

Die Berechnung beliebiger, physikalisch nichtlinearer Schalen mittels finiter Streifenelemente

D. Weber

1. Einleitung

Im folgenden Beitrag wird eine Übersicht über die physikalischen Grundlagen und angewandten mathematischen Methoden des Programmes EPSCHA (Elastisch-plastische Berechnung beliebiger Schalen) gegeben, wobei jedoch auf das verwendete Deformationsgesetz nicht näher eingegangen wird. Dieses wurde bereits in [2] ausführlich dargestellt. Unter dem Begriff „beliebige Schalen“ sollen dabei offene Schalen mit 4 Rändern bzw. geschlossene Schalen mit 2 Rändern gemeint sein, die keine weiteren Ausschnitte enthalten und deren Schalenmittelfläche (SMF) sich somit durch eine nicht singuläre Vektorfunktion

$$\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2) \quad \text{mit}$$

$$\vec{r} = \sum \bar{x}_k \vec{e}_k$$

auf ein viereckiges Gebiet abbilden läßt

\bar{x}_k : kartesische Koordinaten, $k = 1, 2, 3$

x^1, x^2 : Gaußsche Koordinaten zur Beschreibung der SMF

Im Elementkatalog des Programms sind bisher 6 Flächentypen enthalten, für die alle geometrischen Größen exakt berechnet werden. Dieser Katalog kann leicht durch die Aufnahme weiterer Flächentypen ergänzt werden.

Die Rechnung erfolgt mit normierten Gaußschen Koordinaten, die Schalendicke kann sich bilinear mit den Flächenkoordinaten ändern.

2. Die Verwendung orthogonaler Kraft- und Verschiebungsgrößen

Zur Ermittlung der Schalenschnittgrößen wurde ein orthogonales Basissystem zugrunde gelegt, obwohl die Beschreibung der Schalengeometrie mit krummlinigen und schiefwinkligen Flächenkoordinaten erfolgen kann. Das hat die Vorteile, daß das Deformationsgesetz in orthogonalen Tensorkomponenten verwendet werden kann und Normal- und Schubspannungen voneinander von vornherein getrennt sind. Natürlich muß dabei in Kauf genommen werden, daß die Flächenkoordinaten x^1 und x^2 nicht mehr gleichberechtigt behandelt werden können und die bequeme Schreibweise bei der Behandlung der Theorie verloren geht. Da die unterschiedliche Behandlung der Koordinatenrichtungen wegen des angewendeten Rechenverfahrens (Ansätze in x^2 -Richtung,

Integration in x^1 -Richtung) sowieso unumgänglich ist, bringt das für den Rechenablauf keine Nachteile. In Bild 1 ist das verwendete Grundsystem dargestellt

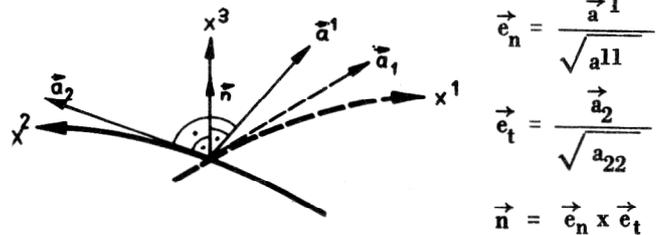


Bild 1

\vec{a}_1, \vec{a}_2 : kovariantes Basissystem (Tangentenvektoren) i. a. nicht orthogonal, keine Einheitsvektoren

\vec{a}^1 : kontravarianter Basisvektor \vec{a}^1 , orthogonal zu \vec{a}_2 , i. a. kein Einheitsvektor

\vec{n} : Normalenvektor zur SMF (Einheitsvektor)

\vec{e}_n : Einheitsvektor normal zum Schnitt $x^1 = \text{const.}$

\vec{e}_t : Einheitsvektor in x^2 -Richtung

a_{11}, a_{12}, a_{22} : Metrikoeffizienten

$$a = a_{11} a_{22} - a_{12}^2, \quad a^{11} = \frac{a_{22}}{a}$$

Mit der Einführung der Einheitsvektoren \vec{e}_n, \vec{e}_t ist es möglich, den Verschiebungsvektor \vec{v} und den Verdrehvektor $\vec{\omega}$ entsprechend Bild 2 in orthogonalen physikalischen Komponenten in „ko-kontravarianter“ Schreibweise darzustellen

$$\vec{u} = v_n \vec{e}_n + v_t \vec{e}_t + w \vec{n} \quad (1)$$

$$\vec{\omega} = \psi \vec{e}_n - \varphi \vec{e}_t \quad (2)$$

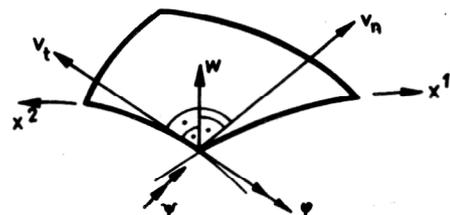


Bild 2

Benutzt man zur Diskretisierung des Schalenkontinuums in x^1 -Richtung eine Abschnittseinteilung entsprechend dem Übertragungsmatrizenverfahren (Linie $x^2 = \text{const.}$) und in x^2 -Richtung Ansatzfunktionen für v_n, v_t, w, φ ,

so ergibt sich als Teilelement ein finites Streifenelement mit den Abmessungen $x^1 \div x^1 + \Delta x^1$, $x^2 = 0 \div x^2 = 1$, wie es im Bild 3 gezeigt wird

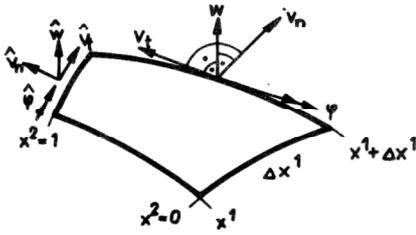


Bild 3

An den Rändern $x^2 = \text{const.}$ werden auch entsprechende orthogonale Verschiebungsgrößen definiert, die sich durch folgende Lineartransformationen

$$\hat{v}_n = -\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} v_n + \sqrt{\frac{a}{a_{11} a_{22}}} v_t$$

$$\hat{v}_t = \sqrt{\frac{a}{a_{11} a_{22}}} v_n + \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} v_t$$

$$\hat{w} = w$$

$$\hat{\varphi} = -\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} \varphi + \sqrt{\frac{a}{a_{11} a_{22}}} \psi$$

ergeben, so daß die Randbedingungen einfach zu formulieren sind.

3. Ableitung der Kanonischen Differentialgleichungen aus dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie

3.1. Physikalische Grundlagen

Ausgehend von dem im 2. Abschnitt dargestellten Grundsystem und den Gleichungen (1) und (2) kann der Verschiebungsvektor für den Schalenraum wie folgt geschrieben werden:

$$\vec{u} = (v_n - z \varphi) \vec{e}_n + (v_t - z \psi) \vec{e}_t + w \vec{n} \quad (3)$$

mit

$$z = x^3$$

Nimmt man an, daß alle Punkte einer Normalen zur Schalenmittelfläche der undeformierten Schale auch nach der Verformung auf einer Normalen zur Schalenmittelfläche liegen (analog zur Kirchhoffschen Hypothese bei Platten) ergibt sich für φ und ψ

$$\varphi = \frac{b_{11}^1}{a_{11}} v_n + \frac{b_2^1}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} v_t + \sqrt{a_{11}} w_{,1} + \frac{a^{12}}{\sqrt{a_{11}}} w_{,2} \quad (4)$$

$$\psi = \frac{b_2^1}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} v_n + \frac{b_{22}^1}{a_{22}} v_t + \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} w_{,2} \quad (5)$$

Dabei sind b^{11} , b_2^1 , b_{22}^1 Komponenten des Krümmungstensors und a^{12} ist wiederum ein Metrikoeffizient (es gilt $a^{12} = 0$, wenn x^1 , x^2 orthogonal).

Desweiteren Soll

Desweiteren soll „ α “ die partielle Ableitung der entsprechenden Größe nach x^α bedeuten.

Gl. (4) wird dabei später als Zwangsbedingung benutzt, da in ihr die Ableitung $w_{,1}$ vorkommt. Gl. (5) dient als Eliminationsgleichung für ψ im Verlauf der weiteren Rechnung.

Da die Schalenberechnung nur für kleine Verformungen erfolgen soll, wird der Green'sche Verzerrungstensor der Form

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\vec{g}_\alpha \vec{u}_{,\beta} + \vec{g}_\beta \vec{u}_{,\alpha}) \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (6)$$

verwendet.

Dabei sind \vec{g}_α , \vec{g}_β kovariante Basisvektoren des Schalenraumes. Mit Hilfe der Einheitsvektoren \vec{e}_n und \vec{e}_t gelingt es, die physikalischen Komponenten des Verzerrungstensors in n- bzw. t-Richtung zu bestimmen.

Man erhält

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{nn} &= (\vec{e}_n \vec{g}^\alpha) \vec{g}_\alpha (\vec{e}_n \vec{g}^\beta) \vec{u}_{,\beta} \\ \epsilon_{tt} &= (\vec{e}_t \vec{g}^\alpha) \vec{g}_\alpha (\vec{e}_t \vec{g}^\beta) \vec{u}_{,\beta} \\ \epsilon_{nt} &= \frac{1}{2} [(\vec{e}_n \vec{g}^\alpha) \vec{g}_\alpha (\vec{e}_t \vec{g}^\beta) \vec{u}_{,\beta} + (\vec{e}_t \vec{g}^\alpha) \vec{g}_\alpha (\vec{e}_n \vec{g}^\beta) \vec{u}_{,\beta}] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Die Vektoren \vec{g}^α , \vec{g}^β erhält man aus \vec{g}_α , \vec{g}_β durch Heraufziehen der Indizes mit Hilfe der Metrikoeffizienten.

Macht man für $\vec{u}_{,\beta}$ einen Ansatz in orthogonalen Komponenten der Form

$$\vec{u}_{,\beta} = d_{n\beta} \vec{e}_n + d_{t\beta} \vec{e}_t + d_\beta \vec{n}, \quad (8)$$

so ergibt sich nach dessen Einsetzen in die Formeln (7)

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{nn} &= (\vec{e}_n \vec{g}^\beta) d_{n\beta} \\ \epsilon_{tt} &= (\vec{e}_t \vec{g}^\beta) d_{t\beta} \\ \epsilon_{nt} &= \frac{1}{2} [(\vec{e}_t \vec{g}^\beta) d_{n\beta} + (\vec{e}_n \vec{g}^\beta) d_{t\beta}] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Die Größen $d_{n\beta}$, $d_{t\beta}$, d_β ergeben sich aus Differentiation von (3) und Koeffizientenvergleich zu

$$\left. \begin{aligned}
d_{n\beta} &= v_{n,\beta} - z\varphi_{,\beta} + \frac{\Gamma_{2\beta}^1}{\sqrt{a^{11}} a_{22}} (v_t - z\psi) - \frac{b_\beta^1}{\sqrt{a^{11}}} w \\
d_{t\beta} &= v_{t,\beta} - z\psi_{,\beta} - \frac{\Gamma_{2\beta}^1}{\sqrt{a^{11}} a_{22}} (v_n - z\varphi) - \frac{b_{\beta 2}}{\sqrt{a_{22}}} w \\
d_\beta &= w_{,\beta} + \frac{b_\beta^1}{\sqrt{a^{11}}} (v_n - z\varphi) + \frac{b_{\beta 2}}{\sqrt{a_{22}}} (v_t - z\psi)
\end{aligned} \right\} \begin{aligned}
& - \left(\frac{b_2^1}{a} \right)_{,2} v_n - \left(\frac{b_{22}}{a_{22}} \right)_{,2} v_t - \left(\frac{1}{\sqrt{a_{22}}} \right)_{,2} w_{,2} \\
& + \frac{\Gamma_{22}^1}{a} \varphi
\end{aligned} \quad (10)$$

Die ersten beiden Gleichungen von (10) kann man in von z unabhängige bzw. von z linear abhängige Glieder zerlegen

$$\left. \begin{aligned}
d_{n\beta} &= d_{n\beta 0} + z d_{n\beta 1} \\
d_{t\beta} &= d_{t\beta 0} + z d_{t\beta 1}
\end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Die letzte Gleichung von (10) wird für die weitere Berechnung nicht benötigt.

Für $\beta = 1, 2$ ergibt sich für $d_{n\beta 0}$, $d_{n\beta 1}$, $d_{t\beta 0}$ und $d_{t\beta 1}$ folgender ausgeschriebener Formelapparat, wobei schon ψ mittels (5) eliminiert wurde:

$$\left. \begin{aligned}
d_{n10} &= v_{n,1} + \frac{\Gamma_{21}^1}{a} v_t - \frac{b_1^1}{\sqrt{a^{11}}} w \\
d_{n20} &= v_{n,2} + \frac{\Gamma_{22}^1}{a} v_t - \frac{b_2^1}{\sqrt{a^{11}}} w \\
d_{t10} &= v_{t,1} - \frac{\Gamma_{21}^1}{a} v_n - \frac{b_{12}}{\sqrt{a_{22}}} w \\
d_{t20} &= v_{t,2} - \frac{\Gamma_{22}^1}{a} v_n - \frac{b_{22}}{\sqrt{a_{22}}} w \\
d_{n11} &= -\varphi_{,1} - \frac{\Gamma_{21}^1}{a} \left(\frac{b_2^1}{a} v_n + \frac{b_{22}}{a_{22}} v_t + \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} w_{,2} \right) \\
d_{n21} &= -\varphi_{,2} - \frac{\Gamma_{22}^1}{a} \left(\frac{b_2^1}{a} v_n + \frac{b_{22}}{a_{22}} v_t + \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} w_{,2} \right) \\
d_{t11} &= -\frac{b_2^1}{a} v_{n,1} - \frac{b_{22}}{a_{22}} v_{t,1} - \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} w_{,12} - \\
& - \left(\frac{b_2^1}{a} \right)_{,1} v_n - \left(\frac{b_{22}}{a_{22}} \right)_{,1} v_t - \left(\frac{1}{\sqrt{a_{22}}} \right)_{,1} w_{,2} \\
& + \frac{\Gamma_{21}^1}{a} \varphi \\
d_{t21} &= -\frac{b_2^1}{a} v_{n,2} - \frac{b_{22}}{a_{22}} v_{t,2} - \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} w_{,22}
\end{aligned} \right\}$$

Dabei wurde \bar{a} als Abkürzung für $\sqrt{a^{11}} a_{22}$ benutzt. Die Christoffelsymbole Γ_{21}^1 und Γ_{22}^1 sind geometrische Größen und werden ebenso wie die Krümmungen vom Programm exakt berechnet.

Die in (7) vorkommenden Produkte aus den Basisvektoren der SMF mit denen des Schalenraumes \vec{g}^β der Form

$$\vec{a}^1 \vec{g}^\beta = S^1 \beta \quad \text{und} \quad \vec{a}_2 \vec{g}^\beta = S_2^\beta$$

ergeben die zugehörigen Komponenten des Schalentensors. Sie stellen die Verbindung zwischen den Größen der SMF und des Schalenraumes her. Sie berechnen sich aus

$$\left. \begin{aligned}
S^1 \beta &= \sqrt{\frac{a}{g}} \left[a^{1\beta} - z(a^{1\beta} b_\gamma^\gamma - b^{1\beta}) \right] \\
S_2^\beta &= \sqrt{\frac{a}{g}} \left[\delta_2^\beta - z(\delta_2^\beta b_\gamma^\gamma - b_2^\beta) \right]
\end{aligned} \right\} \quad (13)$$

mit

$$\sqrt{\frac{g}{a}} = 1 - z b_\beta^\beta + z^2 (b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1) \quad (14)$$

In den obigen Gleichungen ist δ_2^β ein Kroneckersymbol, b_β^β die doppelte mittlere Krümmung und der Klammerinhalt in (14) die Gaußsche Krümmung.

Für $\beta = 1, 2$ ergeben sich demnach 4 Schalentensorkomponenten und in Verbindung mit $\sqrt{a^{11}}$ und $\sqrt{a_{22}}$ die 4 Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned}
F_1 &= \frac{S^{11}}{\sqrt{a^{11}}}, \quad F_2 = \frac{S_2^1}{\sqrt{a_{22}}}, \quad F_3 = \frac{S^{12}}{\sqrt{a^{11}}}, \\
F_4 &= \frac{S_2^2}{\sqrt{a_{22}}}
\end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Die Abhängigkeit der Verzerrungen von der Schalenraumkoordinate z ist demzufolge nur in den Ausdrücken (15) und durch das lineare Glied in (11) vorhanden. Bei der Berechnung der spezifischen inneren Energie (pro Einheit der Koordinate x^1) der Schale, die durch den allgemeinen Ausdruck

$$W_i = \frac{1}{2} \int_{x^2} \left(\int_{x^3} \vec{\epsilon}^T \mathbf{E} \vec{\epsilon} \sqrt{\frac{g}{a}} dx^3 \right) \sqrt{a} dx^2 \quad (16)$$

mit E als Koeffizientenmatrix des Deformationsgesetzes und $\vec{\epsilon} = (\epsilon_{nn}, \epsilon_{nt}, \epsilon_{tt})^T$ gebildet wird, ergeben sich bei elastischem Materialverhalten für die Integration über die Schalendicke h und somit zur Ermittlung der örtlichen Steifigkeit für einen Punkt der SMF 3 verschiedene Integrale, die in der Form

$$K_{ij}^n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F_i F_j z^n \sqrt{\frac{g}{a}} dz \quad \begin{array}{l} n = 0, 1, 2 \\ ij = 1, 2, 3, 4 \end{array}$$

dargestellt werden können.

Da in den Integranden nur rationale Funktionen von z auftreten, können diese Integrale auch analytisch gelöst und als fertige Formeln programmiert werden, so daß bei elastischem Materialverhalten die numerische Integration über die Schalendicke entfallen kann.

3.2. Die verwendeten Ansatzfunktionen

Zur Reduzierung des Problems bezüglich seiner Abhängigkeit von mehreren Variablen werden für die Verschiebungskomponenten an den Schnitten $x^1 = \text{const.}$ Ansatzfunktionen der Form

$$\left. \begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^{IN} v_{nk}(x^1) f_{nk}(x^2) + \sum_{r=1}^{KZ} c_r \left[\bar{v}_{nr}(x^1, x^2) - \sum_{k=1}^{IN} \bar{v}_{nrk}(x^1) f_{nk}(x^2) \right] \\ v_t &= \sum_{k=1}^{IT} v_{tk}(x^1) f_{tk}(x^2) + \sum_{r=1}^{KZ} c_r \left[\bar{v}_{tr}(x^1, x^2) - \sum_{k=1}^{IT} \bar{v}_{trk}(x^1) f_{tk}(x^2) \right] \\ w &= \sum_{k=1}^{IW} w_k(x^1) f_{wk}(x^2) + \sum_{r=1}^{KZ} c_r \left[\bar{w}_r(x^1, x^2) - \sum_{k=1}^{IW} \bar{w}_{rk}(x^1) f_{wk}(x^2) \right] \\ \varphi &= \sum_{k=1}^{IW} \varphi_k(x^1) f_{wk}(x^2) + \sum_{r=1}^{KZ} c_r \left[\bar{\varphi}_r(x^1, x^2) - \sum_{k=1}^{IW} \bar{\varphi}_{rk}(x^1) f_{wk}(x^2) \right] \end{aligned} \right\} (17)$$

verwendet.

Dabei bedeuten

IN, IT, IW:	jeweilige Anzahl der Ansatzfunktionen
c_r :	Komponenten des Starrkörperverschiebungsvektors
$\bar{v}_{nr}, \bar{v}_{tr}, \bar{w}_r, \bar{\varphi}_r$:	Starrkörperverschiebungsfunktionen

Die Unabhängigkeit von IN und IT gewährleistet eine bessere Anpaßmöglichkeit an das jeweilige Problem als eine für beide Verschiebungen gleiche Funktionsanzahl. Für w und φ ist eine solche Variabilität nicht möglich, da beide Verformungen gemäß (4) über eine Zwangsbedingung gekoppelt sind.

Es existieren die Spezialfälle

Scheibenproblem: $IW = 0$

Plattenproblem: $IN = IT = 0$,

wobei nur für die auftretenden Verformungsgrößen Rechenzeit und Speicherplatz benötigt wird.

Die geforderten Eigenschaften der Ansatzfunktionen sind

$$f_k(x^2) = \begin{cases} 1 & \text{für } x^2 = x_k^2 \\ 0 & \text{für } x^2 = x_j^2 \end{cases}$$

wobei mit x_j^2 alle anderen diskreten Ansatzstützstellen gemeint sein sollen. Diese Bedingungen können mit Polynomen (z. B. Lagrangesche oder Hermitesche) oder mit Fourierreihen erfüllt werden.

Die Ansätze nach (17) erlauben es, zu einer möglichen Erhöhung der Rechengenauigkeit die in den Ansatzfunktionen nicht enthaltenen Starrkörperverschiebungsfunktionen ($KZ_{\max} = 6$) durch die in jeder Gleichung auf-

tretende zweite Summe ($\sum_{r=1}^{KZ} c_r [\dots]$) hinzuzufügen.

Dabei ist in dieser Darstellung schon die Bedingung eingearbeitet, daß die Komponenten $v_n(x^1)$, $v_t(x^1)$, $w(x^1)$ und $\varphi(x^1)$ an den Ansatzstützstellen physikalisch bleiben sollen. Deshalb werden innerhalb der Starrkörperausdrücke die Starrkörperverschiebungsanteile an den Ansatzstützstellen wieder abgezogen. Hierbei gilt

$$\bar{v}_{nrk}(x^1) = \bar{v}_{nrk}(x^1, x_k^2) \text{ usw. ,}$$

so daß jeweils für $x^2 = x_k^2$ die genannten Starrkörperausdrücke entfallen. Das gilt nicht für alle übrigen Werte von x^2 z. B. für die Integrationsstützstellen, sofern sie nicht mit den Ansatzstützstellen identisch sind.

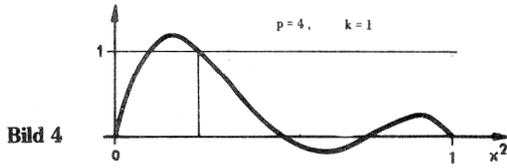
Im Folgenden seien zum Vergleich einige Ansatzfunktionsarten grafisch über der normierten Koordinate x^2 dargestellt. In den zugehörigen Formeln bedeuten

p: Anzahl der Abschnitte zwischen den Ansatzstützstellen, in die eine Linie $x^1 = \text{const.}$ eingeteilt wird. In den Beispielen wird von äquidistanten Stützstellen ausgegangen und mit einer Ausnahme $p = 4$ gewählt.

k: Nummer der Ansatzfunktionen. In den Beispielen erfolgt die Darstellung immer für k = 1.

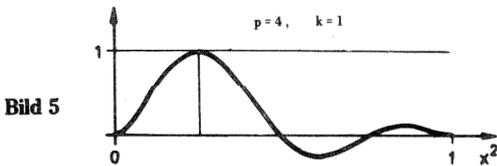
Lagrangesche Polynome

$$L_k(x^2) = \prod_{l=0, l \neq k}^p \frac{(x^2 - \frac{1}{l})}{(x_k^2 - \frac{1}{l})}$$



Hermiteische Polynome

$$H_k(x^2) = \frac{x^2(x^2 - 1)}{x_k^2(x_k^2 - 1)} L_k(x^2)$$



Mit den Hermiteischen Polynomen der obigen Form wird erreicht, daß für alle k ≠ 0, p gilt

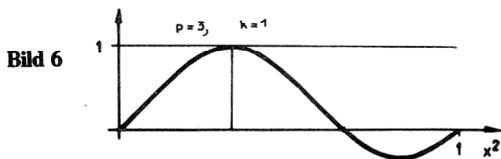
$$H_{k,2}(x^2 = 0) = 0, \quad H_{k,2}(x^2 = 1) = 0$$

Fourierreihen

Die nachfolgend aufgeführten Formeln und Bilder gelten nur für geschlossene Probleme, bei denen gilt: Zustand (x^2 = 0) entspricht Zustand (x^2 = 1),

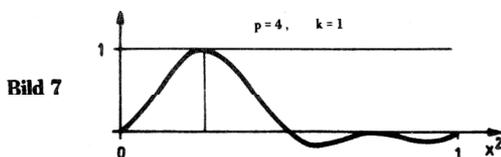
beliebiges periodisches System, p ungerade

$$F_k(x^2) = \frac{(-1)^k}{p} \frac{\sin p \pi x^2}{\sin \pi (x^2 - \frac{k}{p})}$$



beliebiges periodisches System, p gerade

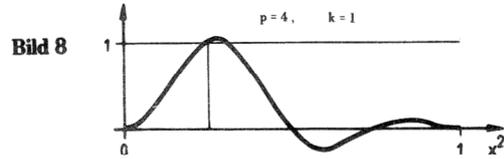
$$F_k(x^2) = \frac{(-1)^k}{p} \frac{\sin p \pi x^2}{\sin \pi (x^2 - \frac{k}{p})} \cos \pi (x^2 - \frac{k}{p})$$



bei x^2 = 0 und x^2 = 1 symmetrisches Problem

$$F_{gg,k}(x^2) = q \frac{(-1)^k}{p} \sin p \pi x^2 \frac{\sin \pi \frac{k}{p}}{\cos \pi \frac{k}{p} - \cos \pi x^2}$$

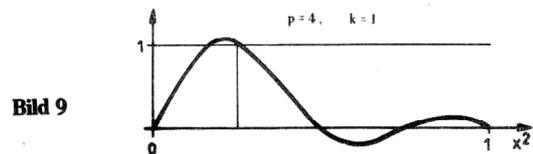
$0 \leq k \leq p$
 $k = 0, p: q = 0,5$
 $k \text{ sonst: } q = 1,0$



bei x^2 = 0 und x^2 = 1 antimetrisches Problem

$$F_{uu,k}(x^2) = \frac{(-1)^k}{p} \sin p \pi x^2 \frac{\sin \pi \frac{k}{p}}{\cos \pi \frac{k}{p} - \cos \pi x^2}$$

$1 \leq k \leq p - 1$



bei x^2 = 0 symmetrisches, bei x^2 = 1 antimetrisches Problem

$$F_{gu,k}(x^2) = 2q \frac{(-1)^k}{p} \sin p \pi x^2 \frac{\sin \frac{\pi}{2} x^2}{\cos \pi \frac{k}{p} - \cos \pi x^2} \cos \frac{\pi}{2} \frac{k}{p}$$

$0 \leq k \leq p - 1$
 $k = 0: q = 0,5$
 $k \text{ sonst: } q = 1,0$

Bild 10

bei x^2 = 0 antimetrisches, bei x^2 = 1 symmetrisches Problem

$$F_{ug,k}(x^2) = 2q \frac{(-1)^k}{p} \sin p \pi x^2 \frac{\cos \frac{\pi}{2} x^2}{\cos \pi \frac{k}{p} - \cos \pi x^2} \sin \frac{\pi}{2} \frac{k}{p}$$

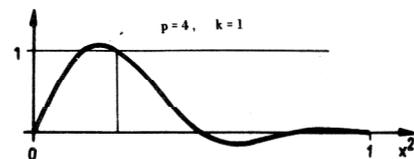


Bild 11

Mit den aufgeführten 5 verschiedenen Arten von Fourierreihen sind alle geometrischen Randbedingungen für die Verformungen erfüllbar. Benutzt man bei „offenen“ Problemen Lagrangesche und Hermitesche Polynome, sind dafür 12 verschiedene Kombinationen nötig. Zur Berechnung des elastischen Potentials werden die Gln. (17) durch Vertauschung der 2. und 3. Summe in die folgende Form (hier als Beispiel für v_n) gebracht:

$$v_n = \sum_{k=1}^{IN} (v_{nk}(x^1) f_{nk}(x^2) - \sum_{r=1}^{KZ} c_r \bar{v}_{nrk}(x^1)) f_{nk}(x^2) + \sum_{r=1}^{KZ} \bar{v}_{nr}(x^1, x^2)$$

$$v_n^* = \sum_{k=1}^{IN} v_{nk}^*(x^1) f_{nk}(x^2) + \sum_{r=1}^{KZ} \bar{v}_{nr}(x^1, x^2) \quad (18)$$

mit

$$v_{nk}^*(x^1) = v_{nk}(x^1) - \sum_{r=1}^{KZ} c_r \bar{v}_{nrk}(x^1) \quad (19)$$

Dadurch sind die Verschiebungskomponenten, die nur noch von x^1 abhängen, zusammengefaßt, allerdings ist dann z. B. v_{nk}^* keine physikalische Größe mehr. Für die Berechnung der inneren Energie der Schale werden die Starrkörperverschiebungsfunktionen weggelassen, da sie keinen Einfluß auf die Verzerrungen und Spannungen haben.

Der Verschiebungsvektor für einen Schnitt $x^1 = \text{const.}$ hat damit die Komponenten

$$\vec{v}(x^1) = \left\{ v_{n1}^*, \dots, v_{nIN}^*; v_{t1}^*, \dots, v_{tIT}^*; w_1^*, \dots, w_{IW}^*; \varphi_1^*, \dots, \varphi_{IW}^* \right\}^T \quad (20)$$

oder anders ausgedrückt

$$\vec{v}(x^1) = \left\{ v_1^*, \dots, v_{IZ}^* \right\}^T \quad (21)$$

3.3. Darstellung des elastischen Potentials

Die kanonischen Differentialgleichungen werden aus dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie hergeleitet. Das elastische Potential π errechnet sich bekanntlich aus

$$\Pi = \int_{x^1} U(x^1) dx^1 = \int_{x^1} (W_i - W_{äu}) dx^1 \quad (22)$$

W_i : Spezifische innere Energie (Formänderungsenergie)

$W_{äu}$: Spezifische Arbeit der äußeren Belastung und Volumenkräfte

Ersetzt man in (16) den Verzerrungstensor durch die Verformungen sowie zugehörigen Ableitungen nach den

Schalenkoordinaten mit den Gleichungen (9) – (14), verwendet für die Verformungsseparation Ansatzfunktionen gemäß 3.2., ordnet die Verformungsgrößen unter Berücksichtigung des Auftretens ihrer 1. Ableitungen und ersetzt $v^*(x^1)$ nach (19), so erhält man für Π einen hier in Komponenten geschriebenen Ausdruck der Form

$$\Pi = \int_{x^1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} A_{11} v_i' v_j' + A_{im}^T v_i' \lambda_m + A_{ij} v_i' v_j \\ + A_{ic} v_i' c_e + A_i v_i' + \frac{1}{2} A_{00} v_i v_j + A_{mj} v_j \lambda_m \\ + A_{ie} v_i c_e + A_i v_i + \frac{1}{2} A_{kc} c_k c_e + \\ + A_{mc} \lambda_m c_e + A_m \lambda_m + A_k c_k \end{array} \right\} dx^1 - F_k c_k \longrightarrow \text{Min.} \quad (23)$$

wobei zur Abkürzung $(\)'$ gleich $\frac{\partial (\)}{\partial x^1}$ sein soll.

Alle Terme mit dem Index λ gehören zu den mit dem Lagrangeschen Faktor λ_m als Nebenbedingung hinzugefügten Zwangs- und Randbedingungen. Die Randbedingungen für die Ränder $x^2 = \text{const.}$ sind hier deshalb mit eingearbeitet worden, damit sie auch erfüllt werden können, falls die gewählten Ansatzfunktionen das nicht von selbst tun, was nur bei Verwendung orthogonaler Koordinaten erreicht werden kann. Das bedeutet zwar einen höheren numerischen Aufwand, man hat aber dadurch größere Freiheit bei der Wahl der Ansatzfunktionen und Schalenkoordinaten.

Die Elemente der Matrizen A_{11} , A_{10} und A_{00} sind Integrale über die Schalendicke und die Streifenbreite von $x^2 = 0$ bis $x^2 = 1$. Hier gehen das Deformationsgesetz und geometrische Größen der SMF und des Schalenraumes ein. Für ein Streifenelement der Länge Δx^1 beschreiben sie zusammen dessen Steifigkeit.

In A_{11} und A_{00} sind die Belastungsgrößen enthalten – sowohl die äußeren als auch die thermischen, wobei die letzteren dem verwendeten Deformationsgesetz mit Temperaturgliedern entsprechen. Alle Terme mit Index c gehören zu den Starrkörperverschiebungsgliedern, die in den Komponenten $v_k^*(x^1)$ gemäß (19) enthalten sind.

Diese lassen sich aus A_{11} , A_{10} , A_{00} , A_1 , A_0 , $A_{\lambda 1}$, $A_{\lambda 0}$ und den Starrkörperverschiebungsfunktionen an den Ansatzstützstellen berechnen. Der Ausdruck $F_k c_k$ in (23) steht für die Arbeit der Resultierenden der äußeren Belastung in Verbindung mit den Starrkörperverschiebungen.

Um zu den gewünschten kanonischen Differentialgleichungen zu gelangen, werden zunächst nach dem Formalismus von Hamilton-Jacobi folgende partielle Differentialausdrücke gebildet:

$$\frac{\partial U}{\partial v'_i} = f_i = \frac{A_{ij}}{11} v'_j + \frac{A_{im}^T}{\lambda 1} \lambda_m + \frac{A_{ij}}{10} v_j + \frac{A_{ie}}{1c} c_e + \frac{A_i}{1} \quad (24)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda_m} = 0 = \frac{A_{mj}}{\lambda 1} v'_j + \frac{A_{mj}}{\lambda 0} v_j + \frac{A_{ie}}{0c} c_e + \frac{A_m}{\lambda} \quad (25)$$

$$\frac{\partial U}{\partial v_i} = f'_i = \frac{A_{ij}^T}{10} v'_j + \frac{A_{im}^T}{\lambda 0} \lambda_m + \frac{A_{ij}}{00} v_j + \frac{A_{ie}}{cc} c_e + \frac{A_i}{0} \quad (26)$$

Die Größen f_i sind dabei die verallgemeinerten Schnittkräfte

$$\vec{f} = \left\{ Z_{n1}, \dots, Z_{nIN}; \quad Z_{t1}, \dots, Z_{tIT}; \right. \\ \left. Z_{w1}, \dots, Z_{wIW}; \quad Z_{\phi 1}, \dots, Z_{\phi IW} \right\}^T$$

Gl. (25) stellt die verallgemeinerte Zwangsbedingung dar, in der die Randbedingungen für Ränder $x^2 = \text{const.}$ enthalten sind.

Das Gleichungssystem aus (24) und (25) wird nun zunächst vom Programm nach den v'_j und λ_m aufgelöst. Die Lösung findet Eingang in (26), so daß sich mit (25) ein Differentialgleichungssystem der Form

$$\left. \begin{aligned} v'_i &= B_{ij} v_j + B_{ic} c_e + B_{ij} f_j + B_i \\ f'_i &= B_{ij} v_i + B_{ie} c_e + B_{ij} f_j + B_i \end{aligned} \right\} \quad i = 1, IZ \quad (27)$$

ergibt. Berücksichtigt man, daß für die in den Ansatzfunktionen nicht enthaltenen und deshalb dazu gefügten Starrkörperschiebungsfunktionen bezüglich ihrer zugehörigen Komponenten gilt

$$\frac{\partial U}{\partial c_k} = 0$$

so folgt damit aus (23) für F_k die Gleichung

$$F_k = \int_{x^1} (A_{kj}^T v'_j + A_{km}^T \lambda_m + A_{kj}^T v_j + A_{ke} c_e + A_k) dx^1$$

zu den Gln. (27) kommt deshalb noch die Gl.

$$F'_k = B_{kj} v_j + B_{ke} c_e + B_{kj} f_j + B_k \quad (28)$$

dazu. Sie gehört physikalisch zur Gl. für f'_i .

Analog dazu gehört zu der Verschiebung v'_i eine Gleichung $c'_k = 0$. Diese ist identisch erfüllt, da alle c_k Konstanten sind. Das gesamte kanonische Differentialgleichungssystem hat nun endgültig die Form

$i = 1, IZ$
 $k = 1, KZ$

Lastspalte		$B_{i v}$	0	$B_{i f}$	0
\vec{y}	F_k	0	0	0	0
	f_j	B_{ij}^{vf}	0	B_{ij}^{ff}	B_{ij}^{ff}
	c_e	B_{ie}^{vc}	0	B_{ie}^{fc}	B_{ie}^{fc}
	v_j	B_{ij}^{vv}	0	B_{ij}^{fv}	B_{ij}^{fv}
	v'_i	c'_k	f'_i	F'_k	
\vec{y}					

Das dick eingerahmte Feld enthält die Elemente einer Matrix $B(x^1)$, welche \vec{y}' mit \vec{y} in der Form

$$\vec{y}' = B \vec{y} + \vec{b}$$

verknüpft.

Dieses Differentialgleichungssystem wird mit dem Runge-Kutta-Verfahren – gekoppelt mit dem Übertragungsmatrizenverfahren – numerisch gelöst. Die am Anfangsrand maximal auftretenden IZ + KZ Unbekannten werden durch ebensoviel Bedingungsgleichungen am Endrand bestimmt, so daß das zu lösende Gleichungssystem im Gegensatz zu den üblichen FEM relativ klein ist.

Für elastisch-plastisches Materialverhalten kann das elastische Potential in gezeigter Form beibehalten werden, nur ist es dabei für die Verformungssinkremente zu schreiben.

Im Verlauf der Rechnung wird ab elastischer Grenzlast die Belastung in kleinen Schritten aufgebracht und entsprechend dem vorher erreichten Zustand und des zu erwartenden Zustandes (durch eine gewisse „Vorausschau“) die Steifigkeit des Systems neu berechnet.

4. Anwendung

Das auf der vorgestellten Theorie basierende EDV-Programm ermöglicht eine elastisch-plastische Spannungs- und Verformungsberechnung von dünnwandigen Schalen unter der Voraussetzung kleiner Verformung sowie

eben- und normalbleibender Querschnitte analog zur Kirchhoffschen Hypothese bei Platten.

Bei elastisch-plastischer Rechnung können sowohl die kinematische als auch die isotrope Verfestigung und die Temperaturabhängigkeit der Streckgrenze berücksichtigt werden.

Folgende Flächentypen, deren Geometrie exakt berechnet wird, sind bisher im Katalog des Programmes enthalten:

schräg abgeschnittene Kreiszyylinderfläche

Kugelfläche mit 2 Löchern

Torusfläche

Kegelfläche

exzentrisch gelochte Kreisscheibe

Regelfläche

Man kann aber auch die Geometrie der SMF durch Randkoordinaten bzw. punktweise vorgeben.

Nachfolgend aufgeführte Belastungen sind im Programm vorgesehen

Volumenlasten (z. B. Eigengewicht, Fliehkraft)

Flächenlasten (z. B. Druck in n-, t- und z-Richtung, Schneelast)

Linienlasten in x^1 - und x^2 -Richtung

Einzelkräfte

Temperaturbelastung (stationär oder instationär)

Hinsichtlich der geometrischen Möglichkeiten ist das Programmsystem EPSCHA den Programmen auf Basis der FEM unterlegen, da es auf Grund der angewandten Methode an eine SMF gebunden ist, die sich auf ein viereckiges Gebiet abbilden läßt. Dafür hat es jedoch rechentechnisch einige Vorteile (es sind z. B. keine großen Gleichungssysteme zu lösen), so daß es sich sehr gut für Variantenrechnungen eignet.

Das eingebaute nichtlineare Deformationsgesetz erlaubt es z. B., Rest- und Eigenspannungen (Anpassungsprobleme), Schnittgrößenumlagerungen, die Ausbreitung plastischer Gebiete und plastischer Verformungslagerungen zu berechnen bzw. zu ermitteln. Diese Möglichkeiten sind neben der bisher üblichen Festigkeitsberechnung nach der Elastizitätstheorie bzw. Traglasttheorie vor allem dort interessant, wo Lastzyklen gefahren werden wie z. B. im Chemie-, Kraftwerksanlagen- und Dampferzeugerbau.

Die geringe Zahl von Eingabedaten und die vorhandenen Regiemöglichkeiten für die Datenausgabe machen das erarbeitete EDV-Programmsystem EPSCHA anwenderfreundlich.

LITERATUR

- [1] Weber, D.: Numerische Berechnung elastisch-plastischer Scheiben mit dem Programm EPESUV. Broschüre des Weiterbildungszentrums Festkörpermechanik Konstruktion und rationeller Werkstoffeinsatz der TU Dresden, Heft 2/78.
- [2] Weber, D.: Beitrag zur Berechnung elastisch-plastischer Scheiben. Broschüre des Weiterbildungszentrums Festkörpermechanik Konstruktion und rationeller Werkstoffeinsatz der TU Dresden, Heft 2/77.
- [3] Schmidt, R.: Traglastberechnung allgemeiner Schalen mittels kinematischer Methode. (Dissertation), TU Dresden, 1977.
- [4] Kodira, A.: Makroelementberechnung von beliebig gekrümmten Schalen. (Dissertation), TU Dresden 1977.

Anschrift des Verfassers:

Dr.-Ing. D. Weber

Akademie der Wissenschaften der DDR

Zentralinstitut für Festkörperphysik und Werkstofforschung

8027 Dresden, Helmholtzstr. 20