

# Eine nichtlineare Theorie dünner Dreischichtschalen und ihre Anwendung auf die Stabilitätsuntersuchung eines dreischichtigen Streifens

Holm Altenbach, Pawel Shilin

Dreischichtige Schalenkonstruktionen können in vielen Bereichen der Technik eingesetzt werden. Dabei gibt es verschiedene Möglichkeiten zum Formulieren einer Theorie der Dreischichtschalen mit starr verbundenen Schichten. Die einfachste Variante einer solchen Theorie beruht auf der Kirchhoff-Loveschen Hypothese für das gesamte Schalenpaket. Diese Variante liefert leider ungenügende Ergebnisse, wenn sich die Steifigkeiten der Schichten stark unterscheiden. Jedoch ist dieser Fall für die Praxis besonders interessant. Daher schlagen verschiedene Autoren verbesserte Theorien vor. Die einfachste Erhöhung der Genauigkeit läßt sich durch die Einbeziehung der Querschubdeformationen erzielen, d. h. durch den Übergang zu einer Theorie, analog der Timoschenko-Reissner-Mindlinschen Theorie. Es wurde jedoch festgestellt, daß bei der traditionellen Definition der Steifigkeitsparameter für die Schale (Einführung von kinematischen Hypothesen) diese Variante ebenfalls nicht anwendbar ist, wenn starke Inhomogenitäten über die Schalendicke auftreten [1].

Wesentlich besser sind Varianten, die auf der von E. I. Grigoljuk, W. W. Bolotin und anderen Autoren eingeführten Hypothese der gebrochenen Normalen beruhen. Hier kann man eine verhältnismäßig gute Übereinstimmung der Berechnungen mit experimentellen Ergebnissen bei Stabilitätsuntersuchungen erzielen. Die Ordnung des Gleichungssystems ist bei diesen Varianten jedoch wesentlich höher im Vergleich zur klassischen Theorie einschichtiger Schalen. In der Theorie von E. I. Grigoljuk ist die Ordnung des Systems doppelt so groß, in der Theorie von W. W. Bolotin dreifach so groß [2].

In der vorliegenden Arbeit wurde als Grundlage für die Theorie der Dreischichtschalen die Theorie einfacher Schalen [3], [4], [5] genommen. Die einfache Schale ist ein formales Modell, dessen Spannungszustand durch zwei Kraftgrößenensoren (Kräftetensor, Momententensor) vollständig beschrieben wird. Dabei werden keine Annahmen über den Charakter der Verschiebungen und Spannungen über die Schalendicke getroffen. Die Grundgleichung erhält man mit Hilfe der Erhaltungssätze (Impulssatz, Drehimpulssatz), der Symmetrietheorie (s. z. B. [6]) und den asymptotischen Entwicklungen. Dadurch kann man die Problematik auf die Bestimmung sogenannter spezifischer Moduli [1] zurückführen. Wenn diese bestimmt sind, so ist die Theorie für die gegebene Klasse von Schalen vollständig formuliert. Die Theorie dünner Dreischichtschalen unterscheidet sich bei dieser Vorgehensweise von Theorien für andere Klassen von Schalen nur in den Werten der Elastizitätsmoduli.

In der Arbeit wird, wie das in der Kontinuumsmechanik üblich ist, die Tensorschreibweise verwendet. Um Verwechslungen zu vermeiden, sind im Text die meisten Symbole und Operationen erklärt. Hier nur kurz die allgemeine Symbolik:

Symbole ohne Unterstreichungen stellen Skalare dar, Symbole mit einer Unterstreichung sind Vektoren, Symbole mit doppelter Unterstreichung sind Tensoren,

wenn  $\underline{a}$  und  $\underline{b}$  zwei Vektoren sind, so ist  $\underline{a} \underline{b}$  ein dyadisches Produkt (hier ein Tensor zweiter Stufe),  $\underline{a} \cdot \underline{b}$  ein skalares Produkt (hier erhält man ein Skalar) und  $\underline{a} \times \underline{b}$  ein vektorielles Produkt (hier erhält man einen Vektor),

wenn  $\underline{\underline{A}}$  und  $\underline{\underline{B}}$  Tensoren 2. Stufe sind, so kann man sie folgendermaßen darstellen:  $\underline{\underline{A}} = \underline{a} \underline{b}$ ,  $\underline{\underline{B}} = \underline{c} \underline{d}$  und das Doppelskalarprodukt der Tensoren lautet  $\underline{\underline{A}} \cdot \cdot \underline{\underline{B}} = (\underline{b} \cdot \underline{c}) (\underline{a} \cdot \underline{d})$ .

## 1. Grundgleichungen der Theorie einfacher Schalen

Als einfache Schale bezeichnet man laut Definition ein zweidimensionales Objekt, dessen Spannungszustand durch zwei Kraftgrößenensoren vollständig definiert ist. Deshalb ist das kinematische Modell der einfachen Schale eine materielle Fläche, bei der alle Elemente starre Punkt-Körper mit 6 Freiheitsgraden sind. Die Bewegungen eines solchen Modells sind durch eine Vektorfunktion  $\underline{R}(x^1, x^2, t) = \underline{R}(x^\alpha, t)$  und durch einen orthogonalen Tensor  $\underline{P}(x^\alpha, t)$  gegeben. Der Vektor beschreibt die Translationsbewegung der Punkt-Körper, der Tensor die Rotationsbewegung. Hier sind mit  $x^1, x^2$  die materiellen Koordinaten der Fläche bezeichnet, der Parameter  $t$  gibt die Zeit an. Die Vektorbasis der Fläche wird wie folgt eingeführt:

$$\underline{R}_\alpha(x^\alpha, t) = \partial_\alpha \underline{R}(x^\alpha, t) \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \underline{R}(x^\alpha, t), \quad (1.1)$$

wobei die griechischen Indizes hier und später die Werte 1, 2 annehmen. Weiterhin führen wir den Vektor der Einheitsnormalen  $\underline{N}(x^\alpha, t)$  ein:  $|\underline{N}| = 1$ ,  $\underline{N} \cdot \underline{R} = 0$ . Damit haben wir eine Vektorbasis im Raum. Die kontravariante Basis wird mit  $\underline{R}^\alpha(x^\alpha, t)$ ,  $\underline{N}(x^\alpha, t)$  bezeichnet:  $\underline{R}^\alpha \cdot \underline{R}_\beta = \delta^\alpha_\beta$ ,  $\underline{R}^\alpha \cdot \underline{N} = 0$ . Der Gradient ist in der aktuellen ( $t \neq 0$ ) und Ausgangskonfiguration ( $t = 0$ ) folgendermaßen definiert (Summation über unterschiedlich hohe Indizes):

$$\text{Grad } \underline{F} = \underline{R}^\alpha \partial_\alpha \underline{F}, \quad \text{grad } \underline{F} = \nabla \underline{F} = \underline{r}^\alpha \partial_\alpha \underline{F}, \quad (1.2)$$

wobei  $\text{grad} = \nabla = \text{Grad} \Big|_{t=0}$ ,  $\underline{r}^\alpha = \underline{R}^\alpha(x^\alpha, 0)$  und  $\underline{F}$  ein beliebiges Tensorfeld auf der Fläche sind.

Der Spannungszustand wird in der einfachen Schale durch zwei unsymmetrische Tensoren 2. Stufe definiert

$$\underline{T}(x^\alpha, t) = \underline{R}_\alpha \underline{T}^\alpha, \quad \underline{T}^\alpha = \sqrt{\underline{R}^\alpha \cdot \underline{R}^\alpha} \underline{T}_{(\alpha)}, \quad \underline{N} \cdot \underline{T} = 0, \quad (1.3)$$

$$\underline{M}(x^\alpha, t) = \underline{R}_\alpha \underline{M}^\alpha, \quad \underline{M}^\alpha = \sqrt{\underline{R}^\alpha \cdot \underline{R}^\alpha} \underline{M}_{(\alpha)}, \quad \underline{N} \cdot \underline{M} = 0. \quad (1.4)$$

Hier sind  $\underline{T}_{(\alpha)}$  und  $\underline{M}_{(\alpha)}$  die physikalischen Kräfte- und Momentenvektoren, die je Längeneinheit der Kurve  $x^\alpha = \text{konst.}$  wirken und dabei die Reaktion des Kontinuums, welches sich auf der Seite des Zuwachses der Koordinate  $x^\alpha$  befindet, modelliert. Entsprechend kann man  $\underline{T}$  und  $\underline{M}$  als Cauchysche Kräfte- und Momententensoren bezeichnen. Dabei gelten folgende Formeln:

$$\underline{T}(\underline{\nu}) = \underline{\nu} \cdot \underline{T}, \quad \underline{M}(\underline{\nu}) = \underline{\nu} \cdot \underline{M}, \quad |\underline{\nu}| = 1, \quad \underline{\nu} \cdot \underline{N} = 0. \quad (1.5)$$

Die Vektoren  $\underline{T}(\underline{\nu})$  und  $\underline{M}(\underline{\nu})$  wirken auf Flächen, die dem Vektor  $\underline{\nu}(x^\alpha, t)$  orthogonal sind.

Die Bewegungsgleichung kann man in den beiden gebräuchlichen Formen angeben. In der aktuellen Konfiguration lauten sie:

$$\text{Div} \underline{T} + \rho \underline{F} = \rho(\underline{v} + \underline{\Theta}_1^T \cdot \underline{\Omega})^*, \quad (1.6)$$

$$\text{Div} \underline{M} + \underline{T}_x + \rho \underline{L} = \rho(\underline{\Theta}_1 \cdot \underline{v} + \underline{\Theta}_2 \cdot \underline{\Omega})^* + \rho \underline{v} \times \underline{\Theta}_1^T \cdot \underline{\Omega}. \quad (1.7)$$

Hier bedeuten:  $\rho(x^\alpha, t)$  – die Massendichte,  $\rho \underline{F}$  und  $\rho \underline{L}$  – die äußere Kraft und das äußere Moment je Flächeneinheit,  $\underline{T}_x = \underline{R}_\alpha \times \underline{T}^\alpha$ ,  $\underline{\Theta}_1$  und  $\underline{\Theta}_2$  – der erste und zweite Trägheitstensor, die die Massenverteilung innerhalb der Punkt-Körper kennzeichnen,  $\underline{v}$  und  $\underline{\Omega}$  – die lineare und die Winkelgeschwindigkeit der Punkt-Körper  $\underline{v}(x^\alpha, t) = \dot{\underline{R}}(x^\alpha, t)$ ,  $\underline{\Omega} = -\frac{1}{2} [\underline{P} \cdot \underline{P}^T]_x$ . (1.8)

Der obere Index T bedeutet „transponiert“,  $(\ )^* = \frac{d}{dt}$

und die Divergenz führen wir folgendermaßen ein:

$$\text{Div} \underline{S} = \underline{R}^\alpha \cdot \partial_\alpha \underline{S}, \quad \forall \underline{S}(x^\alpha, t).$$

Das Massenerhaltungsgesetz gibt den Zusammenhang zwischen den Dichten in beiden Konfigurationen an

$$\sqrt{A}(x^\alpha, t) \rho(x^\alpha, t) = \rho_0(x^\alpha) \sqrt{a}, \quad (1.9)$$

$$A \equiv \det(\underline{R}_\alpha \cdot \underline{R}_\beta), \quad a = A(x^\alpha, 0).$$

Die Trägheitstensoren kann man wie folgt definieren:

$$\underline{\Theta}_\alpha(x^\alpha, t) = \underline{P}(x^\alpha, t) \cdot \underline{\Theta}^0(x^\alpha) \cdot \underline{P}^T(x^\alpha, t), \quad (1.10)$$

$$\underline{\Theta}^0(x^\alpha) = \underline{\Theta}_\alpha(x^\alpha, t) \Big|_{t=0},$$

wobei  $\underline{P}(x^\alpha, 0) = \underline{E}$  (Einheitstensor) vorausgesetzt wird. Die konkrete Form für  $\rho(x^\alpha, t)$  und  $\underline{\Theta}_\alpha(x^\alpha, t)$  hängt von

der Spezifik der zu betrachtenden Aufgabe ab. So läßt sich z. B. für Schalen mit konstanter oder sich schwach ändernder Dicke zeigen, daß folgende Formeln gelten:

$$\rho_0 = \langle \tilde{\rho}_0 \rangle, \quad \rho_0 \underline{\Theta}_1^0 = \langle \tilde{\rho}_0 z \rangle \underline{a} \times \underline{n}, \quad (1.11)$$

$$\rho_0 \underline{\Theta}_2^0 = \langle \tilde{\rho}_0 z^2 \rangle \underline{a},$$

wobei  $\underline{a} = \nabla \underline{r}$ ,  $\underline{r}(x^\alpha) = \underline{R}(x^\alpha, 0)$ ,  $\underline{n} = \underline{N}(x^\alpha, 0)$  sind und  $\tilde{\rho}_0(x^\alpha)$  die Dichte des dreidimensionalen Kontinuums in der Ausgangskonfiguration,  $z$  der Abstand in Normalrichtung von der Bezugsfläche bedeuten und die eckigen Klammern wie folgt definiert sind:

$$\langle f(x^\alpha, z) \rangle = \int f(x^\alpha, z) (1 - 2zH + z^2K) dz, \quad \forall f. \quad (1.12)$$

Die Integration erfolgt über die Dicke der Schale und  $H$  und  $K$  sind als mittlerer und Gaußscher Krümmungsradius eingeführt.

Nach Definition der Kirchhoff-Piolaschen Kräfte- und Momententensoren

$$\underline{T}_\Pi = \sqrt{\frac{A}{a}} (\text{Grad} \underline{r})^T \cdot \underline{T}, \quad (1.13)$$

$$\underline{M}_\Pi = \sqrt{\frac{A}{a}} (\text{Grad} \underline{r})^T \cdot \underline{M}$$

kann man die Bewegungsgleichungen (1.6) und (1.7) in der Ausgangskonfiguration darstellen:

$$\nabla \cdot \underline{T} + \rho_0 \underline{F} = \rho_0(\underline{v} + \underline{\Theta}_1^T \cdot \underline{\Omega})^*, \quad (1.14)$$

$$\nabla \cdot \underline{M} + (\nabla \underline{R}^T \cdot \underline{T}_\Pi)_x + \rho_0 \underline{L} = \rho_0(\underline{\Theta}_1 \cdot \underline{v} + \underline{\Theta}_2 \cdot \underline{\Omega})^* + \rho_0 \underline{v} \times \underline{\Theta}_1^T \cdot \underline{\Omega}. \quad (1.15)$$

Bei gewissen Einschränkungen auf die Klasse der betrachteten Schalen [5] wird die Verformung der einfachen Schale durch folgende Deformationstensoren definiert:

$$\underline{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{R} \cdot \nabla \underline{R}^T - \underline{a}), \quad \underline{\gamma} = \nabla \underline{R} \cdot \underline{P} \cdot \underline{n}, \quad (1.16)$$

$$\underline{\Phi} = \underline{K}^x \cdot \underline{a} \cdot \underline{P}^T \cdot \nabla \underline{R}^T + \frac{1}{2} \underline{b} \cdot \underline{c} \cdot \nabla \underline{R} \cdot \nabla \underline{R}^T + \frac{1}{2} \underline{b} \cdot \underline{c}.$$

Hier sind

$$\underline{b} \cdot \underline{c} = \nabla \underline{n} \times \underline{n}, \quad \underline{K}^x \cdot \underline{a} \cdot \underline{P}^T = -\frac{1}{2} \underline{r}_\alpha (\partial_\alpha \underline{P} \cdot \underline{P}^T) - \underline{b} \cdot \underline{c}, \quad (1.18)$$

$$\underline{c} = -\underline{a} \times \underline{n}.$$

Der Tensor  $\underline{\epsilon}$  enthält die Dehnungen und Gleitungen in der Bezugsfläche,  $\underline{\gamma}$  ist der Querschubdeformationsvektor und  $\underline{\Phi}$  der Biegeverformungs- und Verdrillungstensor.

Für elastische Schalen kann man ein elastisches Potential  $W(\underline{\epsilon}, \underline{\Phi}, \gamma)$  einführen. Die Kräfte- und Momententensoren lassen sich als Ableitungen dieses Potentials darstellen

$$\underline{T}_\Pi = \frac{\partial W}{\partial \underline{\epsilon}} \cdot \underline{\nabla} \underline{R} + \frac{\partial W}{\partial \underline{\gamma}} \underline{P} \cdot \underline{n} + \left( \frac{\partial W}{\partial \underline{\Phi}} \right)^T \cdot \underline{K}^x \cdot \underline{a} \cdot \underline{P}^T - \frac{1}{2} [ \underline{c} \cdot \underline{b} \cdot \frac{\partial W}{\partial \underline{\Phi}} - \left( \frac{\partial W}{\partial \underline{\Phi}} \right)^T \cdot \underline{b} \cdot \underline{c} ] \cdot \underline{\nabla} \underline{R}, \quad (1.19)$$

$$\underline{M}_\Pi = \frac{\partial W}{\partial \underline{\Phi}} \cdot \underline{\nabla} \underline{R} \cdot \underline{P} \cdot \underline{a} \cdot \underline{P}^T. \quad (1.20)$$

Um eine geschlossene Theorie zu erhalten, muß man eine konkrete Form der Deformationsenergie annehmen. Nur in diesem Punkt unterscheiden sich die verschiedenen Schalenklassen in der Theorie einfacher Schalen. In der vorliegenden Arbeit werden im weiteren nur dünne Dreischichtschalen betrachtet.

## 2. Die Deformationsenergie für dünne Dreischichtschalen

Alle Informationen über die physikalischen Eigenschaften der Schale sind in der Struktur der Deformationsenergie enthalten. Treffen wir folgende Einschränkungen:

- Die Schale sei aus steifen Materialien, welche nur verhältnismäßig kleine elastische Verformungen zulassen (Ausschluß von Elastomeren).
- Das dreischichtige Paket sei relativ dünn, d. h.  $h/L \ll 1$ , wobei  $h$  die Gesamtdicke des Pakets und  $L$  die kleinste charakteristische Längenausdehnung der Bezugsfläche sind.

Bei diesen Einschränkungen kann man die Deformationsenergie als quadratische Form annehmen:

$$W(\underline{\epsilon}, \underline{\Phi}, \gamma) = \frac{1}{2} \underline{\epsilon} \cdot \underline{\epsilon} \cdot \underline{C}_1 \cdot \underline{\epsilon} + \underline{\epsilon} \cdot \underline{\epsilon} \cdot \underline{C}_2 \cdot \underline{\Phi} + \frac{1}{2} \underline{\Phi} \cdot \underline{\Phi} \cdot \underline{C}_3 \cdot \underline{\Phi} + \frac{1}{2} \underline{\gamma} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \underline{\gamma} + (\underline{\epsilon} \cdot \underline{\Gamma}_1 + \underline{\Phi} \cdot \underline{\Gamma}_2) \cdot \underline{\gamma}, \quad (2.1)$$

dabei sind  $\underline{C}_1, \underline{C}_2, \underline{C}_3$  Tensoren 4. Stufe,  $\underline{\Gamma}_1, \underline{\Gamma}_2$  Tensoren 3. Stufe und  $\underline{\Gamma}$  ein Tensor 2. Stufe. Diese Tensoren heißen Elastizitätstensoren. Ohne weitere Einschränkungen vorzunehmen, kann man zeigen, daß die Elastizitätstensoren folgenden Bedingungen genügen müssen:

$$\underline{d} \cdot \underline{C}_1 = \underline{C}_1 \cdot \underline{d}, \quad \underline{d} \cdot \underline{C}_3 = \underline{C}_3 \cdot \underline{d}, \quad \underline{c} \cdot \underline{C}_1 = 0, \quad \underline{c} \cdot \underline{C}_2 = 0, \quad \underline{c} \cdot \underline{\Gamma}_1 = 0, \quad (2.2)$$

dabei sind  $\underline{d}$  ein beliebiger,  $\underline{c}$  ein schiefssymmetrischer Tensor 2. Stufe.

Die Elastizitätstensoren hängen von den Materialeigenschaften und dem Aufbau der Schale in den betrachteten Punkten ab. Auf Grund der Einschränkung b) kann

man annehmen, daß die Elastizitätstensoren nicht von den Krümmungsradien der Bezugsfläche abhängen. Der Fehler hat dabei die Größenordnung  $0(h/R)$ , wobei  $R$  der Betrag des minimalen Krümmungsradius ist. Im Weiteren wird angenommen, daß die Schale aus drei orthotropen Schichten besteht, wobei zwei Symmetrieebenen im Paket existieren. Diese Symmetrieebenen sind zu folgenden Vektoren orthogonal  $\underline{e}_1(\underline{x}_\alpha), \underline{e}_2(\underline{x}_\alpha)$ :  $\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 = 0, |\underline{e}_\alpha| = 1, \underline{e}_\alpha \cdot \underline{n} = 0$ . Dann kann man zeigen, daß die Elastizitätstensoren folgende Form haben [7]:

$$\underline{C}_1 = C_{11}^1 \underline{a}_1 \underline{a}_1 + C_{22}^1 \underline{a}_2 \underline{a}_2 + C_{12}^1 (\underline{a}_1 \underline{a}_2 + \underline{a}_2 \underline{a}_1) + C_{44}^1 \underline{a}_4 \underline{a}_4, \quad (2.3)$$

$$\underline{C}_3 = C_{33}^3 \underline{a}_3 \underline{a}_3 + C_{22}^3 \underline{a}_2 \underline{a}_2 + C_{34}^3 (\underline{a}_3 \underline{a}_4 + \underline{a}_4 \underline{a}_3) + C_{44}^3 \underline{a}_4 \underline{a}_4 + C_{11}^3 \underline{a}_1 \underline{a}_1, \quad (2.4)$$

$$\underline{C}_2 = C_{13}^2 \underline{a}_1 \underline{a}_3 + C_{14}^2 \underline{a}_1 \underline{a}_4 + C_{23}^2 \underline{a}_2 \underline{a}_3 + C_{24}^2 \underline{a}_2 \underline{a}_4 + C_{41}^2 \underline{a}_4 \underline{a}_1 + C_{42}^2 \underline{a}_4 \underline{a}_2, \quad (2.5)$$

$$\underline{\Gamma} = \underline{\Gamma}_1 \underline{a}_1 + \underline{\Gamma}_2 \underline{a}_2, \quad \underline{\Gamma}_1 = 0, \quad \underline{\Gamma}_2 = 0. \quad (2.6)$$

Hier sind  $C_{11}^1, \dots, \Gamma_2$  die elastischen Moduli, welche experimentell bestimmt werden müssen. Dabei werden Tensoren 2. Stufe als Basis verwendet:

$$\underline{a}_1 = \underline{a} = \underline{e}_1 \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \underline{e}_2, \quad \underline{a}_2 = \underline{e}_1 \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \underline{e}_2, \quad (2.7)$$

$$\underline{a}_3 = \underline{c} = \underline{e}_1 \underline{e}_2 - \underline{e}_2 \underline{e}_1, \quad \underline{a}_4 = \underline{e}_1 \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \underline{e}_1.$$

Für Schalen aus apolarem Material ( $\underline{\tau} \cdot \underline{c} = 0$ , wenn  $\underline{\tau}$  der Spannungstensor in der dreidimensionalen Elastizitätstheorie ist) verschwinden  $C_{11}^3$  und  $C_{41}^2$ .

Somit wird eine dünne Dreischichtschale aus apolarem orthotropen Material durch 15 Moduli beschrieben. Die Anzahl der Moduli läßt sich im Rahmen dieses Materialmodells nicht verringern. Im Falle einer orthotropen Schale mit symmetrischem Aufbau über die Dicke (die äußeren Schichten sind gleich und als Bezugsfläche wird die geometrische Mittelfläche genommen) läßt sich zeigen, daß  $\underline{C}_2 = 0$  wird. Wenn eine Schale aus transversal-isotropen Materialien besteht, so kann man zeigen, daß  $C_{12}^1 = C_{34}^3 = \Gamma_2 = 0$  sind und  $C_{22}^1 = C_{44}^1, C_{22}^3 = C_{44}^3$  werden. Solches Material läßt sich mit 5 Moduli beschreiben. Wenn die Schale aus transversal-isotropen Materialien besteht, jedoch eine Symmetrie in Normalrichtung fehlt, so müssen die Elastizitätstensoren transversal-isotrop sein:

$$C_{22}^1 = C_{44}^1, C_{12}^1 = C_{34}^3 = 0, C_{22}^3 = C_{44}^3, C_{14}^2 - C_{23}^2 = C_{13}^2 = 0, C_{42}^2 = -C_{24}^2, \Gamma_2 = 0.$$

Diese Klasse von Schalen wird durch 7 Moduli beschrieben.

Hier seien die elastischen Moduli für dreischichtige Schalen mit orthotropen Schichten angeführt. Eine Methodik zu ihrer Bestimmung mit Hilfe von mathematischen Experimenten ist in [7] dargestellt. Das Hookesche Gesetz für orthotropes Material [8] lautet (Index  $i$  – Konstanten der  $i$ -ten Schicht):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E_1^i} \sigma_x - \frac{\nu_{12}^i}{E_2^i} \sigma_y - \frac{\nu_{13}^i}{E_3^i} \sigma_z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G_{12}^i},$$

$$\nu_{12} E_1 = \nu_{21} E_2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E_2^i} \sigma_y - \frac{\nu_{21}^i}{E_1^i} \sigma_x - \frac{\nu_{23}^i}{E_3^i} \sigma_z, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G_{13}^i},$$

$$\nu_{13} E_1 = \nu_{31} E_3,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E_3^i} \sigma_z - \frac{\nu_{31}^i}{E_1^i} \sigma_x - \frac{\nu_{32}^i}{E_2^i} \sigma_y, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G_{23}^i},$$

$$\nu_{23} E_2 = \nu_{32} E_3.$$

Die Bezugsfläche sei die geometrische Mitte der Schale. Die Schichtdicken betragen  $H_1 = h - h_1$ ,  $H_2 = h_1 + h_2$ ,  $H_3 = h - h_2$ ,  $H_1 + H_2 + H_3 = 2h$ .

Außerdem sei  $H_1^* = \frac{1}{2}(h^2 - h_1^2)$ ,  $H_2^* = \frac{1}{2}(h_1^2 - h_2^2)$ ,  $H_3^* =$

$\frac{1}{2}(h_2^2 - h^2)$ ,  $H_1^{**} = \frac{1}{3}(h^3 - h_1^3)$ ,  $H_2^{**} = \frac{1}{3}(h_1^3 + h_2^3)$ ,  $H_3^{**} =$

$\frac{1}{3}(h^3 - h_2^3)$ . Die Bezeichnungen entsprechen Bild 1.

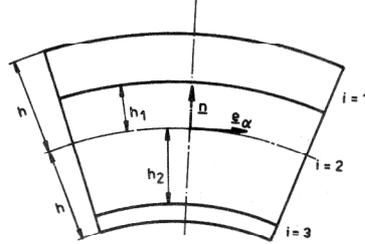


Bild 1

Wenn man folgende Abkürzungen verwendet:

$$\Delta_i = \frac{1}{E_1^i E_2^i} - \left( \frac{\nu_{12}^i}{E_2^i} \right)^2, \quad A_1^i = \frac{1}{4\Delta_i} \left( \frac{1}{E_1^i} + \frac{1}{E_2^i} - \frac{2\nu_{12}^i}{E_2^i} \right),$$

$$A_2^i = \frac{1}{4\Delta_i} \left( \frac{1}{E_1^i} + \frac{1}{E_2^i} + \frac{2\nu_{12}^i}{E_2^i} \right), \quad A_3^i = \frac{1}{4\Delta_i} \left( \frac{1}{E_2^i} - \frac{1}{E_1^i} \right),$$

so lassen sich die Elastizitätsmoduli als Summen einführen,

$$C_{11}^1 = \sum_{(i)} H_i A_2^i, \quad C_{22}^1 = \sum_{(i)} H_i A_1^i, \quad C_{12}^1 = \sum_{(i)} H_i A_3^i, \quad C_{44}^1 = \sum_{(i)} H_i G_{12}^i, \quad (2.8)$$

$$C_{13}^2 = -\sum_{(i)} H_i^* A_2^i, \quad C_{14}^2 = \sum_{(i)} H_i^* A_3^i, \quad C_{23}^2 = -\sum_{(i)} H_i^* A_3^i, \quad C_{24}^2 = \sum_{(i)} H_i^* A_1^i, \quad C_{42}^2 = -\sum_{(i)} H_i^* G_{12}^i, \quad (2.9)$$

$$C_{33}^3 = \sum_{(i)} H_i^{**} A_2^i, \quad C_{44}^3 = \sum_{(i)} H_i^{**} A_1^i, \quad C_{34}^3 = \sum_{(i)} H_i^{**} A_3^i, \quad C_{22}^3 = \sum_{(i)} H_i^{**} G_{12}^i, \quad (2.10)$$

(Summation für  $i = 1, 2, 3$ ).

Die Querschubsteifigkeiten  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  lassen sich nicht in Form eines geschlossenen Ausdrucks angeben. Sie werden durch die kleinsten positiven Wurzeln folgender transzendenten Gln. bestimmt:

$$\alpha_i^2 = G_{12}^i / G_{23}^i, \quad \beta_i^2 = G_{12}^i / G_{13}^i$$

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha_1 \lambda (h - h_1) & -1 & -\sin \alpha_2 \lambda (h_1 + h_2) & 0 \\ G_{23}^1 \alpha_1 \sin \alpha_1 \lambda (h - h_1) & 0 & -G_{23}^2 \alpha_2 \cos \alpha_2 \lambda (h_1 + h_2) & 0 \\ 0 & \cos \alpha_2 \lambda (h_1 + h_2) & 0 & -\cos \alpha_3 \lambda (h - h_2) \\ 0 & G_{23}^2 \alpha_2 \sin \alpha_2 \lambda (h_1 + h_2) & \alpha_3 & G_{13}^3 \alpha_3 \sin \alpha_3 \lambda (h - h_2) \end{vmatrix} \quad (2.11)$$



$$\underline{\underline{M}}_{\Pi} = \frac{d\psi}{dx} [(C_1 + C_2) \underline{e}_1 \underline{e}_2 - (C_1 - C_2) \underline{e}_2 \underline{e}_1] (\underline{E} - \underline{D} \underline{D}) - \frac{d\psi}{dx} (C_1 - C_2) \underline{e}_2 \left( \frac{d\underline{u}}{dx} - \frac{d\underline{u}}{dx} \cdot \underline{D} \underline{D} \right) \quad (3.8)$$

wobei  $A_1, \dots, \Gamma$  den Gln. (2.14) bis (2.16) entsprechen. Die Randbedingungen lauten:

$$x = \pm 1: \underline{e}_1 \cdot \underline{T} \cdot \underline{e}_1 = p, \quad \underline{u} \cdot \underline{e}_2 = 0, \quad w = 0, \quad (3.9)$$

$$\underline{e}_1 \cdot \underline{M} \cdot \underline{e}_2 = 0, \quad \underline{P} \cdot \underline{e}_2 = \underline{e}_2. \quad (3.10)$$

Damit haben wir eine nichtlineare Randwertaufgabe für die Funktionen  $u, w, \psi$  erhalten.

#### 4. Die Lösung der Randwertaufgabe und Bestimmung der kritischen Last

Da  $\underline{T}_{\Pi}$  und  $\underline{M}_{\Pi}$  nur von  $x$  abhängen, folgt aus Gl. (3.3)

$$\underline{e}_1 \cdot \underline{T}_{\Pi} = q_1 \underline{e}_1 + q_2 \underline{e}_2 + q_3 \underline{n}, \quad q_j = \text{konst} (j=1,2,3). \quad (4.1)$$

Entsprechend Gl. (3.9) ist  $q_1 = p$ . Wenn man Gl. (4.1) auf die Orte  $\underline{e}_{\alpha}, \underline{n}$  abbildet, erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\epsilon_{11} (A_1 + A_2) \left(1 + \frac{du}{dx}\right) + \Gamma \gamma_1 \sin \psi = p, \quad q_2 = 0, \quad (4.2)$$

$$\epsilon_{11} (A_1 + A_2) \frac{dw}{dx} + \Gamma \gamma_1 \cos \psi = q_3.$$

Da

$$(\nabla \underline{R}^T \cdot \underline{T}_{\Pi})_x = -q_3 \underline{e}_2 + \frac{d}{dx} (\underline{u} \times \underline{q})$$

ist, folgt aus der zweiten Gl. (3.3) unter Beachtung der Gl. (3.8)

$$[(C_1 + C_2) \frac{d\psi}{dx} + wp - uq_3 - q_3 x] \underline{e}_2 = \underline{\varphi} = \text{konst}, \quad (4.3)$$

hierbei ist  $\underline{\varphi}$  ein konstanter Integrationsvektor. Da die Aufgabe bezüglich  $x = 0$  symmetrisch ist, wird  $q_3 = 0$ .

Die Bedingung (3.10) ergibt  $\frac{d\psi}{dx} = 0$  bei  $x = \pm 1$ . Daher ist

der Vektor  $\underline{\varphi}$  nach Gl. (4.3) und Bedingung  $w(x = \pm 1) = 0$  Null. Somit erhält man

$$(C_1 + C_2) \frac{d\psi}{dx} + pw = 0. \quad (4.4)$$

Das System (4.2), (4.4) ergibt bei  $q_3 = 0$  drei Gln. zur Bestimmung der 3 gesuchten Funktionen. Dieses System hat bei allen Werten für  $p$  Lösungen der Form

$$u(x) \neq 0, \quad w = 0, \quad \psi = 0, \quad (4.5)$$

$$u = 0, \quad w = 0, \quad \psi = \psi_0 = \text{konst}, \quad |\psi_0| \leq \frac{\pi}{2}. \quad (4.6)$$

Im ersten Fall erfährt der Streifen die reine Zug-Druckdeformation, im zweiten Fall die Querschubdeformation. Zuerst wird der Fall (4.6) untersucht:

$$\underline{T}_{\Pi} = \Gamma \sin \psi_0 \underline{e}_1 (\sin \psi_0 \underline{e}_1 + \cos \psi_0 \underline{n}), \quad \underline{M}_{\Pi} = 0.$$

Als Randbedingung haben wir

$$\Gamma \sin^2 \psi_0 = p, \quad (4.7)$$

welche bei  $p > 0$  und  $p\Gamma^{-1} \leq 1$  erfüllt werden kann. Damit wird die Gleichgewichtsgl. zu  $(\underline{T}_{\Pi})_x = 0$ ,

$$\sin \psi_0 \cos \psi_0 = 0,$$

$\psi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$ . Eine Gleichgewichtskonfiguration tritt fol-

glich nur bei einer Zugbelastung  $p = \Gamma$  auf. Zur Untersuchung der Stabilität betrachtet man eine unendlich nahe Konfiguration  $\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{\psi} - \tilde{\psi}$  wobei  $\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{\psi}$  unendlich klein sind. Man kann zeigen, daß gemischte Gleichgewichtsformen nicht existieren, d. h. die Konfiguration ist stabil gegenüber kleinen Auslenkungen. Jedoch ist diese Konfiguration physikalisch nicht interessant, da sie großen Querschubverformungen entspricht ( $\gamma_1 = \pm 1$ ), bei denen die Energie offensichtlich nicht mehr in der quadratischen Form (2.1) darstellbar ist.

Im Falle der Untersuchung des Zustandes (4.5) erhält man statt des Systems (4.2), (4.4) nur eine Gl.

$$\frac{du}{dx} \left(1 + \frac{du}{dx}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{du}{dx}\right) = p / (A_1 + A_2), \quad \frac{du}{dx} > -1. \quad (4.8)$$

Bei Zugbelastung ( $p > 0$ ) erhält man nur eine Lösung. Bei Druckbelastung ( $p < 0$ ) muß man folgende Fälle,

die der Bedingung  $\frac{du}{dx} > -1$  genügen, unterscheiden:

$$a) -\frac{1}{3\sqrt{3}} < \frac{p}{A_1 + A_2} < 0 \quad \text{zwei Lösungen,}$$

$$b) p < -\frac{A_1 + A_2}{3\sqrt{3}} \quad \text{keine Lösung,}$$

$$c) p = -(A_1 + A_2) / 3\sqrt{3} \quad \text{eine Lösung.}$$

Dieses Verhalten des Streifens bei Druck läßt sich schwer mit intuitiven Vorstellungen in Übereinstimmung bringen. Das hat seine Ursache darin, daß auch hier die Deformationsenergieannahme in der Form (2.1) nicht aus-

reicht. Physikalisch läßt sich nur die Lösung bei  $\frac{du}{dx} \ll 1$

in Gl. (4.8) angeben, d. h. bei  $|p/A_1 + A_2| \ll 1$  (die Belastungsintensität muß klein sein). Diese Einschränkung wird nur bei genügend steifen Schalen erfüllt. Die „kleine“ Lösung der Gl. (4.9) lautet

$$u = \frac{px}{A_1 + A_2}. \quad (4.9)$$

Gemeinsam mit der Konfiguration (4.9) wird ein unendlich naher Zustand betrachtet:

$$\tilde{u} = \frac{px}{A_1 + A_2} + u_1, \quad \tilde{w} = w_1, \quad \tilde{\psi} = \psi_1. \quad (4.10)$$

Hier sind  $u_1, w_1, \psi_1$  unendlich kleine Größen. Nach Einsetzen der Ausdrücke (4.10) in die Gln. (4.2) und (4.4) und nachfolgender Linearisierung erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\frac{du_1}{dx} = 0, \psi_1 + \left(\frac{p + \Gamma}{\Gamma}\right) \frac{dw_1}{dx} = 0, \frac{d\psi_1}{dx} + \frac{p}{C_1 + C_2} w_1 = 0. \quad (4.11)$$

Daraus folgt:

$$u_1 = 0, \frac{dw_1}{dx} + \kappa^2 w_1 = 0, \psi_1 = -\left(\frac{p + \Gamma}{\Gamma}\right) \frac{dw_1}{dx},$$

$$\kappa^2 = -\frac{p \Gamma}{(C_1 + C_2)(p + \Gamma)}$$

Bei  $p > 0$  hat dieses System nur eine triviale Lösung. Bei  $p < 0$  erhält man folgende, den Randbedingungen genügende Lösung:

$$w_1 = A_n \cos \kappa_n x, \quad \kappa_n = \frac{2n-1}{2l} \pi.$$

Das bedeutet, daß im Falle des gedrückten Streifens ein Verzweigungsproblem auftritt. Der kleinste Wert  $|\kappa|$ , bei dem mehrere Lösungen auftreten, wird kritische Belastung  $p_{kr}$  genannt.  $p_{kr}$  kann man nach folgender Gl. berechnen:

$$p_{kr} = \frac{\pi^2}{4l^2} \frac{C_1 + C_2}{1 + \frac{C_1 + C_2}{\Gamma} \frac{\pi^2}{4l^2}}. \quad (4.13)$$

Wenn der Streifen aus drei gleichen Materialien besteht, so ist

$$C_1 + C_2 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, \quad \Gamma = Gh \frac{\pi^2}{6}.$$

Nach Einsetzen in Gl. (4.13) erhält man die Eulersche kritische Belastung mit einem kleinen Korrekturfaktor für den Querschub:

$$p_{kr}^E = \frac{\pi^2}{4l^2} \frac{2Eh^2}{3(1-\nu^2)} \frac{1}{1 + \frac{2}{1-\nu} \frac{h^2}{l^2}}.$$

Für einschichtige Schalen mit  $h^2/l^2 \ll 1$  kann man diesen Einfluß vernachlässigen. Für mehrschichtige Streifen mit  $G_2 \ll G$  wird der Einfluß wesentlich, da

$$\frac{C_1 + C_2}{\Gamma} \frac{\pi^2}{4l^2} \sim 1$$

sogar bei  $h^2/l^2 \ll 1$  wird. Dies läßt sich damit begründen, daß die Querschubsteifigkeit in diesem Fall sehr klein sein kann.

## 5. Numerische Ergebnisse und ihr Vergleich mit bekannten experimentellen und theoretischen Ergebnissen

Die Gl. (5.13) vergleichen wir mit Ergebnissen aus [10]. Die äußeren Schichten bestehen aus Duraluminium D-16T mit folgenden Werkstoffkenngrößen:  $E = 6,96 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$ ,  $\nu = 0,3$ . Die Füllschicht besteht aus verschiedenen Sorten von Phenoplasten mit  $\nu_2 = 0,4$ . In allen betrachteten Fällen war  $\frac{du}{dx} \sim -0,001$ . Die Moduli

wurden nach den Gln. (2.14) und (2.15) ermittelt. Für die Querschubsteifigkeiten wurden 3 Methodiken verwendet

a) nach den Gln. (2.16), (2.17),

$$b) \text{ nach } \Gamma_* = \frac{\pi^2}{6} G(h-h_1) + G_2 h_1, \quad (5.1)$$

$$c) \text{ nach } \Gamma_{**} = \frac{\pi^2}{6} \frac{GG_2 h_1 (h-h_1)}{4G_2 h_1 + G(h-h_1)}. \quad (5.2)$$

Die Formeln (5.1) und (5.2) stellen mögliche „Schaltungsmodelle“ der Steifigkeiten dar. Die Formel (5.1) entspricht dabei einer Parallelschaltung der Schichten, analog den eingeführten Steifigkeitsmoduli (2.8) bis (2.10). Dies kommt der Annahme kinematischer Hypothesen gleich. Die Formel (5.2) stellt eine Reihenschaltung dar. Man kann zeigen, daß

$$\Gamma_{**} \leq \Gamma \leq \Gamma_*$$

ist. Aus Gl. (5.13) folgt, daß die kritische Belastung sich mit der Abnahme der Querschubsteifigkeit verringert. Daraus folgt

$$p_{kr}(\Gamma_{**}) \leq p_{kr}(\Gamma) \leq p_{kr}(\Gamma_*).$$

Es ist zu erwarten, daß die experimentellen Werte  $p_e$  unter den Werten  $p_{kr}(\Gamma)$  liegen. In der Tabelle 1 werden die Ergebnisse einiger Beispiele angeführt. Mit  $p_{kr}^a$  wird die kritische Belastung nach [10] bezeichnet. Die Berechnung dieser Werte ist wesentlich komplizierter, als die Berechnungsmethodik in diesem Artikel. Aus der Tabelle 1 ist erkennbar, daß die Annahme kinematischer Hypothesen nicht befriedigt. Dies war auch der Grund zur Formulierung komplizierterer Theorien. Allgemein läßt sich feststellen, daß

$$p_{kr}(\Gamma_{**}) \leq p_e \leq p_{kr}(\Gamma)$$

ist und der Unterschied zwischen  $p_{kr}(\Gamma_{**})$  und  $p_{kr}(\Gamma)$  in den Beispielen nicht mehr als 20 % beträgt. Das bedeutet, daß man den Bereich der experimentellen Werte verhältnismäßig stark einengen kann. Der Vergleich von  $p_{kr}(\Gamma)$  und  $p_{kr}^a$  ergibt, daß die Werte, die mit der einfacheren Theorie erhalten wurden, qualitativ gleich mit  $p_{kr}^a$  sind.

Tabelle 1

Nr.	$h_1$	$h_2$	$a$	$2l$	$G_2$	$p(\Gamma_{**})$	$p_e$	$p_{krit.}$	$p(\Gamma_*)$	$p_{kr}^a$
	cm	cm	cm	cm	N/cm <sup>2</sup>					
1	0,800	0,500	40	34,5	0,321	0,383	0,459	0,483	4,157	0,478
2	0,500	0,050	40	34,5	1,470	0,707	0,725	0,834	1,706	0,677
3	0,790	0,100	65	38,9	0,516	0,608	0,776	0,810	6,509	0,739
4	0,800	0,050	40	34,5	0,645	0,705	0,810	0,872	4,161	0,810
5	1,000	0,050	40	34,5	0,705	0,981	1,132	1,209	6,359	0,933
6	1,000	0,050	40	34,5	0,958	1,264	1,479	1,541	6,364	1,109
7	1,000	0,050	40	34,5	1,084	1,389	1,550	1,690	6,366	1,456
8	0,500	0,120	40	34,5	5,136	2,218	2,303	2,725	4,670	2,559

## LITERATUR

- [1] Григолюк Э. И., Коган Ф. А.: Современное состояние теории многослойных оболочек, Прикл. Мех., 8 (1972), вып. 6, сс. 3 – 17.
- [2] Болотин В. В., Новичков Ю. Н.: Механика многослойных конструкций, Машиностроение, Москва, 1980.
- [3] Zhilin, P. A.: Mechanics of Deformable Directed Surfaces, Int. J. Solids Structures, 1976, 12, pp. 635 – 648.
- [4] Жилин П. А.: Основные уравнения неклассической теории упругих оболочек, Труды ЛПИ, 1982 (в печати).
- [5] Жилин П. А.: Новый метод построения теории упругих оболочек, Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 5.
- [6] Най, Дж.: Физические свойства кристаллов, Мир, Москва, 1967.
- [7] Altenbach, H., Shilin, P. A.: Die Bestimmung der Deformationsenergie für dreischichtige, orthotrope, dünne Schalen konstanter Dicke, Wiss. Zeitschrift der TH Magdeburg, 1982 (in Vorbereitung).
- [8] Лехницкий С. Г.: Теория упругости анизотропного тела, Наука, Москва, 1977.
- [9] Altenbach, H., Shilin, P. A.: Ermittlung der Steifigkeitsbeziehungen für Dreischichtschalen, Schiffbautagung, 1980, Rostock.
- [10] Александров А. Я. и др.: Расчет трехслойных панелей, Оборонгиз, Москва, 1960.

Anschriften der Verfasser:  
Dipl.-Ing. Holm Altenbach  
TH „Otto von Guericke“  
Sektion Dieselmotoren,  
Pumpen und Verdichter  
3010 Magdeburg, Bierutplatz 5

Doz. Dr. Pawel A. Shilin  
Leningrader Polytechnisches Institut  
Leningrad, Politechnitscheskaja 29