Manuskripteingang: 3. 12. 1981

Diagnostische Identifikation von technischen Systemen

Jan Adamczyk

1. Das Modell des Umlaufes der Diagnostik

Die Modellierung komplexer technischer Systeme für Zwecke der Diagnostik sollte die folgenden Erscheinungen und Aspekte der Wirkungsweise des Systems berücksichtigen:

1. Dynamische, mit der gegenseitigen Wirkung der Teile der kinematischen Paare verbundene Prozesse, welche die grundsätzliche Quelle der elementaren Schwingungsprozesse bilden.
2. Prozesse der Schwingungsausbreitung im System und in dem umgebenden elastischen Medium, welche im Resultat den resultierenden, komplexen Schwingungsprozeß ergeben. Dieser Prozeß ist den Messungen zugänglich, und er wird als das schwingungsakustische Erscheinungsfeld (SAS) bezeichnet.
3. Der Prozeß der Steuerung der Arbeitsweise des Objekts, welcher als Zweck die optimale Realisierung in den technologisch und ökonomisch zulässigen Grenzen hat.
   Die durch den Steuerungsprozeß determinierten, veränderlichen Arbeitsbedingungen des Objekts haben entscheidenden Einfluß auf die Parameter des schwingungsakustischen Feldes (SAS). Sie bilden also einen wesentlichen Störfaktor, welcher sowohl die Schaffung des diagnostischen Modells, wie auch eine effektive diagnostische Methode verhindert.
4. Die Verschleißprozesse, welche unumkehrbar verlaufen und in der Zeit des normalen Betriebes die Realisierung des Grundziels nicht merkbar beeinflussen, werden durch den Steuerprozeß ausgeglichen. Der ausgleichende Einfluß der Steuerung wirkt aber nicht auf den Mechanismus der Schwingungserzeugung. Deswegen bildet das schwingungsakustische Feld eine wertvolle Informationsquelle über die Fortschritte des Verschleisses in diesen Stadien, welche noch keine Beschädigungen und keine wesentlichen Störungen des technologischen Prozesses verursachen. Unter normalen Betriebsbedingungen ist der Fortschritt der Verschleißprozesse langsam. Er macht sich durch einen monotonen Trend der SAS-Parameter bemerkbar, welcher in dem Maßstab der sogenannten Betriebszeit ϑ beobachtet wird, die mit der Dauer der Periode zwischen den Reparaturen vergleichbar ist.

Die Struktur und die Parameter des Modells, welches die genannten Eigenschaften des Objekts befriedigend beschreibt, können analytisch oder durch ein Identifikationsexperiment beschrieben werden.

Die Beschreibung der Eigenschaften eines dynamischen Objekts ist nur für einfache Fälle und bei angenommener Änderung gewählter Parameter der Arbeitsbedingungen und bei nicht komplizierten Verschleißerscheinungen möglich. Für ein stationäres Objekt mit diskreten Konstanten kann diese Beschreibung durch Zustandsgleichungen [1]

$$\underline{\dot{x}} = f(\underline{x}, \underline{z}) \tag{1}$$

und durch Gleichungen der Ausgänge

$$\underline{y} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{z}) \tag{2}$$

ausgedrückt werden. In den Beziehungen (1) und (2) bedeuten: $\underline{x}$ den Vektor der Zustandskoordinaten, $\underline{z}$ den Vektor der veränderlichen Arbeitsbedingungen des Objekts, $\underline{y}$ den Vektor der Ausgangsgrößen. Zusätzlich zu den Gleichungen (1) sollen Anfangsbedingungen $\underline{x}(t_1)$ gegeben sein, ferner Beschränkungen für $\underline{x}$ und $\underline{z}$. Die Bestimmung der Zustandskoordinaten soll als das Finden eines solchen Satzes von Variablen verstanden werden, deren Werte in beliebigem Zeitpunkt t die ganze Vergangenheit des Prozesses zusammenfassen.

Es interessiert uns dabei ein Satz, welcher die minimale Zahl der Variablen enthält.

In der Praxis kommt es oft vor, daß manche der Zustandskoordinaten für die betrachteten Aspekte des Prozesses im Objekt nicht wesentlich sind und daß auf ihre Berücksichtigung in der Beschreibung verzichtet werden kann.

Das Vorgehen, welches zur Festlegung der Beschreibung (1), (2) führt, besteht aus folgenden Etappen:

a) Bestimmung der Zustandskoordinaten (und eventuell der Beschränkungen dieser Koordinaten)
b) Aufstellung der Zustandsgleichungen
c) Bestimmung der Eingangsgrößen (und eventuell der Beschränkungen dieser Größen)
d) Bestimmung der Ausgangsgrößen.

Es soll unterstrichen werden, daß die Etappen a), b), c) die Beschreibung der Dynamik des Objekts erschöpfen. Die Wahl der Ausgangsgrößen, Etappe d), hängt dagegen von der Entscheidung ab, welche Variable im Objekt gemessen werden, oder sie hängt von der Rolle des Objekts in einem komplexen System ab.
Die Unbekannten in der Aufgabe der diagnostischen Identifikation sind die Werte der Koordinaten des Zustandsvektors x_i ($i = 1, 2, \ldots, \nu$). Bekannt sind dagegen die Werte der Koordinaten des Vektors y_j ($j = 1, 2, \ldots, m$) bei festgelegtem $\underline{z}$. Die Bedingung des Bestehens einer Lösung ist:

$$\dim \underline{y} \geqslant \dim \underline{x} + \dim \underline{z} .$$

Mit Ausnahme des Falls, daß die Zustandskoordinaten direkt der Messung zugänglich sind, erfordern die komplexen, in die Steuerungsanordnungen einbegriffenen Systeme, daß gewählte Ausgangsgrößen $\underline{y}$ gemessen werden. Sie beschreiben direkt die Beziehung zwischen den Zustandsparametern x_i und den Symptomen dieses Zustandes.

Diese Symptome werden z. B. in dem schwingungsakustischen Erscheinungsfeld $\underline{\tilde{y}}$ [1] sichtbar:

$$\underline{\tilde{y}} = \underline{h}(\underline{x}, \underline{z}) \; . \tag{3}$$

Unter dem Begriff des diagnostischen Modells verstehen wir in diesem Fall die Operation $\underline{F}$, welche der Menge der Symptome (Anzeichen), die durch den Vektor $\underline{\tilde{y}}$ repräsentiert wird, die Menge der durch den Vektor $\underline{x}$ beschriebenen Zustandsparameter zuordnet, wobei:

$$\underline{x} = \underline{F}(\underline{\tilde{y}}) \; . \tag{4}$$

Die Prozedur, welche eine Schätzung der Operation $\underline{F}$ erlaubt, wird als die Prozedur der diagnostischen Identifikation (PID) bezeichnet.

Eine wertvolle Ergänzung des, mit Gleichung (4) beschriebenen Modells, ist die Kenntnis der Abhängigkeit der Zustandssymptome von der Betriebszeit

$$\tilde{y}_j = \tilde{y}_j(\vartheta) \tag{5}$$

welche die Vergrößerung des Verschleisses in einem gewissen Intervall $\Delta\vartheta$ von dem Zeitmoment der Diagnose vorauszusehen erlaubt.

Der Bau eines Modells, das eine glaubwürdige Voraussicht erlaubt, verlangt eine große Menge von experimentellen Daten, ist also ein kostspieliges und langdauerndes Experiment. Die Zeitdauer der Untersuchung kann bedeutend verkürzt werden, wenn man über Teile verfügt, welche standardmäßige Verschleißgrade aufweisen und wenn man die voll brauchbaren Teile durch diese Teile ersetzt. Eine solche Prozedur der diagnostischen Identifikation (PID), welche auf ein aktives diagnostisches Experiment gestützt ist, erfordert eine bedeutende Zahl von Stillständen des Objekts in Verbindung mit teilweiser oder völliger Demontage, was oft ihre praktische Anwendung ausschließt. Eine Alternative für diese Form des Experiments kann ein aktiv-passives Experiment sein, welches darauf beruht, daß die Werte der Koeffizienten des Vektors $\underline{z}$, z. B. nach einem Faktorenplan der ersten Ordnung gesteuert werden.

Beim Betrachten der Beobachtbarkeit des Objekts [Gleichung (3)] entsteht die Frage, ob der Zustandsvektor $\underline{x}$ beim Messen von $\underline{\tilde{y}}$ eindeutig bestimmt werden kann. Wenn wir die Information über die Zustandsgleichungen des Objekts nicht ausnützen, dann ist es zur Sicherung der verlangten Beobachtbarkeit nötig, daß $\underline{x}$ eindeutig mit $\underline{\tilde{y}}$ verbunden ist. Diese Eigenschaft kann für kleine Abweichungen von $\underline{x}$ untersucht werden. Es ist dann notwendig, daß für jedes $\underline{z}$ und daß in einer entsprechenden Umgebung von $\underline{x}$, die Bedingung der Ordnung der Matrix

$$r\left[\frac{\partial h_l}{\partial x_i}\right] = \dim \underline{x} \quad \text{erfüllt ist.} \tag{6}$$

Das zieht, wie schon erwähnt, die Forderung $\dim \underline{\tilde{y}} \geqslant \dim \underline{x}$ nach sich. Im Fall, daß nur der Teil $\underline{x}^1$ des Vektors $\underline{x}$ interessant ist, hat die Gleichung des Ausganges die Form

$$\underline{\tilde{y}} = \underline{h}(\underline{x}^1, \underline{z})$$

und die Bedingung (6) wird auf $\underline{x}^1$ angewendet.

Wenn aber die Gleichung des Ausganges sowohl $\underline{x}^1$, wie auch den übrigen Teil des Vektors $\underline{x}$, d. h. $\underline{x}^2$, enthält, bekommen wir

$$\underline{\tilde{y}} = \underline{h}(\underline{x}^1, \underline{x}^2, \underline{z}) \; . \tag{7}$$

Dann ist die Bedingung $r\left[\frac{\partial h_l}{\partial x_i}\right] = \dim \underline{x}^1$ (8)

weiterhin richtig, aber die Bestimmung von $\underline{x}^1$ auf Grund von $\underline{\tilde{y}}$ ist nicht einfach. Die Messung des Wertes $\underline{\tilde{y}}$ ist dann durch den Einfluß von $\underline{x}^2$, als einer Art Störungen belastet, die mit $\underline{x}^1$ korreliert sind und die Feststellung des Zustandes $\underline{x}$ wird einen statistischen Charakter annehmen. Es wird dann über die Schätzung von $\underline{x}^1$ und $\underline{x}^2$ gesprochen und man kann verschiedene Methoden der Filterung des Signals $\underline{\tilde{y}}$ anwenden.

2. Aktives diagnostisches Experiment

Die diagnostischen Untersuchungen können bedeutend kürzer und effektiver gemacht werden, wenn:

- eine zahlreiche Menge von Exemplaren des gleichen Typs zur Verfügung steht
- eine Möglichkeit der Demontage und des Austausches von Teilen mit bestimmtem Verschleißgrad besteht.

In einem solchen Fall ist es möglich, ein aktives diagnostisches Experiment anzuwenden, welches meistens ein Faktorenplan der ersten Ordnung ist. Das heißt, es setzt die Einstellung eines jeden Eingangsparameters in zwei Pegeln voraus. Diese Eingangsparameter sind: $x_1, \ldots, x_\nu$ (die Zustandsvariablen) und $z_1, \ldots, z_\mu$ (veränderliche Arbeitsbedingungen). Die Zahl N der notwendigen Messungen beträgt:

$$\mu + \nu + 1 \leqslant N \leqslant 2^{\nu+\mu} \tag{9}$$

Im weiteren werden wir Faktorenexperimente der ersten Ordnung betrachten, d. h.

$$N = 2^{\nu+\mu} \tag{10}$$

Es wird weiter vorausgesetzt:

1. Jede von den x_i $(i = 1, \ldots, \nu)$ Koordinaten kann zwei Werte x_i^{I} und x_i^{II} annehmen, was dem Zustand der Brauchbarkeit, mittleren Brauchbarkeit und der Unbrauchbarkeit des Teiles x entspricht. Normalerweise werden weiter dimensionslose Variable angenommen:

$$x_i^{I} = +1 \quad \text{für} \quad x_i^{I} \in X^{I}$$

$$x_i^{II} = -1 \quad \text{für} \quad x_i^{II} \in X^{II} \quad \text{und}$$

$$z_{ka} = +1, \quad z_{kb} = -1 \; .$$

Der Raum der Steuerung ist also ein $n = \nu + \mu$ dimensionaler Raum von Hamming.
Im Raum x^I befinden sich 2^μ Gipfel dieses Raumes, dagegen die übrigen Punkte der Anzahl $2^\mu(2^\nu - 1)$ im Gebiet x^{II}.
Die Räume R^ν_x und R^μ_z sind orthogonal, was der Unabhängigkeit des Zustandes des Objektes von den (in zulässigen Grenzen) wechselnden Arbeitsbedingungen entspricht.

2. Die Unveränderlichkeit der determinierten statischen Charakteristiken der Störungen $\underline{n}$ (nicht meßbar und nicht steuerbar). Diese Postulat ist gewöhnlich bei $\underline{x}$ und $\underline{z}$ = const. erfüllt. Die Genese des Prozesses $\underline{n}$ suggeriert eine normale Verteilung. Der Einfluß von $\underline{n}$ auf $\underline{y}$ wird durch die Kovarianzmatrix

$$\underline{K} = M < [\underline{y} - M(\underline{y})]\ [\underline{y} - M(\underline{y})]^T > \tag{11}$$

oder durch ihre Schätzung

$$\overline{K} = \frac{1}{N-1} \sum_1^N (y_i - \overline{y}_i)(y_i - \overline{y}_i)^T \tag{12}$$

beschrieben, welche auf Grund von N Realisierungen berechnet wird.

3. Bezüglich des vibroakustischen Signals $\tilde{\underline{y}}$ wird vorausgesetzt:
a) Im Modell eines Objekts der Diagnostik berücksichtigen wir die Meßverteilung. Es erlaubt unbelastete Schätzungen der Mittelwerte $\overline{\underline{y}}$ bei festgelegten $M(\underline{x})$ und $M(\underline{z})$ zu gewinnen.
b) Das Signal wird durch einen m-dimensionalen Vektor $\underline{y}(y_1, \ldots, y_m)$ beschrieben, dessen Komponente von diskreten Werten einer determinierten Charakteristik z. B. des Amplitudenspektrums gebildet werden:
c) In Zusammenhang mit (a) ist das Objekt der Diagnostik durch die Gleichung

$$M(\underline{y}) = \Phi[M(\underline{x}), M(\underline{z})] \tag{13}$$

beschrieben.

3. Abbildung des Experiments im Raum der Beobachtung (Messung) R^m_y

Meßergebnisse in der Form einer Reihe N von diskreten Werten Y, z. B. eines Amplitudenspektrums bei verschiedenen $\underline{x}$ und $\underline{z}$, sind durch die Größen $\underline{\Delta}x$, $\underline{\Delta}z$ und $\underline{K}$ repräsentiert. Für ein einfaches zwei-Faktoren-Experiment vom Typ 2^n ($n = \nu + \mu$, $\nu = 1$, $\mu = 1$) betragen diese Grössen (Bild 1):

$$\underline{\Delta}x = \underline{\Delta}x_a = \underline{\Delta}x_b = \overline{\underline{y}}^{II}_b - \overline{\underline{y}}^{I}_b = \overline{\underline{y}}^{II}_a - \overline{\underline{y}}^{I}_a$$

$$\underline{\Delta}z = \underline{\Delta}^I_z = \underline{\Delta}^{II}_z = \overline{\underline{y}}^{II}_b - \overline{\underline{y}}^{II}_a = \overline{\underline{y}}^{I}_b - \overline{\underline{y}}^{I}_a$$

$$\underline{K} = M[(\underline{y}' - \overline{\underline{y}})(\underline{y}' - \overline{\underline{y}})^T] = \underline{K}^I_a = \underline{K}^{II}_b = \underline{K}^{II}_a = \underline{K}^{II}_b \ .$$

Der Vektor $\underline{\Delta}x$ repräsentiert die Änderung des Mittelwertes $\overline{\underline{y}}$ beim Übergang vom Zustand I zum Zustand II,

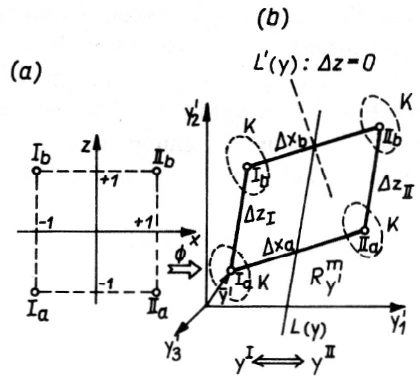


Bild 1
a) Der Raum der Steuerung: 2^2 dimensionaler Raum von Hamming
b) Abbildung des Experiments im Raum Beobachtung (Messung) $R^m_{y'}$

$\underline{\Delta}z$ repräsentiert die Änderung des Mittelwertes $\overline{\underline{y}}$ beim Übergang vom Niveau a auf b.
Die Matrix $\underline{K}$ repräsentiert die Wirkung der Störungen $\{\underline{n}\}$.
Die Kurven $\underline{K}$ (Ellipsoide mit den Gleichungen $[(y' - \overline{y})\underline{K}^{-1}(y' - \overline{y})^T = \epsilon^2]$)) sind Flächen der gleichen Wahrscheinlichkeit der Abweichungen des Vektors $\underline{y}$ vom Mittelwert bei festgelegten $\underline{x}$ und $\underline{z}$. Die Gerade $\overline{L}(\underline{y})$ (im allgemeinen eine Hyperfläche) bildet eine förmliche konventionelle Grenze der Mengen I und II der Endpunkte des Vektors $\underline{y}$, welche den Zuständen I und II entsprechen. Aus der vorausgesetzten Linearität der Transformation Φ folgt die Parallelität von $\underline{\Delta}x$ und $\underline{\Delta}z$.
Im allgemeinen Fall eines vollen Faktoren-Experiments $2^{\nu+\mu}$ ist die Berechnung der Messungen in Form von Δx_i, Δz_j und K_α ($\alpha_i = 1 \ldots, 2^n$) erschwert.
Die Meßergebnisse sind repräsentiert in diesem Fall durch die ganze Menge (Ωy):

$$\underline{\Delta}\beta = \overline{\underline{y}}_\varphi - \overline{\underline{y}}_\eta : \quad \rho_H[(\underline{x}_\varphi, \underline{z}_\varphi)(\underline{x}_\eta, \underline{z}_\eta)] = 1 \tag{14}$$

ρ_H = Entfernung im Sinn von Hamming, $(\underline{x}_\varphi, \underline{z}_\varphi)$ $(\underline{x}_\eta, \underline{z}_\eta)$ – Punkte im Raum $H^{\nu+\mu}_{x,z}$, denen die Vektoren $\overline{\underline{y}}_\varphi$, $\overline{\underline{y}}_\eta$ und $\underline{K}_\alpha$ entsprechen. Es ist bequem, die Kanten $\underline{\Delta\beta}$ auf Δx_i und Δz_j zu teilen, wie es am einfachen Experiment gezeigt wurde. Die Menge Ωy enthält also $(2 + n)\, 2^{n-1}$ Elemente ($\underline{\Delta}\beta$ und $\underline{K}\,\alpha$).

Es wird weiterhin vorausgesetzt:

1. Nur zwei Realisierungen des Vektors $\underline{X} : \underline{X}^I$ und $\underline{X}^{II}$, die übrigen Variablen $\underline{x}$ betrachten wir als Störungen. Es ändert sich die Anzahl der Parameter nicht, denn es sind weiterhin $\nu + \mu$. Es verursacht nur eine Änderung der Dimension von $\underline{x}$ und $\underline{z}$ auf dim $\underline{x}$ = 1 und dim $\underline{z}$ = $\nu + \mu - 1$.

2. $\underline{K} = K_\alpha$ = const.

Die Menge der Beobachtungen Ωy enthält jetzt den Vektor $\underline{\Delta}\,x$

$2(\nu + \mu - 1)$ Vektoren $\underline{\Delta}\,z$

die Matrix $\underline{K}$.

Die Experimente zeigen, daß das Steuern von $\underline{x}$ und $\underline{z}$ einen Einfluß auf $\underline{y}$ hat. Daraus folgt die Eigenschaft (Bild 2).

$$\|K\| \leqslant \|\underline{\Delta}\, x, z_j\|^2$$

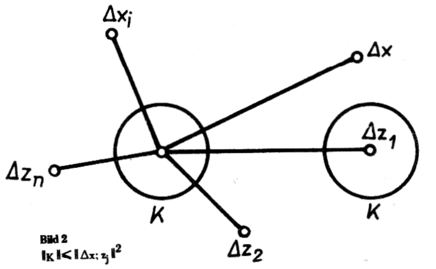


Bild 2
$\|K\| < \|\Delta x; z_j\|^2$

In dieser Situation wird die Konfiguration der Vektoren $\underline{\Delta}$ z durch die Lage der Fläche L $(\underline{y})$ und **nicht** durch die Eigenvektoren $\underline{K}$ bestimmt (wie bei **passivem diagnostischen Experiment** passiv im Verhältnis zu Störungen $\underline{\Delta}$ z = 0, L′ (y) Bild 1). Daher hat die Art der Verteilung $P[\overline{y}, \underline{K} : \underline{x}, \underline{z}]$ keinen Einfluß auf L $(\underline{y})$.

In weiteren Betrachtungen wird ein neuer Maßstab der gemeinsamen Wirkung der Störungen $\underline{n}$ und Steuerungen $\underline{z}$ auf $\underline{y}$ in der Form einer verallgemeinerten Matrix der Kovarianz angegeben:

$$\underline{B}^{m\times m} = \underline{K} + \underline{\Delta} z \cdot \underline{\Delta}_z^T . \qquad (15)$$

Die Matrix $\underline{B}$ widerspiegelt die Wirkung der steuerbaren und nichtsteuerbaren Störungen. Eine Vereinfachung der Beobachtungen in Ω y sollte keine Verringerung der Information über Zustände von $\underline{x}$ verursachen. Mit anderen Worten: die in Ω y gesuchte Größe sollte eine Information über $\underline{x}$ enthalten und gleichzeitig eine möglichst kleine Anzahl von Dimensionen haben.

4. Postulate der Optimierung der Verarbeitung des Signals y für Diagnostik der Zustände I und II:

1. Klassifizierung der Zustände des Objekts sollte auf den Werten einer Koordinate – einer Skalargröße z. B. u erfolgen.
2. Die Entfernung der Zustände I und II in Richtung der Koordinate u soll maximal sein. Die Entfernung der Zustände a und b soll minimal sein. Die Störeinflüsse $\underline{n}$ sollen minimal sein.
3. Die numerische Realisierung des Verarbeitungsprozesses des Signals $\underline{y}$ soll einen nur kleinen Grenzfehler bei vorgegebener Genauigkeit der Eingangsdaten haben.

Für optimal wird also eine solche Reduzierung betrachtet werden, welche bei maximaler Einhaltung der Information über die Zustände von $\underline{x}$, den Einfluß der Störungen $\underline{z}$ und $\underline{n}$ minimiert. Das Ziel der Projektion ist die Minimierung:

1. der Anzahl der Dimensionen der Charakteristik des Signals $\underline{y}$, welches die Lage der Fläche L $(\underline{y})$ bestimmt,
2. des Einflusses der Störungen $\underline{z}$ und $\underline{n}$ auf die Charakteristik $\underline{y}$,
3. der Verluste der Information über $\underline{x}$.

Für diesen Zweck wurde die lineare Transformation des Raumes R_y^m angewendet, d. h. Projektion auf die Richtung u, welche repräsentiert ist durch das Verhältnis:

$$\left.\begin{aligned} f(\underline{c}) &= \frac{\underline{c}^T \cdot \underline{\Delta} x \cdot \underline{\Delta}_x^T \cdot \underline{c}}{\underline{c}^T \cdot \underline{B} \cdot \underline{c}} = \frac{(\underline{c}^T \underline{\Delta} x)^2}{\underline{c}^T (\underline{K} + \underline{\Delta} z \cdot \underline{\Delta}_z^T) \cdot \underline{c}} \\ &= \frac{(\underline{c}^T \cdot \underline{\Delta} x)^2}{\underline{c}^T \underline{K} \cdot \underline{c} + \underline{c}^T \cdot \underline{\Delta} z \underline{\Delta}_z^T \cdot \underline{c}} = \frac{(\underline{c}^T \underline{\Delta} x)^2}{\underline{c}^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{c} + (\underline{c}^T \underline{\Delta} z)^2} \\ &= \frac{(\underline{\Delta} u_x)^2}{\underline{D} u + (\underline{\Delta} u_z)^2} \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Die neue Koordinate $\underline{u} = \underline{c}^T \cdot \underline{Y}$ soll das Postulat

$$\max \frac{(\underline{\Delta} u_x)^2}{\underline{D} u + (\underline{\Delta} u_z)^2} = q_1 \quad \text{erfüllen}$$

wobei:

u – Koordinate in Richtung des Vektors $\underline{c}$,

$(\underline{\Delta} u_x)^2 = (\underline{c}^T \cdot \underline{\Delta} x)^2 = [\underline{c}^T (\underline{u}_{x_I} - \underline{u}_{x_{II}})]^2$ – Änderung von $\underline{x}$, welche der Diagnose unterliegt. Quadrat des Unterschiedes der Mittelwerte von u beim Übergang von Zustand I zu II,

$(\underline{\Delta} u_z)^2 = (\underline{c}^T \cdot \underline{\Delta} z)^2 = [\underline{c}^T (\underline{u}_{z_a} - \underline{u}_{z_b})]^2$ –

Quadrat der Unterschiede der Mittelwerte von $\underline{u}$ beim Übergang vom Niveau a auf b, $\underline{D}u = \underline{c}^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{c}$ – Dispersion der Koordinate $\underline{u}$ bei festgelegten $\underline{x}$ und $\underline{z}$ oder Dispersion des Vektors $\underline{y}$ in Richtung $\underline{c}$, weil

$u = \underline{c}^T \cdot \underline{y}$

$\max f = f(\underline{c}_{opt}) = q_1 .$

Die Größe $f(\underline{c}_{opt}) = q_1$ repräsentiert in gewissem Sinne das Verhältnis der Energie des Nutzsignals zur summarischen Energie der Störungen, und sie ist ein Maß der Entfernung der Zustände I und II im Raum R_u^1 $(R_u^1 \subset R_y^m)$.

$\underline{c}_{opt}$ und q_1 bilden die gesuchten Charakteristiken des Signals!

Zur Gewinnung von $\underline{c}_{opt}$ soll das Verhältnis:

$$I(\underline{c}) = \underline{c}^T \underline{\Delta} x \cdot \underline{\Delta}_x^T \cdot \underline{c} - \lambda(\underline{c}^T \cdot \underline{B} \cdot \underline{c} - 1) \qquad (17)$$

maximiert werden.

Erläuterung!

Es wird $\underline{c}$ so gewählt, daß $\underline{c}^T \cdot \underline{B} \cdot c = 1$ ist.
Wenn $\underline{c}$ optimal ist, dann ist auch $\underline{B} \cdot \underline{c}$ optimal, und es folgt:

$$\max f(\underline{c}) = \max_{\underline{c}} \left\{ \underline{c}^T \cdot \underline{\Delta} x \cdot \underline{\Delta}_x^T \cdot \underline{c} : \underline{c}^T \cdot \underline{B} \cdot \underline{c} = 1 \right\} .$$

Das ist ein bedingtes Extremum, d. h. ein Extremum der Funktion $\underline{c}^T \cdot \underline{\Delta} x \cdot \underline{\Delta}^T x \cdot \underline{c}$ unter der Bedingung $\underline{c}^T \cdot \underline{B} \cdot \underline{c} = 1$.

Die Methode der Multiplikatoren von Lagrange wird angewendet:

$$f(\underline{c}) = \underline{c}^T \cdot \underline{\Delta} x \cdot \underline{\Delta}^T x \cdot \underline{c} + \lambda (\underline{c}^T \cdot \underline{B} \cdot \underline{c} - 1) . \qquad (18)$$

Aus der Gleichung

$$\underline{\nabla} c \cdot f \, \underline{c} = 2 (\underline{\Delta} x \cdot \underline{\Delta}^T x - \lambda \underline{B}) \underline{c} = 0 \qquad (19)$$

wird $\underline{c}$ und λ bestimmt.

Wenn det $\underline{B} > 0$, dann gibt es einen Wert λ und einen entsprechenden Vektor $\underline{c}$:

$$\lambda = q_1 = \underline{\Delta}^T x \cdot \underline{B}^{-1} \, \underline{\Delta} x \qquad (20)$$

$$\underline{c}_{opt} = \underline{B}^{-1} \cdot \underline{\Delta} x \; .$$

Wie es aus (16) und (20) folgt, ist die Entfernung im eindimensionalen Raum R_u^1 gleich $q_1 = \lambda$, bei Ausnutzung der Information über alle Koeffizienten des Vektors $\underline{y}$.

q_1 ist also ein Index der Informativität des Signals $\underline{y}$ über die Zustände I und L.

Bekanntlich ist die Information über die erkannten Zustände des Objekts nicht gleichmäßig in allen Koordinaten des Vektors $\underline{y}$ verteilt. Man kann aber zeigen, daß q_1 eine nicht abnehmende Funktion der Anzahl der Koordinaten m ist:

$$q_1 (m_1) \geqslant q_1 (m_2), \quad m_1 > m_2 \; .$$

Über das Auflösungsvermögen der vorgeschlagenen Methode entscheidet die Genauigkeit ihrer numerischen Realisierung, im gegebenen Fall die Genauigkeit der Bestimmung des Vektors $\underline{c}$. Der Fehler der numerischen Bestimmung von $\underline{c}$ kann mit der Formel:

$$\frac{\| \delta \underline{c} \|}{\| \underline{c} \|} \leqslant \frac{\| \delta \, \underline{\Delta} x \|}{\| \underline{\Delta} x \|} \cdot \mathrm{cond} \, \underline{B}$$

$$\mathrm{cond} \, \underline{B} = \frac{\underline{u}_{max}}{\underline{u}_{min}} \, , \qquad (21)$$

dargestellt werden.

Bei vorgegebenem Fehler der Eingangswerte hängt die Genauigkeit der numerischen Realisierung des Vektors $\underline{c}$ von den Bedingungen der Matrix $\underline{B}$ ab. Je größer cond $\underline{B}$, desto kleiner ist das Auflösungsvermögen der Methode unabhängig von dem Wert von q_1. Deswegen wurde $q_2 = \frac{1}{\mathrm{cond} \, \underline{B}}$ als zweiter Index der Optimierung der Verarbeitung des Signals $\underline{y}$ angenommen.

Es wurde auch ein resultierender Index $q = q_1 \cdot q_2$ abgeleitet, wobei die Vereinfachung $\underline{K} = \underline{D} \cdot \underline{I}$ vorausgesetzt wird, $\underline{D}$ – Dispersion der Koordinaten y_k, welche durch den Einfluß der Störungen hervorgerufen wird, $\underline{I}$ – Einheitsmatrix.

Die Voraussetzung $\underline{K} = \underline{D} \cdot \underline{I}$ ändert nicht wesentlich die Form von $\underline{B}$, denn darüber entscheidet das Glied $\underline{\Delta} z \cdot \underline{\Delta}^T z$.

q_1 und q_2 werden jetzt durch die Beziehungen:

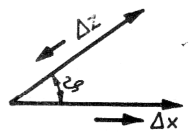
$$q_1 = \frac{\| \Delta x \|^2}{D} \cdot \frac{1 + \frac{\| \Delta z \|^2}{D} \cdot \sin \Theta}{1 + \frac{\| \Delta z \|^2}{D}}$$

$$q_2 = \frac{1}{1 + \frac{\| \Delta z \|^2}{D}}$$

bestimmt.

In Bild 3 sind die vorteilhaften Situationen des Steigens von q_1 und q_2 bei erwünschten Änderungsrichtungen von $\underline{\Delta} x$ und $\underline{\Delta} z$ und bei konstantem Wert von $\underline{D}$ mit Pfeilen markiert.

Bild 3



Es folgt aus den letzten Formeln, daß:

1. die Koordinaten y_k am vorteilhaftesten sind, wenn

$$\max \frac{dx_i^2}{D} \quad \text{und} \quad \min \frac{dx_i^2}{D} \, ,$$

2. q_1 steigt und q_2 fällt mit der Zunahme der Koordinaten, welche gemäß (1) aus der Menge alle Koordinaten y gewählt werden. Es gibt daher eine gewisse optimale Menge q_1; q_2, welche durch aufeinander folgende Versuche bestimmt werden kann, man soll dabei die Koordinaten wählen, welche die Bedingungen des Punkts (1) erfüllen.

LITERATUR

[1] J. Adamczyk: Ausgewählte Probleme der schwingungsakustischen Diagnostik von Maschinen. Zeszyty Naukowe AGH, z. 101, Krakow 1979, /Wissenschaftliche Hefte der AGH/.

Anschrift des Verfassers:
Doz. Dr.-Ing. habil. Jan Adamczyk
Akademia Gorniczo-Hutnicza
im. Stanislawa Staszica
Instytut Mechaniki i Wibroakustyki
Krakow, Al. Mickiewicza 30
VR Polen