad (8)$$

Aus (7) und (8) erhält man mit

$$l = N-k \quad (9)$$

$$Z(k) + Z^*(l) = 2X(k),$$

$$Z(k) - Z^*(l) = 2jY(k),$$

woraus sich die gesuchten Amplituden ergeben zu

$$X(k) = \frac{1}{2} [Z(k) + Z^*(l)], \quad (10)$$

$$Y(k) = -\frac{1}{2j} [Z(k) - Z^*(l)], \quad k = 0, 1, \dots, (N-1). \quad (11)$$

Setzt man die Beziehungen (10) und (11) in die Ausgangsgleichungen (3) bis (5) ein, so erhält man die endgültigen Gleichungen zur gleichzeitigen Berechnung der Leistungsspektren. Für die praktische Berechnung werden nur die Spektralwerte bis einschließlich zur Nyquist-Frequenz ($k = N/2$) benötigt, da die Amplituden $X(k)$ und $Y(k)$ konjugiert – komplex bezüglich dieser Frequenz sind. Das erkennt man unmittelbar aus den Gleichungen (10) und (11), aus denen folgt

$$X(l) = X^*(k),$$

$$Y(l) = Y^*(k).$$

Ein Sonderfall ergibt sich für $k = 0$ (DC-Komponente). Da die diskrete Fouriertransformation für $k = 0$ bereits die volle Amplitude liefert, entfällt in den Beziehungen (3) bis (5) der Faktor 2.

Zerlegt man die komplexen Spektralwerte $Z(k)$ in Real- und Imaginärteil gemäß $Z(k) = Z_{kr} + jZ_{ki}$, so erhält man die folgenden Gleichungen zur Bestimmung der Leistungsspektren:

Leistungsspektrum G_{xx}

$$G_{xx}(k) = \frac{1}{2} [(Z_{kr} + Z_{lr})^2 + (Z_{ki} - Z_{li})^2]; \quad (12)$$

$$G_{xx}(\bar{0}) = Z_{or}^2; \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

$$l = N-k$$

Leistungsspektrum G_{yy}

$$G_{yy}(k) = \frac{1}{2} [(Z_{ki} + Z_{li})^2 + (Z_{kr} - Z_{lr})^2]; \quad (13)$$

$$G_{yy}(\bar{0}) = Z_{oi}^2; \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

$$l = N-k$$

Kreuzleistungsspektrum G_{xy}

Realteil

$$G_{xy}(k) = (Z_{lr} \cdot Z_{ki} + Z_{kr} \cdot Z_{li}); \quad (14)$$

$$G_{xy}(\bar{0}) = Z_{or} \cdot Z_{oi}; \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

$$l = N-k$$

Imaginärteil

$$G_{xy}(k) = \frac{1}{2} (Z_{lr}^2 + Z_{li}^2 - Z_{kr}^2 - Z_{ki}^2); \quad (15)$$

$$G_{xy}(\bar{0}) = 0; \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

$$l = N-k$$

1.3. Frequenzgang und Kohärenzfunktion

Mit den unter Pkt. 1.2. bereitgestellten Beziehungen ergibt sich folgender Ablauf zur Bestimmung von Frequenzgängen und Kohärenzfunktionen:

Die Ein- und Ausgangssignale des zu untersuchenden Systems werden parallel erfaßt und als komplexe Folge $z(n)$ abgespeichert;

Ausführen der komplexen FFT (Bereitstellen der komplexen Spektralwerte $Z(k)$);

Bestimmung der Leistungsspektren nach (12) bis (15);

Mitteilung der Leistungsspektren durch Analyse mehrerer statistisch unabhängiger Vorgänge;

Berechnung des Frequenzganges

$$H(k) = \frac{\overline{G_{xy}}}{\overline{G_{xx}}}; \quad (16)$$

2) Die gemittelten Größen werden durch einen Querstrich gekennzeichnet.

$$[H(k)]^2 = \frac{\bar{G}_{xy} \cdot \bar{G}_{xy}^*}{\bar{G}_{xx}^2}; \quad (17)$$

– Berechnung der Kohärenzfunktion

$$\gamma^2(k) = \frac{\bar{G}_{xy} \cdot \bar{G}_{xy}^*}{\bar{G}_{xx} \cdot \bar{G}_{yy}}; \quad k = 0, 1, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right). \quad (18)$$

1.4. Erzeugung von Pseudozufallssignalen

Große praktische Bedeutung gewinnt die inverse FFT bei der Erzeugung von sog. Pseudozufallssignalen. Das in [5] beschriebene Verfahren ist im Bild 2 schematisch dargestellt: Es wird ein komplexes Amplitudenspektrum $Z(k)$ mit bekannten Beträgen und zufälligen Phasenwinkeln vorgegeben. Die Rücktransformation in den Zeitbereich liefert die reelle Punktfolge $z(n)$. Dabei muß berücksichtigt werden, daß bei reellen Signalen die Spektralwerte konjugiert-komplex bezüglich der Nyquist-Frequenz sind. Um N reelle Werte $z(n)$ im Zeitbereich zu erhalten, müssen vor der Rücktransformation $(2N)$

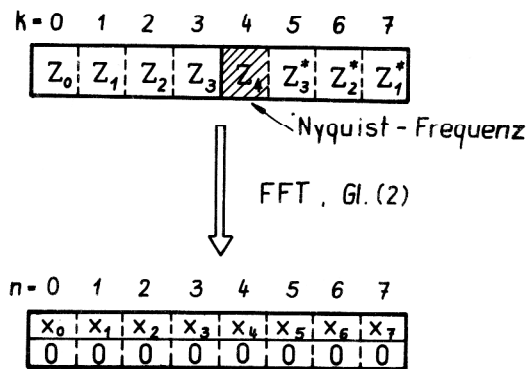


Bild 2
Inverse Fouriertransformation zur Erzeugung reeller Signale (Beispiel $N = 8$)

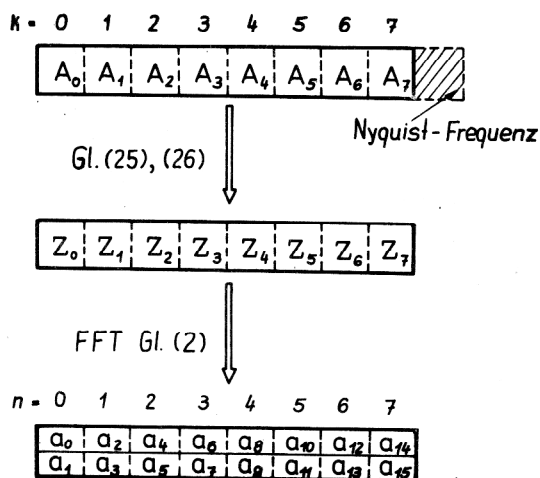


Bild 3
Erzeugung komplexer Signale (Beispiel $N = 8$)

komplexe Spektralwerte bereitgestellt werden, von denen $(N/2 - 1)$ Werte konjugiert – komplex bezüglich Spektralwertes $Z(k = N/2)$ sind.

Der Nachteil dieses Verfahrens besteht darin, daß nur die Hälfte des für die FFT erforderlichen Speicherbereiches genutzt wird. Im folgenden wird gezeigt, wie die Redundanz dieses Verfahrens durch Erzeugen einer komplexen Punktfolge beseitigt werden kann.

Das Prinzip ist im Bild 3 schematisch dargestellt. Aus einem vorgegebenen Amplitudenspektrum $A(k)$ wird zunächst ein komplexes, physikalisch nicht sinnvolles Amplitudenspektrum $Z(k)$ so bestimmt, daß die Rücktransformation N komplexe, bzw. $2N$ reelle Werte im Zeitbereich liefert.

Die Methode soll zunächst anhand der Transformation in den Frequenzbereich erläutert werden.

Die reelle, durch Abtastung eines Signals erzielte Folge

$$a(n), \quad n = 0, 1, \dots, (2N-1)$$

wird in eine komplexe Folge

$$z(n), \quad n = 0, 1, \dots, (N-1)$$

zerlegt, indem die Werte $a(n)$ mit geradem Index den Realteil, die Werte $a(n)$ mit ungeradem Index den Imaginärteil bilden. Man erhält

$$z_0 = a_0 + ja_1 = x_0 + jy_0$$

$$z_1 = a_2 + ja_3 = x_1 + jy_1$$

⋮

⋮

$$z_{(N-1)} = a_{(2N-2)} + ja_{(2N-1)} = x_{(N-1)} + jy_{(N-1)}$$

Die auf diese Weise gebildete komplexe Folge

$$z(n) = x(n) + jy(n); \quad n = 0, 1, \dots, (N-1)$$

wird in den Frequenzbereich transformiert.

Aus den so erhaltenen Spektralwerten $Z(k)$ werden mit den Gleichungen (10) und (11) N komplexe Spektralwerte $X(k)$ und $Y(k)$ errechnet. Durch Überlagerung beider Spektren erhält man das gesuchte Amplitudenspektrum $A(k)$ der Ausgangsfolge $a(n)$. Dabei wird die scheinbare Zeitverschiebung der Folge $y(n)$ gegenüber $x(n)$ durch eine „Rückdrehung“ im Spektralbereich korrigiert.

$$A(k) = \frac{1}{2} [X(k) + Y(k) e^{-j \frac{\pi k}{N}}]; \quad k = 0, 1, \dots, (N-1).$$

(19)

Gleichung (19) gestattet es, aus einem vorgegebenen Amplitudenspektrum von N komplexen Werten $A(k)$ wieder eine komplexe Punktfolge $z(n)$ zu berechnen, deren Real- und Imaginärteile die gesuchte reelle Folge $a(n)$ bilden.

Mit

$$A^*(l) = \frac{1}{2} [X(k) - Y(k) e^{-j \frac{\pi k}{N}}]; \quad k = 0, 1, \dots, (N-1)$$

$$l = (N-k)$$

(20)

erhält man aus (19) und (20) die Beziehungen

$$A(k) + A^*(l) = X(k), \quad \pi k \quad (21)$$

$$A(k) - A^*(l) = Y(k) e^{-j \frac{\pi k}{N}}. \quad (22)$$

Die Werte $X(k)$ und $Y(k)$ können gemäß (10) und (11) ersetzt werden:

$$A(k) + A^*(l) = \frac{1}{2} [Z(k) + Z^*(l)]; \quad (23)$$

$$A(k) - A^*(l) = \frac{1}{2} j [Z(k) - Z^*(l)] e^{-j \frac{\pi k}{N}}. \quad (24)$$

Daraus erhält man schließlich:

$$Z(k) = [A(k) + A^*(l)] + j [A(k) - A^*(l)] e^{+j \frac{\pi k}{N}}; \quad (25)$$

$$k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}.$$

Aus rechen-technischen Gründen wird die Folge $Z(l)$ aus Gl. (23) gesondert berechnet:

$$Z(l) = -Z^*(k) + 2A^*(k) + 2A(l); \quad (26)$$

$$k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2};$$

$$l = (N-k).$$

Der Rechenablauf zur Erzeugung von $2N$ reellen Werten $a(n)$ im Zeitbereich aus N komplexen Werten $A(k)$ im Spektralbereich läßt sich in folgenden Schritten ausführen:

- Vorgabe von N komplexen Amplituden $A(k)$;
- Berechnung der Spektralwerte $Z(k)$ und $Z(l)$ entsprechend den Gleichungen (25) und (26);
- Ausführung der inversen FFT nach Gl. (2).

2. Experimentelle Ermittlung komplexer Frequenzgänge

2.1. Funktionsprinzip und rechen-technische Realisierung

Das unter Pkt. 1.4. beschriebene Verfahren zur Erzeugung von Pseudozufallssignalen wurde für das Hybridrechnersystem HRA 7200 realisiert. Die experimentelle Untersuchung dynamischer Systeme auf der Grundlage der Frequenzgang- und Kohärenzanalyse erfordert im allg. zwei parallel betriebene Analog-Digital-Umsetzer (ADU). Da das Hybridrechnersystem HRA 7200 über nur einen ADU verfügt, wurde ein besonderes Prinzip der Signalausgabe und der Meßwerterfassung entwickelt. Im Bild 4 ist dieses Prinzip dargestellt.

Die im Speicher des Rechners bereitgestellten $2N$ Werte des Pseudozufallssignals $a(n)$ werden über einen Digital-Analog-Umsetzer (DAU) ausgegeben. Gleichzeitig erfolgt abwechselnd die Erfassung der Ein- und Ausgangssignale des zu untersuchenden Systems.

Dieses Vorgehen erfordert eine spezielle Betrachtung über den zulässigen Frequenzgehalt des Testsignals $a(n)$: Da die Taktfrequenz der Meßwerterfassung des jeweiligen Meßsignals nur die Hälfte der externen Taktfrequenz beträgt, darf im Signal $a(n)$ als höchste Frequenz nur die Nyquist-Frequenz der Meßwerterfassung erscheinen.

Die obere Hälfte des Spektrum $A(k)$ für $k > N/2 - 1$ muß also gelöscht werden, da es sonst zu sog. aliasing-Effekten kommt. Die Forderung $A(k) = 0$ für $k > N/2 - 1$ entspricht wegen $l = N - k$ der Bedingung $A(l) = 0$ für $l < N/2 + 1$. Damit vereinfachen sich die grundlegenden Gleichungen (25) und (26). Man erhält:

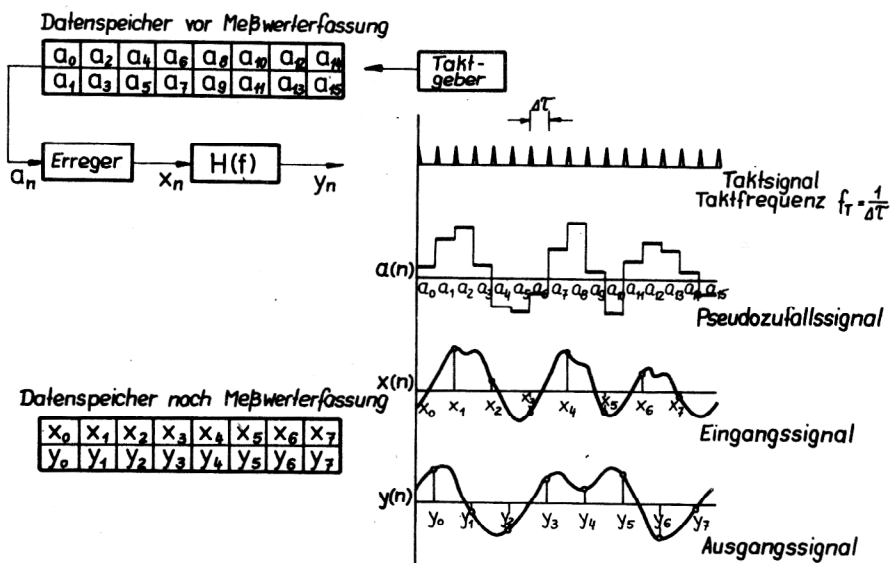


Bild 4 Funktionsprinzip der Signalausgabe und der Meßwerterfassung

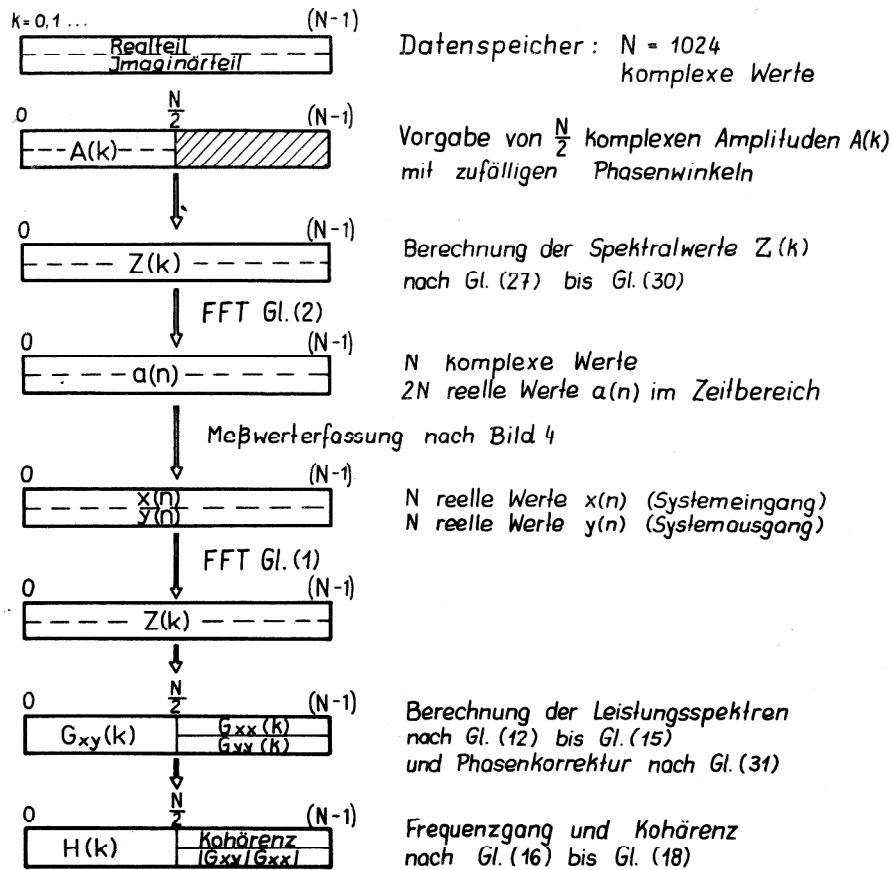


Bild 5
Schematische Darstellung des Gesamtprogramms

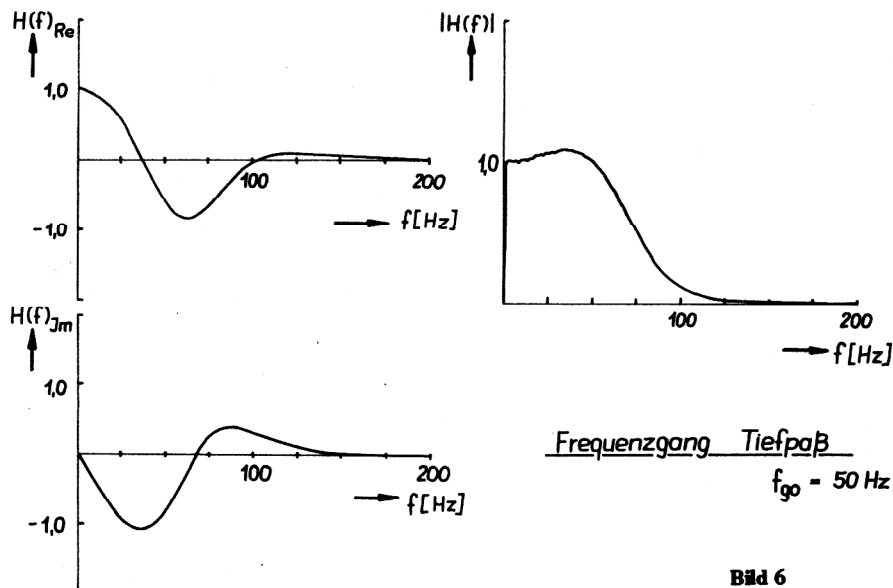


Bild 6
Komplexer Frequenzgang eines Tiefpasses

$$Z(k) = A(k) + jA(k) e^{j \frac{\pi k}{N}}; \quad (27)$$

$$Z(l) = -Z^*(k) + 2A^*(k); \quad (28)$$

$$k = 1, 2, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right);$$

$$l = N - k.$$

Außerdem ist es zweckmäßig, bei praktischen Anwendungen die DC-Komponente und den Frequenzanteil der Nyquist-Frequenz Null zu setzen. Das bedeutet:

$$Z(k=0) = 0, \quad (29)$$

$$Z\left(k = \frac{N}{2}\right) = 0. \quad (30)$$

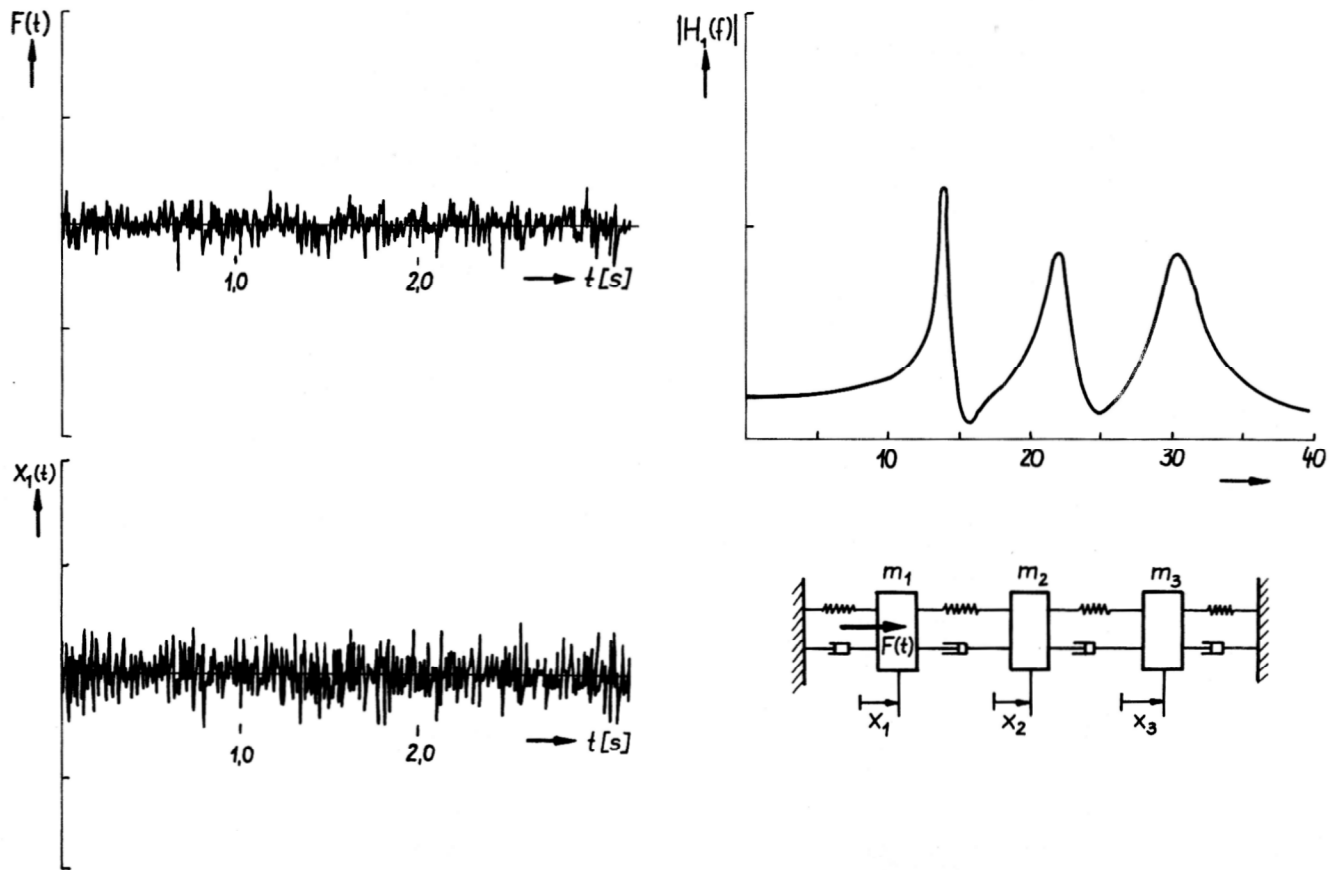


Bild 7
Amplitudengang eines Analogrechnermodells

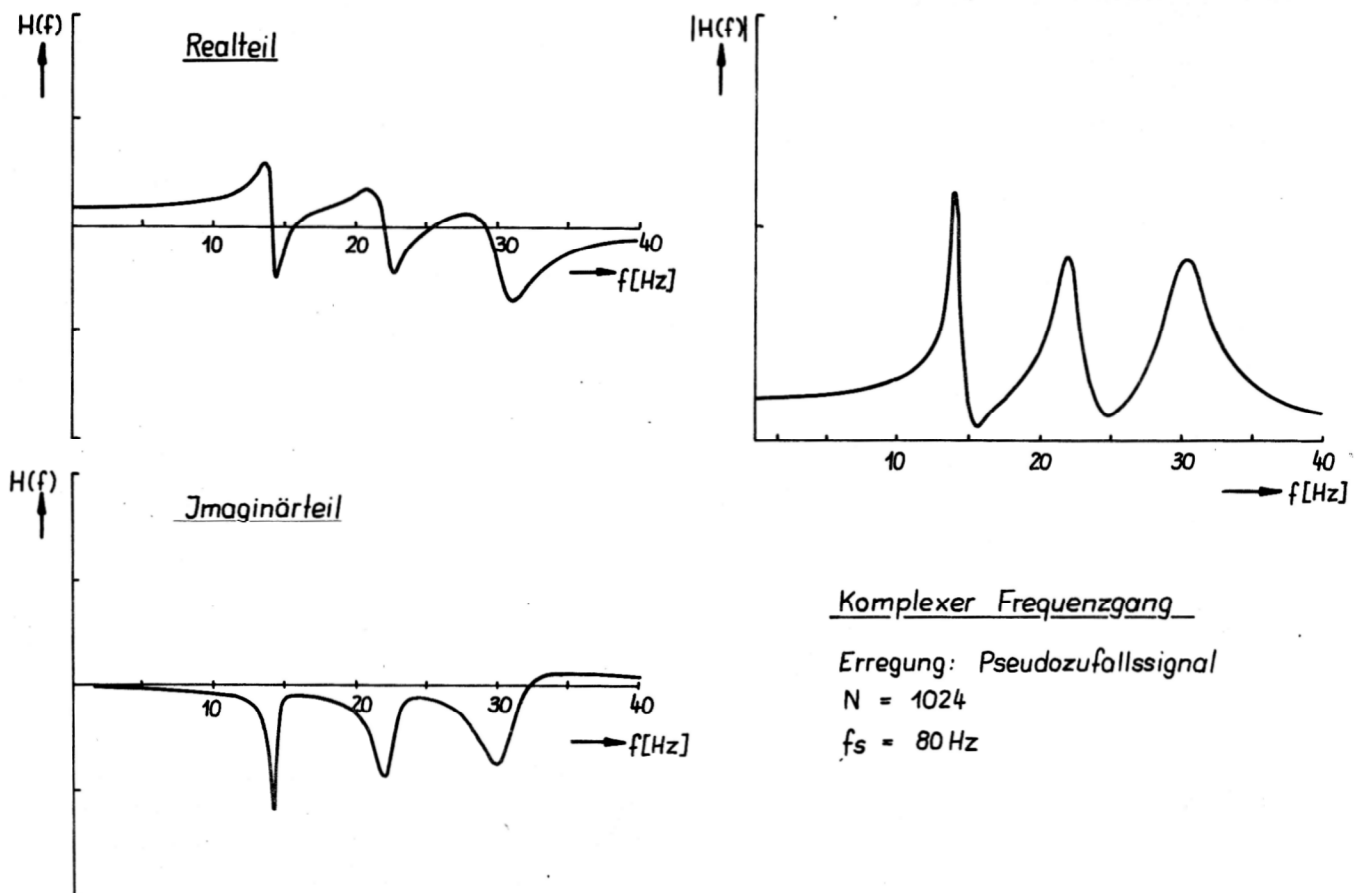


Bild 8
Komplexer Frequenzgang des im Bild 7 dargestellten Modells

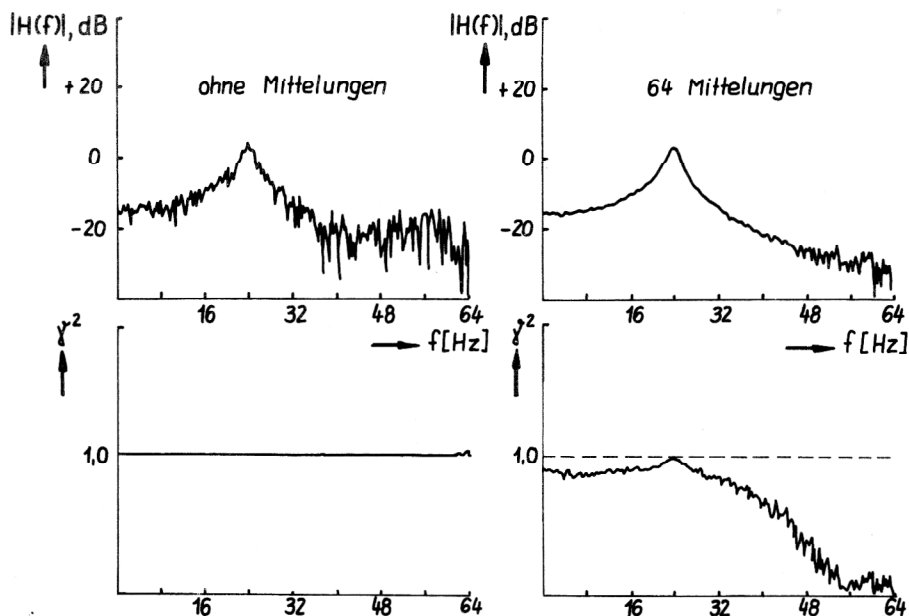


Bild 9
Amplitudengänge und Kohärenzfunktionen eines nichtlinear gestörten Systems

Die Werte $A(k)$ werden nicht gesondert berechnet, sondern sie werden der für den FFT-Algorithmus bereitgestellten Tabelle der Exponentialfunktion entnommen. Dabei wird der Speicherzugriff über gleichverteilte Zufallszahlen gesteuert, die durch ein Schieberegister mit Rückkopplung erzeugt werden [3].

Eine weitere Konsequenz des beschriebenen Prinzips besteht darin, daß nach der Berechnung der Leistungsspektren die scheinbare Zeitverschiebung der Folge $y(n)$ gegenüber $x(n)$ im Frequenzbereich durch eine Phasenkorrektur des Kreuzleistungsspektrums berücksichtigt werden muß.

Man erhält für die korrigierten Spektralwerte:

$$G_{xy}(k) = \tilde{G}_{xy}(k) \cdot e^{-j \frac{\pi k}{N}} \quad (31)$$

Ein grober Ablauf der rechen-technischen Realisierung des Gesamtprogramms (Signalerzeugung, Meßwertfassung, Ermittlung der Kennfunktionen des Systems) wird anhand des Datenspeichers im Bild 5 verdeutlicht.

2.2. Anwendungsbeispiele

Das beschriebene Verfahren wurde an Analogrechner-Modellen, an elektronischen und mechanischen Systemen erprobt. Zu den möglichen Anwendungen gehören:

Messung der Frequenzgänge elektronischer Meßgeräte oder ganzer Meßketten, besonders in tiefen Frequenzbereichen (Beispiel Bild 6).

Messung der Frequenzgänge von Analogrechner-Modellen (Bilder 7 und 8) zur Parameteroptimierung dynamischer Systeme.

Experimentelle Bestimmung der dynamischen Eigenschaften mechanischer Systeme.

Bei der Untersuchung mechanischer Systeme erweisen sich Pseudozufallssignale als außerordentlich leistungsfähig. Besonders wegen ihrer Unempfindlichkeit gegenüber Störungen ermöglichen sie experimentelle Untersuchungen, die mit herkömmlicher analoger Meßtechnik nicht durchgeführt werden können. Bild 9 zeigt den Betrag des Frequenzgangs und die zugehörige Kohärenzfunktion eines nichtlinear-gestörten Systems.

Es ist deutlich zu erkennen, wie die Mittelungen im Spektralbereich zu einer spürbaren Glättung und damit zu brauchbaren Ergebnissen führen.

LITERATUR

- [1] Richardson, M.: Modal Analysis using Test Systems. Seminar on Understanding Digital Control and Analysis in Vibration Test Systems, Shock and Vibration Information Center publication, May 1975.
- [2] Wahl, F.: Erzeugung, Analyse und Anwendung von Pseudozufallssignalen. Vorträge zum Problemseminar stochastische Schwingungen und Identifikation, TU Dresden, Heft 3/1978, S. 58 – 69.
- [3] Forschungsberichte. Experimentelle und theoretische Ermittlung stochastischer Kenngrößen. TH Magdeburg, 1980, unveröffentlicht.
- [4] Wahl, F.: Experimentelle Ermittlung komplexer Frequenzgänge mit Hilfe von Pseudozufallssignalen. Tagungsberichte 2. Tagung Stochastische Schwingungen und Zuverlässigkeit, Eisenach 1980, ZIMM-Eigenverlag, S. 129 – 132.
- [5] Styles, D. D., Dodds, D. J.: Simulation of random environments for structural dynamics testing. Experimental Mechanics 16, 11, 416 – 424 (Nov. 1976).

Anschrift des Verfassers:
Dr.-Ing. Friedrich Wahl
Technische Hochschule Otto von Guericke
Sektion Maschinenbau
3010 Magdeburg, PSF 124