

# Approximative Berechnung des dynamischen Spannungsintensitätsfaktors für einen impulsbelasteten Außenriß

Rainer Clos

## 1. Einleitung

Für eine Vielzahl dynamischer Rißprobleme in unendlichen Körpern gibt es derzeit analytische Lösungen [1], [2]. Demgegenüber existieren nur wenige analytische Arbeiten, die sich mit der Beeinflussung der dynamischen Spannungsverteilung durch äußere Oberflächen des Körpers befassen [3], [4]. Gerade dieser Fall ist aber für bruchdynamische Prüfungen von großem Interesse.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Näherungsverfahren zur Berechnung des dynamischen Spannungsintensitätsfaktors (später K-Faktor) eines Außenrisses endlicher Ausgangslänge in einem Halbraum angegeben. Der Oberflächeneinfluß wird in erster Näherung berücksichtigt. Durch Fortsetzung des skizzierten sukzessiven Verfahrens kann die Näherung verbessert werden. Die Rechnungen werden für die Rißöffnungsmode I (ebener Dehnungszustand) durchgeführt. Die Rißbelastung erfolgt beliebig zeitabhängig, wobei zugelassen wird, daß sich der Riß bewegt. Die von Melville [3] bzw. Burgers u. Freund [4] benutzten Methoden sind hier nicht anwendbar. Melville behandelt die Rißöffnungsmode III. Die Anwendbarkeit des von Burgers u. Freund verwendeten Verfahrens ist auf self-similar Probleme beschränkt, d. h., ein Außenriß mit von Null verschiedener Ausgangslänge kann damit prinzipiell nicht berechnet werden.

Ausgangspunkt der hier angegebenen Modellrechnungen ist ein halbunendlicher Riß in einem unendlichen Körper, dessen Oberfläche auf der Länge  $L$  in gleicher Weise wie der Außenriß belastet wird (Bild 1). Bild 1 zeigt die Wellenfronten für eine Rißbelastung  $\sigma_{yy} = -\sigma_0 H(t)$ , wo  $H(t)$  die Sprungfunktion,  $t$  die Zeit und  $\sigma_0 > 0$  eine konstante Spannung sind, kurze Zeit nach Einschalten der Belastung. Zur Vereinfachung wurde ein ruhender Riß dargestellt.

Im unendlichen Körper treten auf der Fläche A Normalspannungen auf. Zu einem Halbraum wird dadurch übergegangen, daß A und bei einem beidseitig endlichen Kör-

per auch B jeweils als Oberfläche von Halbräumen aufgefaßt werden. Auf deren Oberfläche wird durch Kompensation der o. g. Spannungen Normalspannungsfreiheit erzwungen. Dies führt zu zusätzlichen Normalspannungen in der Rißebene, d. h., zu zusätzlichen Rißbelastungen und letztlich auch zu neuen Belastungen der Oberflächen A und B, die wiederum zu kompensieren wären.

Zur Durchführung dieses sukzessiven Verfahrens sind verschiedene Teilprobleme zu lösen. Für zwei dieser Teilprobleme wird hier der K-Faktor berechnet. Dies sind:

der auf endlicher Länge belastete halbunendliche Riß sowie

die aus der Kompensation der vom Riß weglaufenden Druckwelle auf der Fläche A resultierende Rißbelastung. Die auf A anzubringende Spannung ist im Bild 1 durch  $\sigma_{xx}^z$  gekennzeichnet.

Der Einfluß der von der Rißfront ausgehenden Zylinderwellen (nach Wechselwirkung mit der Oberfläche A) auf den K-Faktor wird diskutiert. Die Oberfläche B wird nicht berücksichtigt. Im letzten Abschnitt der Arbeit wird der Weg zur Berechnung von  $K_{ID}(v)$ , der Rißausbreitungsbruchzähigkeit, aus experimentellen Daten unter Verwendung der hier erhaltenen Ergebnisse angegeben.

## 2. Der zeitabhängig belastete halbunendliche Riß

### 2.1. Elasto-dynamische Grundbeziehungen

Das elasto-dynamische Rißspitzenspannungsfeld eines Risses mit gerader Rißfront kann stets in der Form

$$\sigma_{ij}(r, \vartheta, t) = K(t) f_{ij}(\vartheta, v) / (2\pi r)^{1/2} + \text{nichtsinguläre Terme (für } r \rightarrow 0) \quad (1)$$

geschrieben werden [5]. Dabei sind  $r$  und  $\vartheta$  mitbewegte lokale Polarkoordinaten,  $v$  die momentane Rißgeschwindigkeit,  $f_{ij}$  universelle Funktionen von  $\vartheta, v$  und den elastischen Konstanten und  $K$  der dynamische K-Faktor. Unter dynamischen small-scale-yielding Bedingungen [6] wird die Rißausbreitung durch

$$K(t) = K_{ID}(v) \quad (2)$$

beschrieben (es wird ausschließlich die Öffnungsmode I betrachtet).

Die Rißausbreitungsbruchzähigkeit  $K_{ID}$  wird ebenso wie der Initiierungswert  $K_{Id}$  als materialspezifisch angesehen. Unter diesen Bedingungen ist (2) absolut gleichwertig mit der dynamischen Energiebilanz [6].

Wegen  $f_{yy}(0, v) = 1$  kann  $K$  aus

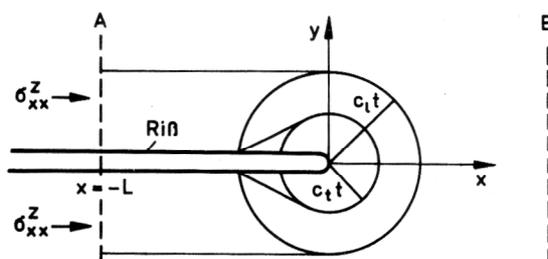


Bild 1  
 Wellenfronten nach plötzlicher Rißbelastung auf der Länge  $L$

$$K(t) = \lim_{r \rightarrow 0} ((2\pi r)^{1/2} \sigma_{yy}(r, 0, v)) \quad (3)$$

berechnet werden.

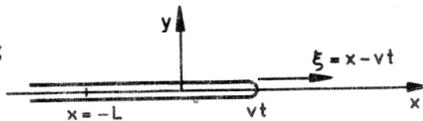
## 2.2. Grundaufgabe

$\sigma_{ij}$  und  $\vec{u} = (u_x, u_y, 0)$  sind das infolge der Anwesenheit des Risses auftretende Spannungs- bzw. Verschiebungsfeld. Der Riß liege in der Ebene  $y = 0$  (Bild 2). Es wird isotropes linear-elastisches Materialverhalten vorausgesetzt. Als Grundaufgabe wird folgendes Rand-Anfangswertproblem bezeichnet

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= -\sigma_0 H(t-\tau) H(x+L) \quad -\infty < x < vt, \quad y = 0, \\ \sigma_{xy} &= 0 \quad -\infty < x < \infty, \quad y = 0, \quad (4) \\ u_y &= 0 \quad vt < x < \infty, \quad y = 0, \end{aligned}$$

mit  $u_x = u_y = 0$  für  $t - \tau < 0$  und im Unendlichen verschwindenden Spannungen. Hier und im weiteren wird vorausgesetzt, daß die Rißgeschwindigkeit  $v$  kleiner als die Rayleighgeschwindigkeit  $c_R$  ist. Aus dem K-Faktor dieses Problems, kann der für eine allgemeinere Belastung konstruiert werden (siehe 2.4.).

**Bild 2**  
Schematische  
Ridarstellung



Für den Verschiebungsvektor wird der Ansatz

$$\vec{u} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{\Psi}$$

gemacht. Im vorliegenden Fall besitzt das Vektorpotential nur eine von Null verschiedene Komponente, die im weiteren mit  $\Psi$  bezeichnet wird.

Die weitere Rechnung wird in dem mitbewegten Koordinatensystem (Bild 2) durchgeführt. Für die eingeführten Potentiale ergeben sich dann die Dglen.

$$(1 - v^2/c_1^2) \Phi_{,\xi\xi} + \Phi_{,\eta\eta} = (-2v \Phi_{,\xi t} + \Phi_{,\eta t t})/c_1^2,$$

wobei in der Dgl. für  $\Psi$  nur  $c_1$  durch  $c_t$  zu ersetzen ist. Die Indizes bedeuten partielle Ableitungen nach den jeweiligen Größen,  $c_1$  und  $c_t$  sind die longitudinale bzw. transversale Schallgeschwindigkeit.

Durch Anwendung einer Laplace-Transformation bezüglich der Zeit und einer Fourier-Transformation bezüglich  $\xi$  aller auftretenden Feldgrößen werden die elastischen Dglen. gelöst. Die transformierten Größen sind wie folgt bezeichnet

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \int_0^\infty \Phi e^{-pt} dt \quad \text{und} \\ \bar{\Phi} &= \int_{-\infty}^\infty \bar{\Phi} e^{is\xi} d\xi, \end{aligned}$$

wobei die Reihenfolge der Transformationen vertauschbar ist. Für  $y \geq 0$  erhält man

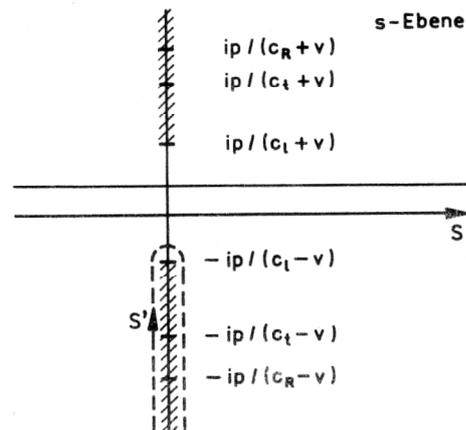
$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= A(s, p) \exp(-\gamma_1 y) \quad \text{und} \\ \bar{\Psi} &= B(s, p) \exp(-\gamma_t y), \end{aligned}$$

wobei die Randbedingungen im Unendlichen schon berücksichtigt wurden und folgende Abkürzung verwendet wurde

$$\gamma_{1,t}^\pm(s, p) = [(1 \mp v/c_{1,t}) s \pm ip/c_{1,t}]^{1/2} \quad \text{und}$$

$$\gamma_{1,t} = \gamma_{1,t}^+ \gamma_{1,t}^- \quad (5)$$

Die Zweige der einzelnen Wurzeln wurden so gewählt, daß diese für  $s \rightarrow +\infty$  positive reelle Werte annehmen. Die Verzweigungsschnitte sind für  $\gamma_1$  in Bild 3 angegeben. Die Verzweigungspunkte liegen bei  $s = ip/(c_1 + v)$  bzw.  $-ip/(c_1 - v)$ . Analog wird der Schnitt für  $\gamma_t$  geführt. In Bild 3 wurde zur Vereinfachung  $Imp = 0$  gesetzt ( $Rep > 0$ ).



**Bild 3**  
Verzweigungsschnitte für  $\gamma_1$  in der  $s$ -Ebene,  $S$  und  $S'$  - verwendete Integrationswege

Die Funktionen  $A$  und  $B$  können aus den verbleibenden Randbedingungen ermittelt werden. Zu diesem Zwecke sind diese und die Spannungs-Dehnungs-Relationen ebenfalls zu transformieren. Aus  $\sigma_{xy} = 0$  folgt eine Beziehung zwischen  $A$  und  $B$ . Weiterhin sind auf  $y = 0$   $\sigma_{yy}$  für  $\xi < 0$  und  $u_y$  für  $\xi > 0$  gegeben.

Bezeichnet man die Laplace-Transformierte der unbekanntenen Spannung  $\sigma_{yy}$  für  $\xi > 0$  mit  $-\sigma_0 h(\xi)$  und diejenige der Verschiebung  $u_y$  für  $\xi < 0$  mit  $\sigma_0 j(\xi)/2\mu$ , so erhält man nach Elimination von  $A$  und  $B$  eine Gleichung vom Wiener-Hopf-Typ

$$T_-(s) + H_+(s) = K(s) J_-(s). \quad (6)$$

Hierin sind  $T_-$  die durch  $\sigma_0$  geteilte zweifach transformierte gegebene Spannung  $\sigma_{yy}$  ( $\xi < 0$ ),

$$H_+(s) = \int_0^\infty h(\xi) e^{is\xi} d\xi, \quad (7)$$

$$J_-(s) = \int_{-\infty}^0 j(\xi) e^{is\xi} d\xi$$

und  $\mu$  der Schubmodul. Die Funktion  $K(s)$  wird unten angegeben. Die durch (7) definierten und mit „+“ bzw. „-“ gekennzeichneten Funktionen sind analytisch für  $Im s > \tau_-$  bzw.  $Im s < \tau_+$ . Das folgt aus der Kenntnis

des prinzipiellen Rissspitzenspannungs- bzw. Verschiebungsfeldes (vgl. (1)). Im weiteren wird dies von allen so definierten Funktionen vorausgesetzt.

In (6) ist zu fordern, daß sich die Regularitätshalbebenen überlappen.

Die wesentlichen Schritte zur Lösung von (6) bestehen darin,  $K(s)$  in der Form  $K(s) = K_-(s)/K_+(s)$  darzustellen, sowie nach Multiplikation von (6) mit  $K_+ C(s) = K_+(s) T_-(s)$  in eine Summe der Form

$$C(s) = C_+(s) + C_-(s) \quad (8)$$

zu zerlegen.

Damit erhält man schließlich

$$L(s) = C_+(s) + H_+(s) K_+(s) = K_-(s) J_-(s) - C_-(s). \quad (9)$$

Der zweite Term dieser Gl. ist definiert und analytisch für  $\text{Im } s > \tau_-$ , der dritte für  $\text{Im } s < \tau_+$ . Die Regularitätsbereiche überlappen sich in dem Streifen  $\tau_+ > \text{Im } s > \tau_-$ . Durch analytische Fortsetzung definiert (9) somit eine in der ganzen  $s$ -Ebene analytische Funktion  $L(s)$ .

Für den halbunendlichen Riß im homogenen Körper erhält man

$$K(s) = -2 c_t^2 \gamma_t F(s) / (v^2 P(v)),$$

$$F(s) = -P(v) [(s^2 + \gamma_t^2)^2 - 4 s^2 \gamma_t \gamma_1] / (4(s - ip/v)^2 \gamma_t \gamma_1),$$

$$P(v) = 4(1 - v^2/c_1^2)^{1/2} (1 - v^2/c_t^2)^{1/2} / R(v) \quad \text{und}$$

$$R(v) = 4(1 - v^2/c_1^2)^{1/2} (1 - v^2/c_t^2)^{1/2} - (2 - v^2/c_t^2)^2.$$

Die Funktion  $F(s)$  hat einfache Nullstellen bei  $s = \mp ip/(c_R \mp v)$ , wo  $c_R$  die Rayleighgeschwindigkeit ist. An der Stelle  $s = ip/v$  existiert der Grenzwert. Die Verzweigungsschnitte von  $F$  liegen zwischen  $ip/(c_1 + v)$  und  $ip/(c_t + v)$  sowie den analogen Punkten in der unteren Halbebene (Bild 3), da nur das Produkt  $\gamma_1 \gamma_t$  auftritt. Die Funktion  $P(v)$  sichert, daß  $F(s) \rightarrow 1$  für  $s \rightarrow \infty$  gilt, damit kann  $F$  nach Standardmethoden in  $F(s) = F_+(s) F_-(s)$  [7] faktorisiert werden. Diese Funktionen wurden z. B. von Baker [8] angegeben. Es ist

$$F_{\pm}(s, v) = \frac{s \pm ip/(c_R \mp v)}{s \pm ip/(c_t \mp v)} \exp\left(\frac{1}{\pi} \int \frac{1/(c_t \mp v)}{1/(c_1 \mp v)} \arctan U(w) \frac{dw}{w \mp is/p}\right), \quad (10)$$

mit

$$U(w) = \frac{[\gamma_t(\mp iw, 1)^2 - w^2]^2}{4w^2 \gamma_t(\mp iw, 1) \text{Im } \gamma_1(\mp iw, 1)}.$$

Mit diesen Ausdrücken können  $K_+$  und  $K_-$  leicht angegeben werden, wobei sich die benötigte Zerlegung von  $\gamma_t$  aus (5) ergibt:

$$K_+ = (\gamma_t^+)^{-1} F_+^{-1}.$$

Aus der vorliegenden Rißbelastung (4) folgt

$$T_-(s) = -\frac{e^{-p\tau}}{ips} - \frac{e^{-p\tau} e^{-is(L+v\tau)}}{vs(s - ip/v)}. \quad (11)$$

Damit ergibt sich für (9) der Überlappungsstreifen durch  $-p/(c_1 - v) < \text{Im } s < 0$ .

Aus dem Verhalten von  $K_+$ ,  $K_-$  und  $T_-$  für  $|s| \rightarrow \infty$  und der Kenntnis der analytischen Form des Rissspitzenspannungs- und Verschiebungsfeldes (daraus ergibt sich unmittelbar das Verhalten von  $H_+$  und  $J_-$  für  $|s| \rightarrow \infty$ ) folgt, daß die analytische Funktion  $L(s)$  verschwindet, wenn  $s$  in beliebiger Richtung gegen Unendlich geht. Mit hin muß  $L = 0$  sein.

(9) zerfällt somit in zwei Glen., aus denen die gesuchten Funktionen  $H_+$  und  $J_-$  erhalten werden. Für  $H_+$  folgt

$$H_+(s) = -C_+(s)/K_+(s). \quad (12)$$

Die Spannungen vor der Rissspitze ergeben sich durch Rücktransformation von (12). Zur Berechnung der Spannungen in einem beliebigen Punkt des Körpers hat man von den hier nicht angegebenen allgemeinen Ausdrücken für die  $\bar{\sigma}_{ij}$  und den Zusammenhängen zwischen  $A$ ,  $B$  und  $H_+$  auszugehen.

Die Laplace-Transformierte von  $\sigma_{yy}$  vor der Rissspitze berechnet sich aus

$$\sigma_{yy}(\xi > 0, y = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_S H_+(s) e^{-is\xi} ds,$$

wobei  $S$  der im Bild 3 angegebene Weg ist. Für  $\xi > 0$  kann bei der Berechnung des Fourier-Umkehrintegrals der ursprüngliche Integrationsweg  $S$  durch den Weg  $S'$  (Bild 3) ersetzt werden. Auf  $S'$  sind die entsprechenden Verzweigungsschnitte zu umlaufen. Da  $H_+$  für  $\text{Im } s < -p/(c_1 - v)$  nicht analytisch ist, wird in der unteren Halbebene unter Verwendung von (8)

$$H_+ = -T_- + C_-/K_+.$$

Da  $T_-$  in der unteren Halbebene analytisch ist, bringt dieser Term keinen Beitrag.

Zur Ausführung der Integration wird die Cagnard-de Hoop-Methode verwendet [9]. Unter Beachtung der Festlegung der Zweige der unter dem Integral auftretenden nicht regulären Funktionen findet man

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_0 P(v) p^{3/2} i^{1/2}}{4\pi} \left( \int \frac{(\gamma_t(-iw, 1)^2 - w^2)^2 C_-(-ipw) e^{-pw\xi} dw}{1/(c_1 - v) \text{Im}(\gamma_1(-iw, 1)) \gamma_t^-(w, i) (w + 1/v)^2 F_-(-ipw, v)} - 4 \int \frac{w^2 \gamma_t^+(w, -i) C_-(-ipw) e^{-pw\xi} dw}{1/(c_t - v) (w + 1/v)^2 F_-(-ipw, v)} \right). \quad (13)$$

Nach der Laplace-Rücktransformation erhält man  $\sigma_{yy}$  ( $\xi > 0, y = 0, t$ ) in Integralform.

### 2.3. K-Faktor der Grundaufgabe

Der K-Faktor resultiert aus dem singulären Verhalten ( $\sim \xi^{-1/2}$ ) von  $\sigma_{yy}$  für  $\xi \rightarrow +0$ . Zur Berechnung wurde der nach der Laplace-Rücktransformation von (13) folgende Ausdruck  $\sigma_{yy}(\xi, 0, t)$  zunächst nach  $\xi$  differenziert. Die Ableitung wurde für  $\xi$  gegen 0 entwickelt. Nach Integration des am stärksten singulären Terms ( $\sim \xi^{-3/2}$ ) kann dann unter Verwendung von (3) der K-Faktor angegeben werden.

Nach (11) ist  $T_-$  von der Form

$$T_- = T_-^1 + T_-^2, \quad (14)$$

wo  $T_-^1$  und  $T_-^2$  den 1. bzw. 2. Term der rechten Seite von (11) bedeuten. In gleicher Weise können  $H_+$ ,  $C_+$  und  $\sigma_{yy}$  zerlegt werden. Mithin gilt auch für den K-Faktor der Grundaufgabe (4)

$$K_G = K^1 + K^2. \quad (15)$$

Betrachtet man  $T_-^1$ , so erkennt man, daß dies bis auf eine zeitliche Retardierung dem Baker-Problem [8] der plötzlichen Belastung eines mit  $v$  bewegten halbinendlichen Risses auf der gesamten Länge durch einen konstanten Druck entspricht.  $C_-^1$  ist hier einfach

$$C_-^1(s) = -K_+(0)/ips.$$

Man erhält nach kurzer Rechnung

$$K^1 = 2(2/\pi)^{1/2} \sigma_0 (1-v/c_t)^{1/2} (c_t(t-\tau))^{1/2} H(t-\tau)/F_+(0, v). \quad (16)$$

Die Berechnung von  $K^2$  ist komplizierter. Letztlich liegt das daran, daß dieses Teilproblem eine echte Länge enthält. Dadurch wird bereits die Summenzerlegung von  $C^2(s)$  nach (8) aufwendiger. Nach (11) und (14) ist

$$C^2(s) = -e^{-p\tau} e^{-is(L+v\tau)} K_+(s)/(vs(s-ip/v)). \quad (17)$$

Allgemein gilt [7]

$$C_-^2(s) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C C^2(z) \frac{dz}{z-s},$$

wobei  $S$  der in Bild 3 abgegebene Weg ist. Wegen des aus (17) folgenden Verhaltens von  $C^2$  kann der Weg  $S$  in  $S'$  (Bild 3) deformiert werden. Nach (13) wird  $C_-^2$  nur für  $s = -ipw$  benötigt. Da außerdem zur Berechnung von  $K^2$  nur der Grenzwert von  $\sigma_{yy}^2$  für  $\xi \rightarrow +0$  gebraucht wird, wird hier nur der Term von  $C_-^2$  angegeben, der zu diesem Grenzwert beiträgt. Dieser Term wird mit  $\bar{C}_-^2$  bezeichnet und ist von der Form

$$\bar{C}_-^2(-ipw) = Ap^{-5/2} \left( \int_{1/(c_t-v)}^{1/(c_1-v)} f_1(u) e^{-pu(v+L)} du / (u-w) + \int_{1/(c_t-v)}^{\infty} f_2(u) e^{-pu(v+L)} du / (u-w) \right), \quad (18)$$

mit  $A = 1/(\pi i^{1/2} vP(v))$ .  $f_1$  und  $f_2$  sind kompliziert aufgebaute Funktionen von  $u$  und  $v$ , sie werden hier nicht angegeben, da in den Endausdrücken Vereinfachungen durchgeführt werden können. Die Integrale in (18) sind als Hauptwertintegrale zu verstehen. Nach Einsetzen von (18) in (13) kann die Laplace-Rücktransformation einfach ausgeführt werden. Daraus folgt

$$K^2 = (2/\pi)^{3/2} \sigma_0 \frac{(1-v/c_t)^{1/2}}{vP(v)}$$

$$\left( H(t-\tau - \frac{L'}{c_1-v}) \int_{1/(c_1-v)}^{1/(c_t-v)} (t-\tau-L'u)^{1/2} f_1(u) H(t-\tau-L'u) du + H(t-\tau - \frac{L'}{c_t-v}) \int_{1/(c_t-v)}^{\infty} (t-\tau-L'u)^{1/2} f_2(u) H(t-\tau-L'u) du \right)$$

$$\text{mit } L' = L + v\tau.$$

Es kann für  $t-\tau > L'/(c_t-v)$  gezeigt werden, daß dieser Ausdruck als Summe der Residuen einer in der ganzen  $z$ -Ebene definierten Funktion  $G(z)$  dargestellt werden kann:

$$G(z) = -\frac{P(v)(L'z + i(t-\tau))^{1/2}}{z(z-i/v) \gamma_t^+(z, 1) F_+(pz, v)},$$

in der unteren Halbebene wird  $F_+$  durch  $F/F_-$  ersetzt. Aus dem Residuum an der Stelle  $z=0$  resultiert ein Beitrag zu  $K^2$ , der das in (16) angegebene  $K^1$  exakt kompensiert. Weitere Beiträge liefern die Pole bei  $z=i/v$  und  $-i/(c_R-v)$ . Das Auftreten des letzteren hängt von der Lage des Verzweigungspunktes  $z = -i(t-\tau)/L'$  der im Zähler von  $G$  stehenden Wurzel ab. Nach weiteren Umformungen ergibt sich

$$K_G = 2(2/\pi)^{1/2} \sigma_0 k(v).$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } t' < 0, \\ (c_t t')^{1/2} / F_+(0, 0) & \text{für } t' > 0, \\ (c_t t')^{1/2} / F_+(0, 0) + \end{array} \right.$$



### 3. Oberflächeneinfluß in erster Näherung

#### 3.1. Zusätzliche Rißbelastung

Berücksichtigt wird nur die bei der Rißbelastung nach (4) vom Riß weglauende Druckwelle (Bild 1), dabei wird in der Grundaufgabe (4)  $\tau = 0$  gesetzt. Die Spannungen auf der Fläche A werden durch die Spannungsverteilung  $\sigma_{xx}^z$  kompensiert. Zur Ermittlung der daraus resultierenden Rißbelastung betrachten wir einen Halbraum  $x > 0$ , dessen Oberfläche den Randbedingungen

$$\sigma_{xx}^z = a \sigma_0 H(c_1 t \pm y) \quad (23)$$

$$\sigma_{xy}^z = 0$$

auf  $x = 0$  unterworfen ist. Dabei ergibt sich  $a$  aus der hier nicht angegebenen Lösung der Grundaufgabe (4) für  $\sigma_{xx}$  zu  $a = (1 - 2\kappa^2)$ .

Aus der Lösung von (23) ergeben sich in der Ebene  $y = 0$  Normalspannungen  $\sigma_{yy}^z(x, y = 0, t)$ . Wird nun in diese Ebene ein Riß eingebracht, so sind diese auf der Rißoberfläche zu kompensieren. Für diese Rißbelastung ist dann analog zum Vorgehen von Abschnitt 2.3. der K-Faktor zu berechnen, der mit  $K_Z$  bezeichnet wird. Bei einer allgemeineren ursprünglichen Rißbelastung z. B. nach (21) muß der gesamte zusätzliche K-Faktor analog zu (22) aus  $K_Z$  ermittelt werden.

Durch Anwendung von Standardmethoden (Integraltransformation und Anwendung der Cagniard- de Hoop-Methode bei der Rücktransformation) [9] findet man für die Aufgabe (23)

$$\sigma_{yy}^z(x, y=0, t) = \frac{2a \sigma_0 \kappa}{\pi} (-I_1 H(c_1 t - x) + 4I_2 H(c_1 t - x)), \quad (24)$$

mit

$$I_1 = \frac{c_1 t}{\kappa} \int \frac{(2w^2 - 2\kappa^2 + 1)(2w^2 - 1) dw}{w(w^2 - \kappa^2)^{1/2} [(2w^2 - 2\kappa^2 + 1)^2 - 4w(w^2 - \kappa^2)(w^2 + 1 - \kappa^2)]^{1/2}}$$

und

$$I_2 = \frac{c_1 t}{1} \int \frac{w^2 (w^2 - 1)^{1/2} dw}{(w^2 + \kappa^2 - 1)^{1/2} [(2w^2 - 1)^2 - 4w(w^2 + \kappa^2 - 1)^{1/2} (w^2 - 1)]}$$

Bild 5 zeigt diese Spannung für unterschiedliche Poisson-Zahlen. Man erkennt, daß in der Rißebeine im wesentlichen Zugspannungen auftreten, d. h.,  $\sigma_{yy}^z$  bewirkt eine Erhöhung des K-Faktors. Da  $x$  und  $t$  nur in der Form  $x/t$  eingehen, breitet sich jeder Punkt der im Bild 5 angegebenen Kurven mit einer bestimmten Geschwindigkeit  $u$  aus.

Führt man eine neue Variable  $z = c_1/c_t - x/c_t t$  ein, und schreibt man  $\sigma_{yy}^z = \sigma_0 Q(z)$ , so ergibt sich

$$\sigma_{yy}^z = \sigma_0 \int_0^{c_1} Q'(1/\kappa - u/c_t) H(u - x/t) \frac{du}{c_t} \quad (25)$$

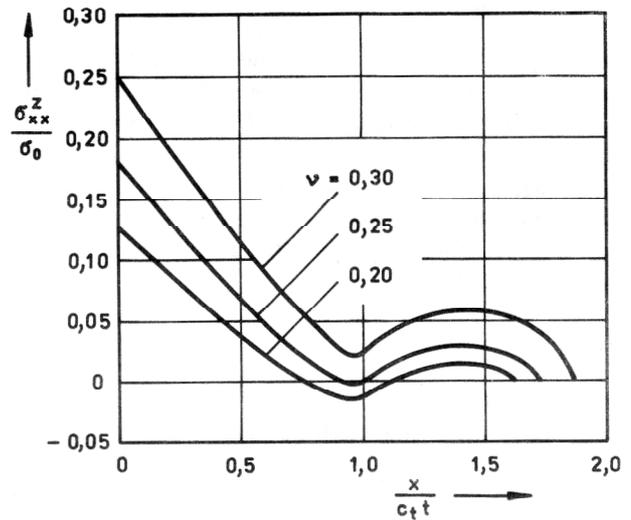


Bild 5  
Zusätzliche Normalspannung in der Rißebeine

Dabei ist  $Q' = dQ/dz$ .

Berücksichtigt man, daß die freie Oberfläche (Bild 1) bei  $x = -L$  liegt, so ist  $x$  in (25) durch  $x + L$  zu ersetzen.

#### 3.2. Zusätzlicher K-Faktor

Wir setzen zunächst voraus, daß der Riß ruht. Wegen (25) wird zuerst als Grundaufgabe der K-Faktor infolge einer Rißbelastung der Form

$$\sigma_{yy} = -\sigma_0 H(u - \frac{x+L}{t}) H(x+L) H(c_1 t - x - L) \quad (26)$$

$$\sigma_{xy} = 0$$

auf  $y = 0$  berechnet (Anfangsbedingungen wie bei (4)). Kennt man diesen mit  $K^3$  bezeichneten K-Faktor, so erhält man

$$K_Z(t, L) = \int_0^{1/\kappa} Q'(1/\kappa - y) K^3(t, y) dy, \quad (27)$$

wo  $y = u/c_t$  bedeutet. Erfolgt die ursprüngliche Belastung wie in (4) verzögert, so ist überall  $t$  durch  $t - \tau$  zu ersetzen. Die Randbedingungen (26) beschreiben eine an der Stelle  $x = -L$  zur Zeit  $t = 0$  sprunghaft aufgebrachte Belastung, die sich mit der Geschwindigkeit  $u$  in Richtung der Rißspitze bewegt.  $u$  liegt zwischen 0 und  $c_1$ . Die weitere Rechnung verläuft ähnlich wie im Abschnitt 2.  $C(s)$  lautet hier

$$C(s) = e^{-isL} K_+(s) / (ip(s + ip/u)).$$

Man erhält

$$\begin{aligned} K^3(t, y) = & 2(2L/\pi)^{1/2} \sigma_0 H(b - \kappa) \circ \\ & \left( \left[ \frac{4q}{\pi(1-\nu)} \int_{\kappa}^b \frac{\sqrt{(b-x)(x^2-\kappa^2)(x+1)(x^2-0,5)^2} F_1(x) dx}{(x-1/y)x^8 R_1(1/x)} \right. \right. \\ & + \frac{4\sqrt{(yb-1)(y-1)} y^2(1+y)(1-\kappa^2 y^2) q F_1(1/y)}{(1-\nu) R_1(y)} H(yb-1) ] H(1-b) \\ & + \left[ 1 - \frac{\sqrt{(q-b)(q-1)} q^4(1+q)(q^2-\kappa^2) F_1(q)}{4(1-\nu)(1/y-q)((\kappa^2-1)q^0 + 0,5q^2 - 0,125)} H(q-b) \right. \\ & \left. \left. - \frac{\sqrt{(1-yb)(1+y)(1-\kappa^2 y^2)} y^2 q F_1(1/y)}{(1-\nu) R(y c_t)} H(1-yb) ] H(b-1) \right) \right], \quad (28) \end{aligned}$$

mit  $b = c_t t/L$ . Die übrigen Größen sind oben erklärt.

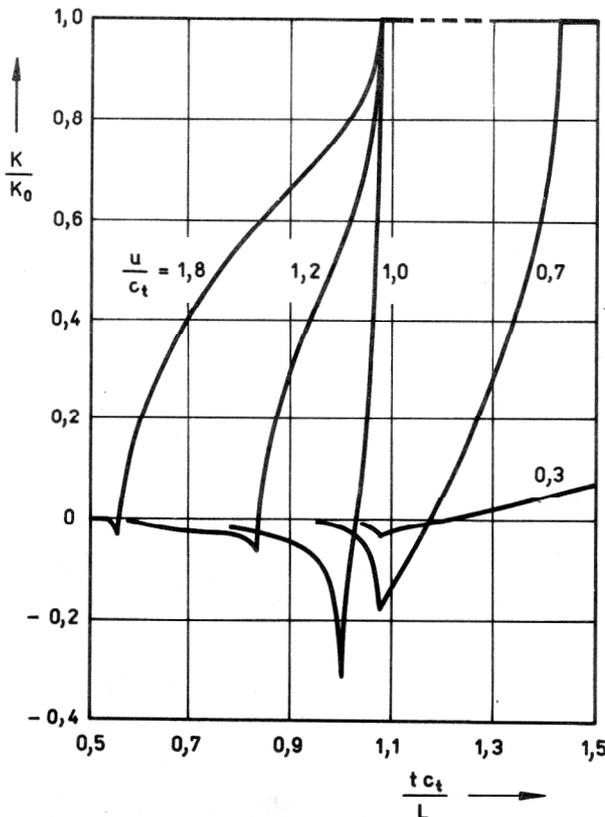


Bild 6  
 $K^3(t, u/c_t)$  für unterschiedliche  $u$ ,  $\nu = 0,25$

Bild 6 zeigt  $K^3/K_0$  für unterschiedliche  $y$  in Abhängigkeit von  $t(K_0 = 2(2L/\pi)^{1/2} \sigma_0, \nu = 0,25)$ . Alle Kurven beginnen dann, wenn die von  $x = -L$  ausgehende und mit  $c_1$  laufende Welle die Rißspitze erreicht. Der Beitrag zu  $K^3$  ist zunächst negativ. Das Minimum tritt für  $u > c_R$  bei  $t = L/u$  auf. Nach Eintreffen der Rayleigh-Welle ändert sich für diese  $u$  der K-Faktor nicht mehr. Für  $u < c_R$  liegt das Minimum stets bei  $t = L/c_R$  und der konstante Endwert wird mit Eintreffen der Belastungsfunktion an der Rißspitze erreicht. Für  $u \rightarrow c_R$  tritt in der Umgebung von  $tc_t/L = c_t/c_R$  eine Wurzelsingularität auf.  $K^3$  ist mithin integrierbar.

(28) gilt für einen ruhenden Riß. Es könnte vermutet werden, daß der Übergang zu einem bewegten Riß entsprechend (20) durchgeführt werden könnte. Tatsächlich ergeben sich in diesem Fall jedoch erheblich kompliziertere Ausdrücke, die eine Zerlegung dieser Art im allgemeinen weder für  $K^3$  noch für  $K_Z$  gestatten. Die Ursache dafür besteht in folgendem. Bewegt sich die Belastung (26) mit der Geschwindigkeit  $0 \leq u \leq c_1$  (Rißgeschwindigkeit  $v$ ), so gehen von jedem Punkt  $x'$  der Rißoberfläche (bezogen auf das ruhende Koordinatensystem), den die Belastung erreicht, Wellen mit Geschwindigkeiten zwischen  $c_1$  und  $c_R$  aus. Diese transportieren die Information von der Belastung des Punktes  $x'$  an die Rißspitze und bringen dort einen Beitrag zum K-Faktor. Es treten zwei Fälle auf:

a) Für  $u > c_R > v$  überholt die Belastungsfunktion einen Teil der von ihr generierten Wellen, und nachdem die langsamste von  $x = -L$  ausgehende Welle die Rißspitze erreicht hat ( $t > (L + vt)/c_R$ ), ergibt sich

$$K^3(t, y) = k(v)(2(2/\pi)^{1/2} \sigma_0 (L + vt)^{1/2}), \quad (29)$$

was nicht mehr von  $y$  abhängt.

Die gleiche Darstellung ergibt sich für  $c_R > u > v$ .

(29) gilt dann für  $t > (L + vt)/u$ .

b) Für  $u < v$  dagegen werden alle Punkte der Rißoberfläche, für die  $-L + ut < x' < vt$  gilt, nicht von der Belastungsfunktion erreicht. Die Länge dieses Bereiches hängt von  $L$ ,  $u$  und  $v$  ab. Eine Zerlegung analog (29) ist deshalb nicht möglich. Da zu  $K_Z$  aber gerade die zu klei-

nen u gehörigen  $K^3$  beitragen, ist auch dieses nicht in obiger Form schreibbar. Mit wachsendem  $v$  fällt  $K_Z$  stärker als bei Gültigkeit der Beziehung (20). Das wirkt sich u. a. auf das Arrest-Verhalten des Risses aus. Aus (27) und (28) ergibt sich, daß der Langzeitgrenzwert ( $t \rightarrow \infty$ ) von  $K_Z$

$$K_{Z\infty} = 2(2L/\pi)^{1/2} Q(1/\kappa) \sigma_0$$

ist  $(\sigma_0 Q(1/\kappa) = \sigma_{yy}^Z (x/c_t t - 0)$ , Bild 5).

Aus der Überlagerung von  $K_G$  und  $K_Z$  erhält man als Langzeitgrenzwert des K-Faktors für einen ruhenden nach (4) belasteten Riß

$$K_\infty = 2(2L/\pi)^{1/2} (1 + Q(1/\kappa)) \sigma_0 .$$

Für eine Poisson-Zahl von 0,3 ergibt sich

$$K_\infty = 1,13 \sigma_0 \sqrt{\pi L} ,$$

d. h. etwa der K-Faktor eines statisch belasteten Außenrisses in einem halbumendlichen Körper.

Es muß allerdings bemerkt werden, daß  $Q(1/\kappa)$  und mit hin auch  $K_\infty$  von der Poisson-Zahl abhängen. Zur korrekten Beschreibung eines Außenrisses sind deshalb weitere Wellenanteile zu berücksichtigen.

Wie hier nicht dargestellte Rechnungen zeigen, die auf näherungsweise Berechnungen der Spannungen in den von der Rißspitze ausgehenden Zylinderwellen basieren (Bild 1), resultiert aus diesen ein Beitrag, der nahezu unabhängig von der Poisson-Zahl und etwa von der richtigen Größe ist.

#### 4. Ermittlung der Rißausbreitungsbruchzähigkeit

In diesem Abschnitt wird die näherungsweise Berechnung von  $K_{ID}$  aus experimentellen Daten unter Verwendung der Ergebnisse der Abschnitte 2. und 3. kurz dargestellt.

Aus Experimenten von Humen [13] (diese neue dynamische Versuchstechnik wurde zuerst von Stroppe und Mitarbeitern [14] vorgestellt) sind die zeitlich veränderliche Rißbelastung sowie die Zeitabhängigkeit der Rißlänge  $l(t)$  bestimmbar. In diesen Experimenten wird ein Außenriß der Ausgangslänge  $L$ , der sich in einer Probe von rechteckigem Querschnitt befindet, senkrecht von einer ebenen Zugspannungswelle belastet. Das zeitliche Pulsprofil ist  $\sigma_0 g(t)$ . Die Variation über dem Probenquerschnitt kann vernachlässigt werden.

Die Rißausbreitung erfolgt nach der Initiierung generell mit veränderlicher Geschwindigkeit. Wie oben bemerkt wurde, gelten (19) und (22) auch für  $dv/dt \neq 0$ . Für den Oberflächenterm ist das strenggenommen nicht der Fall. Ungeachtet dessen wird hier in quasidynamischer Näherung

$$K_Z(t) = k(v) K_Z(t, l) \quad (30)$$

gesetzt, wo  $K_Z(t, l)$  den K-Faktor eines ruhenden Risses der aktuellen Länge  $l(t)$  nach (27) und (28) darstellt.

In dieser Näherung ergibt sich unter Verwendung von (22) und (30) der Gesamt-K-Faktor zu

$$K(t) = \int_0^t g'(\tau) (K_G(t-\tau) + K_Z(t-\tau)) d\tau . \quad (31)$$

Setzt man hier die experimentell ermittelten Werte  $g'(t)$ ,  $l(t)$  und  $v(t)$  ein, so kann aus (31) und (2) die Funktion  $K_{ID}(v)$  konstruiert werden. Diese Rechnungen wurden durchgeführt. Die Ergebnisse werden demnächst publiziert [15].

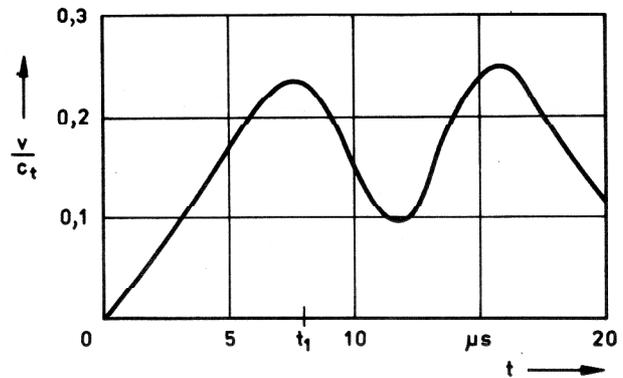


Bild 7  
Experimentell ermittelte Rißgeschwindigkeit bei Impulsbelastung (nach Humen [13])

Bild 7 zeigt einen typischen Rigeschwindigkeitsverlauf, wie er von Humen [13] an PMMA ermittelt worden ist. Es ergibt sich, daß das nach der hier skizzierten Methode errechnete  $K_{ID}(v)$  befriedigend mit Ergebnissen anderer Autoren [16] übereinstimmt, die eine „direkte“ K-Bestimmung mittels der Kaustik-Methode benutzten. Dies gilt für  $t \lesssim t_1$  (Bild 7). Der für größere  $t$  erfolgende starke Abfall der Rißgeschwindigkeit resultiert mit großer Wahrscheinlichkeit aus Spannungswellen, die an der der Rißspitze gegenüberliegenden Oberfläche reflektiert worden sind. Die hieraus folgenden Beiträge zum K-Faktor werden in (31) nicht erfaßt. Prinzipiell ist es aber möglich, sie zu berücksichtigen.

#### LITERATUR

- [1] Achenbach, J. D.: Wave propagation, Elastodynamic stress singularities, and Fracture. Proc. 14th IUTAM Congress (W. T. Koiter, Ed.), Delft, 1976, S. 71 – 87.
- [2] Sih, G. C. (Ed.): Mechanics of Fracture 4, Elastodynamic crack problems, Nordhoff Int. Publ., Leyden, 1977.
- [3] Burgers, P., Freund, L. B.: Dynamic growth of an edge crack in a half space. Int. J. Solids Structures 16 (1980), S. 265 – 274.
- [4] Melville, P. H.: Effect of reflected stress waves in finite specimens on the dynamic stress intensity factor of a propagating mode III crack. Int. J. Solids Structures 16 (1980), S. 945 – 955.
- [5] Freund, L. B., Clifton, R. J.: On the uniqueness of plane elastodynamic solutions for running crack. J. Elasticity 4 (1974), S. 293 – 299.

- [6] Dahlberg, L., Nilsson, F.: Some aspects of testing crack propagation toughness. Proc. Int. Conf. „Dynamic fracture toughness“, Welding Inst., London, 1976, S. 281 – 291.
- [7] Noble, B.: Methods based on Wiener-Hopf-Technique, Pergamon Press, New York, 1958.
- [8] Baker, B. R.: Dynamic Stresses Created by a Moving Crack. J. appl. Mech. 29 (1962), S. 449 – 458.
- [9] Achenbach, J. D.: Wave propagation in elastic solids, North-Holland. Publ. Comp., Amsterdam, London, 1973.
- [10] Freund, L. B.: Crack propagation in an elastic solid subjected to general Loading – I. Constant rate of extension. J. Mech. Phys. Solids 20 (1972), S. 129 – 140.
- [11] Freund, L. B.: Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading – III. Stress wave loading. J. Mech. Phys. Solids 21 (1973), S. 47 – 61.
- [12] Tau, S. A., Lu, T.-H.: Transient stress intensity factors for a finite crack in an elastic solid caused by a dilatational wave. Int. J. Solids Structures 7 (1971), S. 731 – 750.
- [13] Humen, V.: TH Liberec, persönl. Mitteilung, 1981.
- [14] Stroppe, H., Schreppel, U., Clos, R.: Crack extension in steels under loading by stress pulses. Proc. 7th Congr. Material Testing, OMKDK-Technoinform, Budapest, 1978, Vol. I, S. 329 – 335.
- [15] Clos, R., Humen, V.: VI. Symposium „Verformung und Bruch“, Magdeburg (demnächst, 1982).
- [16] Theocaris, P. S., Katsamanis, F.: Response of cracks to impact by caustics. Engineering Fracture Mechanics 10 (1978), S. 197 – 210.

Anschrift des Verfassers:

Dr. rer. nat. Rainer Clos  
 Technische Hochschule „Otto von Guericke“  
 Sektion Mathematik und Physik  
 3010 Magdeburg  
 PSF 124