

Zur Methodik der Untersuchung erzwungener Schwingungen in einem verzweigten Mechanismensystem regulärer Struktur

J. I. Wulfson

0. Einleitung

In den Arbeiten [1] bis [3] wurden für die Untersuchung der Schwingungen von komplizierten Schwingungssystemen unter Einschluß von Mechanismen dynamische Modelle in zwei Ebenen vorgeschlagen: „globale“ und „lokale“ Modelle. Mit Hilfe des „globalen“ Modells gelingt die Auffindung des Eigenfrequenzspektrums und der nichtstationären Eigenformen sowie deren Veränderung, falls das notwendig erscheint. Mit Hilfe des lokalen Modells wird die Lösung in Quasi-Normalkoordinaten unter Berücksichtigung äußerer Erregungen und dissipativer Faktoren bestimmt. Die Kennwerte dieses Systems ergeben sich dabei auf der Grundlage der Untersuchung des „globalen“ Modells. In vielen Systemen können diese Kennwerte im Stadium der Synthese so ausgewählt werden, daß sich das System dynamisch stabil über den gesamten Frequenzbereich verhält und kleine Änderungen der Eigenfrequenzen aufweist. Für diese Systeme gelingt es, zur Berechnung der erzwungenen Schwingungen eine effektive Methodik zu entwickeln, die die Zerlegung in Eigenformen entbehrlich macht. Dabei werden die veränderlichen Übertragungsfunktionen durch ihre Mittelwerte ersetzt. In der vorliegenden Arbeit wird diese Herangehensweise mit der Berücksichtigung der Regularität des Schwingungssystems vereinigt, die beim Antrieb identischer Mechanismen von einer gemeinsamen Antriebswelle entsteht.

1. Dynamisches Modell

Bezeichnungen

- A, B, C, D = Elemente der Übertragungsmatrizen
- φ_s = Winkelkoordinate der Hauptwelle
- λ_s = Eigenwerte der Übertragungsmatrizen
- M = Erregermoment
- Q_s = Erregeramplitude
- α_s = Schwingungsamplitude der Hauptwelle
- a_{sj} = Schwingungsamplitude des Mechanismus s, Element j
- ω = Erregerkreisfrequenz
- J = Trägheitsmoment
- c = Federzahl

Als dynamisches Modell betrachten wir ein kontinuierliches Torsionsschwingungssystem, von dem n+1 Mecha-

nismen abzweigen. Dabei entspricht s=0 (s – laufende Nummer des Mechanismus) dem Antrieb und die übrigen n Abzweigungen stellen identische Schwingungssysteme dar (Bild 1). Die abzweigenden Untersysteme stellen eine Hintereinanderschaltung diskreter Elemente dar. Beim Übergang über eine Abzweigung erfolgt eine Änderung der Amplituden für Verformung und Belastung entsprechend der Übertragungsmatrix

$$\Gamma_s = \begin{pmatrix} A_s & B_s \\ C_s & D_s \end{pmatrix} \quad (1)$$

Die Methodik des Aufbaus dieser Matrizen ist in der Arbeit [1] angeführt. Der Index s definiert gleichzeitig den Abschnitt der Antriebswelle, der durch die Antriebsglieder der Mechanismen s-1 und s begrenzt wird.

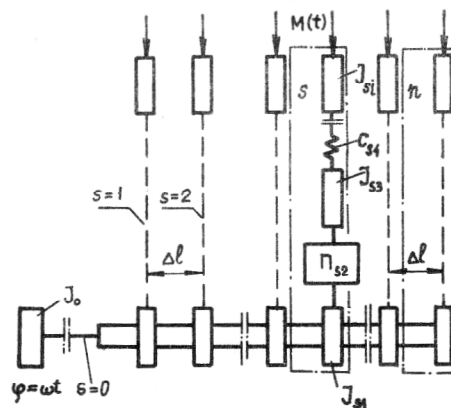


Bild 1
 Dynamisches Modell

2. Der Nichtresonanzfall

Es möge an den Enden der Untersysteme der Abzweigungen s=1, ..., n eine harmonische Erregerkraft $Q_s \cos \omega t$ wirken. Wir beginnen die Untersuchung der erzwungenen Schwingungen mit der Betrachtung der resonanzfreien Zonen, in denen zur Gewinnung anschaulicher Ergebnisse ohne praktisch fühlbaren Genauigkeitsverlust der Einfluß dissipativer Kräfte vernachlässigt werden kann. Dabei werden die Torsionsschwingungen in jedem Abschnitt s der Antriebswelle durch folgende Beziehungen beschrieben:

$$\varphi_s = \alpha_s(x_s) \cos \omega t, \quad (2)$$

$$\alpha_s(x_s) = K_{s-1} \cos(x_s \vartheta_s / \Delta l) + N_{s-1} \sin(x_s \vartheta_s / \Delta l);$$

$$\vartheta_s = \omega x_s / r; \quad r = \sqrt{GI/\rho};$$

G = Schubmodul; I = polares Trägheitsmoment des Querschnittes; ρ = Massenträgheitsmoment der Welle pro Längeneinheit; $0 \leq x_s \leq \Delta l$.

Für die Koeffizienten K_{s-1} und N_{s-1} der Amplitudenfunktion α_s können die folgenden Rekursionsformeln aufgeschrieben werden [1]:

$$\left. \begin{aligned} K_s &= K_{s-1} \cos \vartheta_s + N_{s-1} \sin \vartheta_s, \\ N_s &= -K_{s-1} \sin \vartheta_s + N_{s-1} \cos \vartheta_s - Z_s K_s - \zeta_s Q_s, \end{aligned} \right\} (3)$$

wobei

$$Z_s = -C_s \sigma / (D_s \omega); \quad \zeta_s = \sigma / (D_s \omega); \quad \sigma = (GI\rho)^{-0,5}.$$

Für Systeme mit regelmäßiger Struktur sind bei $s=1, \dots, n$ die Werte A_s, B_s, C_s, D_s, Z_s und ζ_s identisch, deshalb kann der Index s entfallen. Außerdem nehmen wir noch an, daß $Q_s = Q = \text{const}$.

Das System (3) kann man als inhomogenes Differenzgleichungssystem auffassen, dessen Lösung in der Form $K_s = K_s^* + K_s^{**}$ und $N_s = N_s^* + N_s^{**}$ gesucht wird. Hierbei bezeichnen ein Stern die Lösung des homogenen Systems und zwei Sterne die partikuläre Lösung des inhomogenen Gleichungssystems. Suchen wir die Lösung der homogenen Gleichung in der Form

$$K_s^* = C_K^0 \lambda^s; \quad N_s^* = C_N^0 \lambda^s,$$

wobei C_K^0 und C_N^0 beliebige Konstanten sind, erhalten wir eine charakteristische Gleichung, deren Lösung die Form

$$\lambda = \kappa \mp \sqrt{\kappa^2 - 1} \quad (4)$$

besitzt, wobei $\kappa = \cos \vartheta - 0,5 Z \sin \vartheta$.

Die Partikulärlösung des inhomogenen Systems ist

$$K_s^{**} = - \frac{\zeta Q}{2 \tan(\vartheta/2) + Z}; \quad (5)$$

$$N_s^{**} = K_s^{**} \tan(\vartheta/2).$$

Da K_s^{**} und N_s^{**} nicht von s abhängen, wird dieser Index im weiteren bei diesen Funktionen fortgelassen.

Bei der Analyse der erzwungenen Schwingungen im Nichtresonanzfall unterscheiden wir die folgenden 5 Fälle.

Fall 1. $|\kappa| < 1$. In diesem Fall sind nach Gleichung (4) $\lambda_{1,2}$ konjugiert komplexe Zahlen mit dem Modul Eins. Setzen wir $\kappa = \cos \gamma$, lassen sich die Beziehungen für K_s und N_s für beliebige Werte von s in folgender Form schreiben

$$K_s = h_1 \cos s\gamma + h_2 \sin s\gamma + K^{**},$$

$$N_s = \sin^{-1} \vartheta \left\{ h_1 [\cos(s+1)\gamma - \cos \vartheta \cos s\gamma] + \right.$$

$$\left. + h_2 [\sin(s+1)\gamma - \cos \vartheta \sin s\gamma] + (1 - \cos \vartheta) K^{**} \right\} \quad (6)$$

Für die Bestimmung der unbekanntenen Werte h_1 und h_2 verwenden wir die folgenden Randbedingungen:

$$N_n = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial x}(0) = U(\omega) \alpha_1(0)/l.$$

Die erste dieser Bedingungen entspricht der Lastfreiheit am rechten Ende der Verteilerwelle; die zweite Bedingung gewährleistet das Momentengleichgewicht an der Kopplungsstelle zwischen Antriebsmechanismus ($s=0$) und dem Eingangsquerschnitt der Welle ($x=0$). Dabei wird die dimensionslose Funktion $U(\omega)$ bei freiem Eingang des Antriebs zu $U = C_0 l / (D_0 G I)$, und bei festgespanntem Eingang zu $U = A_0 l / (B_0 G I)$ bestimmt. Hierbei sind A_0, B_0, C_0, D_0 die entsprechenden Elemente der Übertragungsmatrix des Antriebsmechanismus.

Das entsprechende Gleichungssystem erhält die Form

$$h_1 [\cos(n+1)\gamma - \cos \vartheta \cos n\gamma] + h_2 [\sin(n+1)\gamma - \cos \vartheta \sin n\gamma] = -K^{**} (1 - \cos \vartheta) \quad (7)$$

$$h_1 [\cos \gamma - \cos \vartheta - U_1] + h_2 \sin \gamma = K^{**} [U_1 - (1 - \cos \vartheta)], \quad \text{wobei} \quad U_1 = U \sin \vartheta / (n\vartheta).$$

Die Lösung des Gleichungssystems (7) ist unter Berücksichtigung von (5)

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{\zeta Q}{\Delta(2 \tan \vartheta/2 + Z)} \left\{ \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) + [U_1 - (1 - \cos \vartheta)] \cdot [\sin(n+1)\gamma - \cos \vartheta \sin n\gamma] \right\} \\ h_2 &= \frac{\zeta Q}{\Delta(2 \tan \vartheta/2 + Z)} \left\{ [1 - \cos \vartheta - U_1] \cdot [\cos(n+1)\gamma - \cos \vartheta \cos n\gamma] - [\cos \gamma - \cos \vartheta - U_1] (1 - \cos \vartheta) \right\}, \end{aligned} \right\} (8)$$

wobei Δ – die Determinante des Systems (7) ist.

Im betrachteten Nichtresonanzfall ist $\Delta \neq 0$; außerdem gilt bei $\kappa < 1$ $Z \neq -2 \tan \vartheta/2$. Deshalb kann der Nenner der Ausdrücke (8) nicht den Wert Null annehmen.

Die Ausdrücke (8), (6) und (2) bestimmen die Vergrößerungsfunktion in einem beliebig vorgegebenen Wellenabschnitt, wobei am Beginn der Welle die Amplitude den Wert $K_0 = h_1 + K^{**}$ annimmt. Die Schwingungsamplitude des Elementes s_j (Mechanismus s , Element j) ist

$$a_{sj} = (A_{sj}^* + B_{sj}^* Z_s \omega \sigma^{-1}) K_s. \quad (9)$$

Durch Sterne sind die entsprechenden Elemente der Übertragungsmatrix gekennzeichnet, die man durch aufeinanderfolgendes Multiplizieren der Übertragungsmatrizen der einzelnen Elemente von Element j beginnend bis 1 erhält.

Fall 2. $\kappa > 1$. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind in diesem Fall reelle Zahlen. Dabei erhalten wir mit $\kappa = \cos \gamma$, analoge Beziehungen wie oben, mit dem einen Unterschied, daß in den Ausdrücken in (6),

(7) und (8) die trigonometrischen Funktionen des Argumentes γ durch die entsprechenden Hyperbelfunktionen zu ersetzen sind. In diesem Falle verliert die Amplitudenfunktion K_s ihre traditionelle trigonometrische Form und nimmt die Form einer Exponentialfunktion an.

Fall 3. $\kappa < -1$. In diesem Fall gilt $\kappa = \cosh(\gamma + j\pi) = -\cosh \gamma$ mit $j = \sqrt{-1}$. Deshalb muß in den Beziehungen (6), (7) und (8) anstelle $\cos \gamma$ und $\sin \gamma$ entsprechend $(-\cosh \gamma)$ und $(-\sinh \gamma)$ und anstelle $\cos s\gamma$ und $\sin s\gamma$ entsprechend $(-1)^s \cosh s\gamma$ und $(-1)^s \sinh s\gamma$ gesetzt werden. Vom physikalischen Standpunkt wird dieser Fall dadurch interessant, daß die Funktion K_s^* in jedem Abschnitt Δl , der dem Abstand zwischen zwei benachbarten Mechanismen entspricht, ihr Vorzeichen wechselt.

Fall 4. $\kappa = 1$. Die charakteristische Gleichung besitzt in diesem Fall eine reelle Doppelwurzel $\lambda_{1,2} = 1$. Es läßt sich dann zeigen, daß

$$K_s = h_1 + h_2 s + a_2 s^2 \quad (10)$$

ist, wobei $a_2 = -0,5 \zeta Q \sin \vartheta$.

Die in die Beziehung (10) eingehenden Funktionen h_1 und h_2 werden mit Hilfe der oben angeführten Randbedingungen bestimmt

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= -\frac{a_2 [(n+1) - (n-1) \cos \vartheta]}{(1 - \cos \vartheta) (U_1 - 1 + \cos \vartheta)} \\ h_2 &= (U_1 - 1 + \cos \vartheta) h_1 - a_2, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

wobei $U_1 = U \sin \vartheta / (n \vartheta)$.

Fall 5. $\kappa = -1$. In diesem Falle gilt $\lambda_{1,2} = -1$. Man kann zeigen, daß dann

$$K_s = (h_1 + h_2 s) (-1)^s + a_0, \quad (12)$$

wobei $a_0 = -0,25 \zeta Q \sin \vartheta$.

Mit dem oben dargelegten Verfahren erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{a_0 (1 - \cos \vartheta) [1 - (-1)^n - U_1]}{(U_1 + 1 + \cos \vartheta) [n + (n-1) \cos \vartheta] - (1 + \cos \vartheta)} \\ h_2 &= -h_1 (U_1 + 1 + \cos \vartheta) + a_0 (1 - \cos \vartheta - U_1). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

3. Resonanzfälle

Unter Beachtung des Integralcharakters der Herleitungen über die dissipativen Eigenschaften realer Systeme ist es am zweckmäßigsten, für die Abschätzung der Resonanzamplituden von Systemen Energiebeziehungen zu verwenden.

Bei Resonanz mit der Form r leisten die Erregerkräfte während einer Schwingungsperiode die Arbeit

$$\Delta E_+^{(r)} = \pi \sum_{s=1}^n Q_s a_{sr}^*, \quad (14)$$

wobei a_{sr}^* die Amplitude der erzwungenen Schwingungen des Elementes der Abzweigung s ist, an dem die Erregerkraft Q_s angreift.

Nehmen wir an, daß die Amplitude der Erregerkraft Q sei und daß sie am letzten Element der Kette s angreift, erhalten wir auf Grund von (9) und (14)

$$\Delta E_+ = \frac{\pi Q}{D} \sum_{s=1}^n K_s. \quad (15)$$

Auf der anderen Seite wird im Verlaufe einer Periode infolge der Wirkung dissipativer Kräfte der Energiebe-
trag

$$\Delta E_-^{(+)} = \psi_* V_*^{(r)} + \sum_{s=0}^n \sum_{j=1}^{j_s} \psi_{sj} V_{sj}^{(r)} \quad (16)$$

abgeführt, wobei ψ_* und ψ_{sj} die Dissipationskoeffizienten der Verteilerwelle und des Elementes s_j sind, $V_*^{(r)}$, $V_{sj}^{(r)}$ – die diesen Untersystemen entsprechende Energie der Resonanzform r .

Für den Fall 1 werden die Resonanzfrequenzen aus der Gleichung $\Delta(p) = 0$ bestimmt, wobei p die Eigenfrequenz des Systems ist und

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} \cos(n+1)\gamma - \cos \vartheta \cos \gamma & \sin(n+1)\gamma - \cos \vartheta \sin \gamma \\ \cos \gamma - \cos \vartheta - U_1 & \sin \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

Für die Fälle 2 und 3 werden die trigonometrischen Funktionen des Argumentes γ durch die entsprechenden Hyperbelfunktionen ersetzt (Vorzeichenregel für Fall 3 s. o.).

Für die Bestimmung der Resonanzform verwenden wir eine der Gleichungen des Systems (7) bei $K^{**} \equiv 0$.

$$\frac{h_2}{h_1} = - \left[\frac{\cos \gamma - \cos \vartheta - U_1}{\sin \gamma} \right]_{p=p_r} = \epsilon_r \quad (18)$$

Mit (18) und (6) erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} K_s^{(r)} &= K_o^{(r)} (\cosh \gamma_r + \epsilon_r \sinh \gamma_r) = K_o^{(r)} f_{K_s}^{(r)} \\ N_s^{(r)} &= \sin^{-1} \vartheta [K_{s+1}^{(r)} - K_s^{(r)} \cos \vartheta] = K_o^{(r)} f_{N_s}^{(r)} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Ferner gilt für die potentielle Energie der Resonanzform der Verteilerwelle

$$V_*^{(r)} = GI \sum_{s=1}^n \int_0^{\Delta l} \frac{\partial \alpha_s^r}{\partial x_s} dx_s.$$

Unter Beachtung von (2) und (19) erhalten wir nach Integration

$$V_* = 0,5 p K_o^2 \sigma^{-1} \sum_{s=1}^n F_s, \quad (20)$$

wobei

$$F_s = [(f_{K,s-1}^2 + f_{N,s-1}^2)^\vartheta - 0,5(f_{K,s-1}^2 - f_{N,s-1}^2) \sin 2\vartheta - f_{K,s-1} f_{N,s-1} (1 - \cos 2\vartheta)]$$

(der Index r wurde überall weggelassen).

Für das elastisch-dissipative Element sj erhalten wir unter Berücksichtigung von (9)

$$V_{sj} = 0,5 B_{sj}^{-1} (a_{s,j+1} - a_{s,j-1})^2 = 0,5 f_{Ks}^2 q_{sj}^2 K_o^2 B_{sj}^{-1},$$

wobei

$$q_{sj} = A_{s,j+1}^* - A_{s,j-1}^* + Z_s p \sigma^{-1} (B_{s,j+1}^* - B_{s,j-1}^*).$$

Beim Vergleich der Ausdrücke (15) und (16), die der während einer Periode zu- und abgeführten Energie entsprechen und unter Beachtung der Beziehungen (20) und (21) erhalten wir

$$K_o^{(r)} = \left[\frac{2\pi Q D^{-1} \sum_{s=1}^n f_{Ks}}{p \sigma^{-1} \psi_* \sum_{s=1}^n F_s + \sum_{s=0}^n \sum_{j=1}^{j_*} \psi_{sj} f_{Ks}^2 q_{sj}^2 B_{sj}^{-1}} \right]_{p=P_r} \quad (22)$$

Die Beziehungen (22), (19) und (9) definieren die Resonanzamplitude der Schwingungen in einem beliebig gewählten Querschnitt des Systems.

Die gefundenen Ergebnisse lassen sich leicht auf den allgemeineren Fall einer periodischen Erregerkraft verallgemeinern. Außer den untersuchten Fällen in der Umgebung von $|k|=1$ können unter bestimmten Bedingungen, die in der Arbeit [3] erklärt sind, Frequenzbereiche mit einer sehr dichten Eigenfrequenzverteilung entstehen. Für die Untersuchung dieser Bereiche unter Berücksichtigung einer möglichen Schwankung der Erregerkraftschwankung ist es zweckmäßig, die Methode der Integralabschätzungen für die Berechnung breitbandiger Zufallsschwingungen in der Nähe asymptotischer Verdichtungspunkte der Eigenfrequenzen [4] zu verwenden. Diese Frage erfordert jedoch bezüglich ihrer Anwendung auf das untersuchte System eine gesonderte Untersuchung.

LITERATUR

- [1] Вульфсон, И. И.: Динамические расчеты цикловых механизмов. Ленинград, „Машиностроение“, 1976.
- [2] Вульфсон, И. И.: Использование иерархии динамических моделей при исследовании колебаний крупных цикловых систем, „Механика машин“, 53, Москва, „Наука“, 1978.
- [3] Wulfson, J. I.: Untersuchung des Schwingungsverhaltens periodischer Getriebe, die komplizierte Schwingungssysteme mit variablen Parametern bilden. Textiltechnik 27 (1977) 9.
- [4] Болотин, В. В.: Случайные колебания упругих систем. Москва, „Наука“, 1979.

Anschrift des Verfassers:
Prof. Dr. sc. techn. J. I. Wulfson
Institut für Textil- und Leichtindustrie
„S. M. Kirow“, Leningrad