

# Einige Bemerkungen zu Energieübertragungshypothesen in der homogenen isotropen Turbulenz

Bernd Drefßler<sup>1)</sup>

## 1. Einleitung

Bei einer statistischen Beschreibung von turbulenten Strömungsvorgängen auf der Grundlage der Navier-Stokes-Gleichungen ist es im allgemeinen nicht möglich, die Verteilungsfunktionen der Strömungsparameter vollständig anzugeben. In der Regel beschränkt man sich bei der Charakterisierung der Verteilungsfunktionen auf die Bestimmung von Momenten bzw. auf die Betrachtung ihrer Fouriertransformierten, der Spektren.

Besonders entwickelt ist die Theorie auf der Stufe der Zweipunktmomente, d. h. für den Korrelationstensor bzw. für den Spektraltensor 2. Ordnung [1] bis [3]. In der homogenen isotropen Turbulenz ist die Darstellung des Spektraltensors 2. Ordnung besonders einfach mit Hilfe einer skalaren Spektralfunktion, des Energiespektrums, möglich. Vom Autor wurden in [4] verschiedene Untersuchungen zum zeitlichen Verhalten des Energiespektrums durchgeführt. Ein Teil der Betrachtungen und der gewonnenen Ergebnisse soll hier dargestellt werden, ohne auf alle in [4] angegebenen Einzelheiten einzugehen.

Für das zeitliche Verhalten des Energiespektrums kann eine Gleichung aus den Navier-Stokes-Gleichungen hergeleitet werden:

$$\frac{\partial E(k,t)}{\partial t} = T(k,t) - 2\nu k^2 E(k,t). \quad (1)$$

Oft wird auch die integrierte Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^k E(k',t) dk' = -W(k,t) - 2\nu \int_0^k k'^2 E(k',t) dk' \quad (2)$$

verwendet. Hierbei sind  $k$  die Wellenzahl,  $t$  die Zeit und  $\nu$  der Koeffizient der kinematischen Zähigkeit. Mit  $E(k,t)$  wird das Energiespektrum und mit  $T(k,t)$  bzw.  $W(k,t)$  werden Übertragungsterme bezeichnet. Für diese beiden Terme, die im Zusammenhang mit dem Spektrum 3. Ordnung stehen, gilt:

$$W(k,t) = - \int_0^k T(k',t) dk'. \quad (3)$$

Außerdem läßt sich für die Funktion  $T(k,t)$  die Beziehung

1) Für wertvolle Hinweise möchte der Autor Herrn Dr. G. Seifert danken.

$$\int_0^\infty T(k',t) dk' = 0 \quad (4)$$

angeben.

In den Gleichungen (1) und (2) spiegelt sich die Nichtabgeschlossenheit im Auftreten zweier unbekannter Funktionen wider. Um ein abgeschlossenes Gleichungssystem zu erhalten, wird eine weitere Beziehung zwischen den Unbekannten benötigt. Die naheliegende Überlegung, eine solche Gleichung aus den Navier-Stokes-Gleichungen abzuleiten, z. B. für das Spektrum 3. Ordnung, führt dabei bekanntlich nicht zum gewünschten Erfolg.

Von verschiedenen Autoren sind Vorschläge für ein abgeschlossenes Gleichungssystem gemacht worden. Neben den weiter unten genannten sei hier nur auf Millionstschikov [5], Deissler [6] und Tatsumi, Kida, Mizushima [7] hingewiesen. Im allgemeinen werden die Ansätze als Energieübertragungshypothesen bezeichnet. Dieser Begriff wird verständlich, wenn man Gleichung (2) physikalisch interpretiert.  $W(k,t)$  kann als die Energie angesehen werden, die zum Zeitpunkt  $t$  pro Zeit- und Masseneinheit von Turbulenzelementen, deren Wellenzahlen kleiner als  $k$  sind, zur Turbulenzelementen, deren Wellenzahlen größer als  $k$  sind, übertragen wird.

Hier soll auf einige Ansätze näher eingegangen werden, die einen hypothetischen Zusammenhang zwischen  $W$ ,  $E$  und  $k$  angeben, ohne dabei die dynamischen Gleichungen für die Spektren 3., 4. oder höherer Ordnung oder Folgerungen aus diesen zu berücksichtigen. Derartige „klassische“ Energieübertragungshypothesen sind u. a. von Kovaszny, Obuchov, Heisenberg und Mijakoda, Ogura bekannt. Auf die Kennzeichnung der Zeitabhängigkeit der Funktionen wird im folgenden zwecks Vereinfachung der Bezeichnung verzichtet.

Die Hypothese von Kovaszny [8] basiert auf Dimensionsanalyse:

$$W(k) = 2\gamma_K k^{5/2} (E(k))^{3/2} \quad (5)$$

Hierbei ist  $\gamma_K$  eine dimensionslose Konstante.

Bei den folgenden drei Ansätzen kommen Erkenntnisse über den Energiefluß in einer turbulenten Strömung von der mittleren zur Schwankungsbewegung zum Tragen. Diese werden auf ein in Mikro- und Makrokomponente zerlegtes isotropes Geschwindigkeitsfeld entsprechend übertragen.

Obuchov [9] schlug vor:

$$W(k) = 2\gamma_0 \int_k^\infty E(k') dk' \quad (6)$$

$$\cdot \left\{ \int_0^k k''^2 E(k'') dk'' \right\}^{1/2}$$

Mit  $\gamma_0$  tritt wiederum eine dimensionslose Konstante auf. In die Hypothesen von Heisenberg [10],

$$W(k) = 2 \gamma_H \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k')}{k'^3}} dk' \cdot \int_0^k k''^2 E(k'') dk'' ; \quad (7)$$

und Mijakoda, Ogura [11],

$$W(k) = 2 \gamma_{M/O} \frac{1}{k} \left\{ \int_k^\infty E(k') dk' \right\}^{1/2} \cdot \int_0^k k''^2 E(k'') dk'' ; \quad (8)$$

fließt außerdem noch die Annahme eines virtuellen Koeffizienten der Turbulenzzähigkeit ein. In (7) und (8) treten mit  $\gamma_H$  und  $\gamma_{M/O}$  ebenfalls dimensionslose Konstanten auf. Es ist nun möglich, einen zusammenfassenden Ansatz (eine Verallgemeinerung der Goldsteinschen Hypothese, vgl. [2], S. 201) anzugeben, der alle Hypothesen (5) bis (8) als Spezialfälle enthält:

$$W(k) = 2 \gamma k^{m_0} (E(k))^{n_0} \left\{ \int_k^\infty k'^m (E(k'))^n dk' \right\}^\lambda \cdot \left\{ \int_0^k k''^{m_1} (E(k''))^{n_1} dk'' \right\}^{\lambda_1} . \quad (9)$$

Hier müssen aus Dimensionsgründen die Gleichungen

$$m_0 + (m+1)\lambda + (m_1+1)\lambda_1 = 5/2 , \quad (9a)$$

$$n_0 + n\lambda + n_1\lambda_1 = 3/2 \quad (9b)$$

erfüllt werden.

Die Gleichung (9) und damit jede der Hypothesen (5) bis (8) bildet zusammen mit (2) bzw. (1) und (3) ein abgeschlossenes Gleichungssystem für die Berechnung des zeitlichen Verhaltens des Energiespektrums. Offen bleibt jedoch die Frage nach der Konstanten  $\gamma$  in (9), die im weiteren auch als „Vorfaktor“ bezeichnet wird. Betrachtet man die Ansätze im einzelnen, so findet man in der Literatur die vielfältigsten Angaben für  $\gamma_H$  ( $\gamma_H = 0,0005 \dots \gamma_H = 1,4$ ), sehr wenig über die anderen Konstanten. Im folgenden soll einerseits auf eine Möglichkeit hingewiesen werden, einen Zusammenhang zwischen den Vorfaktoren und der Kolmogoroff-Obuchov-Konstanten herzustellen. Andererseits soll die Bestimmung der Konstanten  $\gamma_K, \gamma_0, \gamma_H$  und  $\gamma_{M/O}$  in (5) bis (8) durch einen Vergleich von experimentellen Ergebnissen und numerisch ermittelten Werten erfolgen.

## 2. Eine Beziehung zwischen der Kolmogoroff-Obuchov-Konstanten und den in den Hypothesen auftretenden Konstanten

Aus Untersuchungen der Energieübertragungshypothesen im Trägheitsunterbereich erhält man das Resultat, daß sich die Vorfaktoren in den Hypothesen aus der Kolmogoroff-Obuchov-Konstanten bestimmen lassen. Entspre-

chende Ergebnisse findet man für verschiedene Hypothesen z. B. auch in [2] und [12].

Der Trägheitsunterbereich wird im allgemeinen durch

$$W(k) = \epsilon \quad (10)$$

charakterisiert, wobei  $\epsilon$  die Dissipation bezeichnet. Aus (10) folgt dimensionsanalytisch:

$$E(k) = c_1 \epsilon^{2/3} k^{-5/3} . \quad (11)$$

Gleichung (11) ist vielfach experimentell bestätigt worden und wird gewöhnlich als „-5/3-Gesetz“ bezeichnet. Untersuchungen der allgemeinen Hypothese (9) im Trägheitsunterbereich, d. h. bei Gültigkeit von (10) und (11), führen unter den Einschränkungen  $n_0 = 0, \lambda, \lambda_1 > 0$  und  $m - 5/3 n + 1, m_1 - 5/3 n_1 + 1 \neq 0$  zum Ergebnis:

$$2 \gamma c_1^{3/2} = (5/3 n - m - 1)^\lambda (m_1 + 1 - 5/3 n_1)^{\lambda_1} . \quad (12)$$

Für die Hypothese von Kovasznay (5) ergibt sich aus (10) und (11):

$$2 \gamma_K = c_1^{-3/2} . \quad (13)$$

Mit (12) und (13) ist bei Kenntnis von  $c_1$  die Möglichkeit gegeben, für eine relativ umfangreiche Anzahl von Hypothesen die Vorfaktoren zu bestimmen.

Für die Kolmogoroff-Obuchov-Konstante  $c_1$  stehen von experimenteller Seite Aussagen zur Verfügung. Hier soll angegeben werden, welche Werte sich daraus für die Faktoren  $\gamma_K, \gamma_0, \gamma_H$  und  $\gamma_{M/O}$  ergeben.

Im allgemeinen liegen experimentelle Ergebnisse für das eindimensionale Spektrum  $E_1(k)$  vor, für das sich im Trägheitsunterbereich ebenfalls ein „-5/3-Gesetz“ formulieren läßt:

$$E_1(k) = \alpha_1 \epsilon^{2/3} k^{-5/3} . \quad (14)$$

Die Konstante  $\alpha_1$  steht mit der Kolmogoroff-Obuchov-Konstanten  $c_1$  im Zusammenhang:

$$c_1 = 55/18 \alpha_1 . \quad (15)$$

Eine umfangreiche Übersicht über experimentell ermittelte Werte für  $\alpha_1$  findet man in [13]. Die Konstante  $\alpha_1$  variiert in dieser Zusammenstellung zwischen 0,31 und 0,88. Die sich daraus ergebenden Resultate für die Kolmogoroff-Obuchov-Konstante  $c_1$ , sowie für die Vorfaktoren  $\gamma_K, \gamma_0, \gamma_H$  und  $\gamma_{M/O}$  sind in der folgenden Tabelle angegeben.

### Gegenüberstellung der Konstanten

Konstante	ermittelte Werte
$\alpha_1$	0,31 . . . 0,88
$c_1$	0,95 . . . 2,69
$\gamma_K$	0,54 . . . 0,11
$\gamma_0$	0,42 . . . 0,09
$\gamma_H$	0,96 . . . 0,20
$\gamma_{M/O}$	0,50 . . . 0,10

### 3. Bestimmung der Konstanten aus einem Vergleich von experimentellen und numerischen Resultaten

#### 3.1. Voraussetzungen und Prinzip

Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung der Vorfaktoren besteht im Vergleich der Lösung des entsprechenden dynamischen Gleichungssystems für das Energiespektrum mit Experimenten. Meetz [14] hat entsprechende numerische Rechnungen für die Hypothese von Heisenberg durchgeführt. Er berechnete für verschiedene  $\gamma_H$  den Abklingvorgang der Energie und fand aus der Gegenüberstellung von experimentellen und numerischen Resultaten  $\gamma_H = 0,75$ .

Die in [4] angegebenen numerischen Verfahren bieten die Möglichkeit, eine relativ umfangreiche Klasse von Hypothesen zu betrachten. Mit ihnen kann man ein zu einem bestimmten Zeitpunkt bekanntes Energiespektrum in seiner zeitlichen Entwicklung berechnen. Es handelt sich dabei um ein Differenzenverfahren zur näherungsweise Lösung des Gleichungssystems (1), (3), (9) (mit der Einschränkung  $n_0 = 0$ ), sowie um ein Runge-Kutta-Verfahren zur numerischen Behandlung des zu den Gleichungen (1), (3) und (5) gehörigen charakteristischen Gleichungssystems.

Für den angestrebten Vergleich ist die Kenntnis eines Energiespektrums einer näherungsweise isotropen Strömung zu unterschiedlichen Zeitpunkten nötig. Diese Werte müssen von experimenteller Seite zur Verfügung stehen. Das zum ersten Zeitpunkt gemessene Spektrum kann dann als Anfangsspektrum für die Rechnung dienen. Der Vergleich zur Bestimmung der Vorfaktoren besteht nun darin, die numerischen Resultate für verschiedene Werte der Vorfaktoren dem zum zweiten Zeitpunkt experimentell gewonnenen Spektrum gegenüberzustellen und die beste Übereinstimmung zu ermitteln. Im Gegensatz zu der im Abschnitt 2 beschriebenen Herangehensweise ist es hier nicht notwendig, die Existenz eines  $-5/3$ -Bereiches vorauszusetzen.

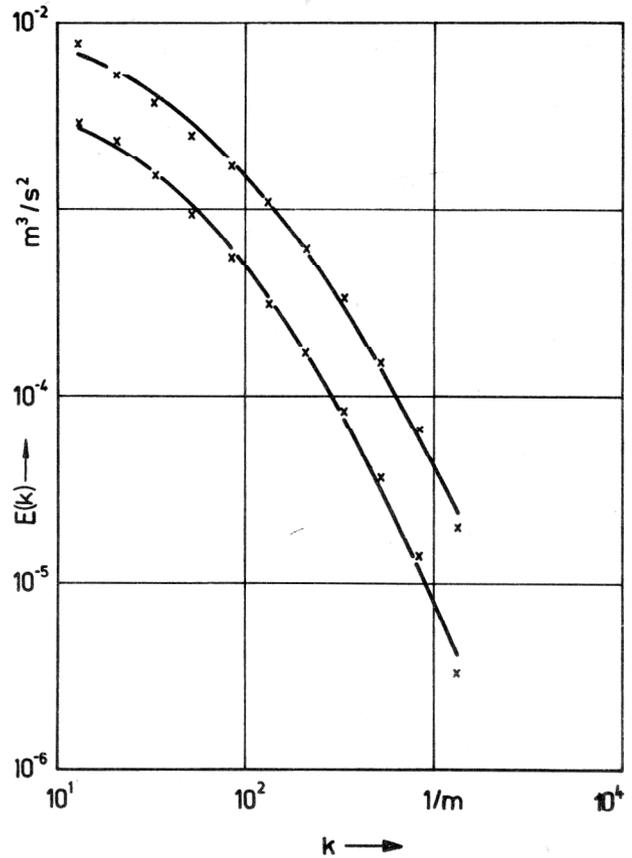


Bild 1  
Approximation der Meßwerte der eindimensionalen Spektren

#### 3.2. Das Meßmaterial und dessen Aufbereitung

Die hier verwendeten Meßergebnisse wurden den experimentellen Untersuchungen von Klatt [15] entnommen. Es handelt sich dabei um Messungen von Spektren der Längskomponente in einer turbulenten Luftströmung hinter einem Gitter. Benutzt wurden die Ergebnisse in einer Entfernung von 11D und 22,7D (Gitterteilung  $D = 30$  mm) hinter dem Gitter. Die Anblasgeschwindigkeit betrug 8 m/s.

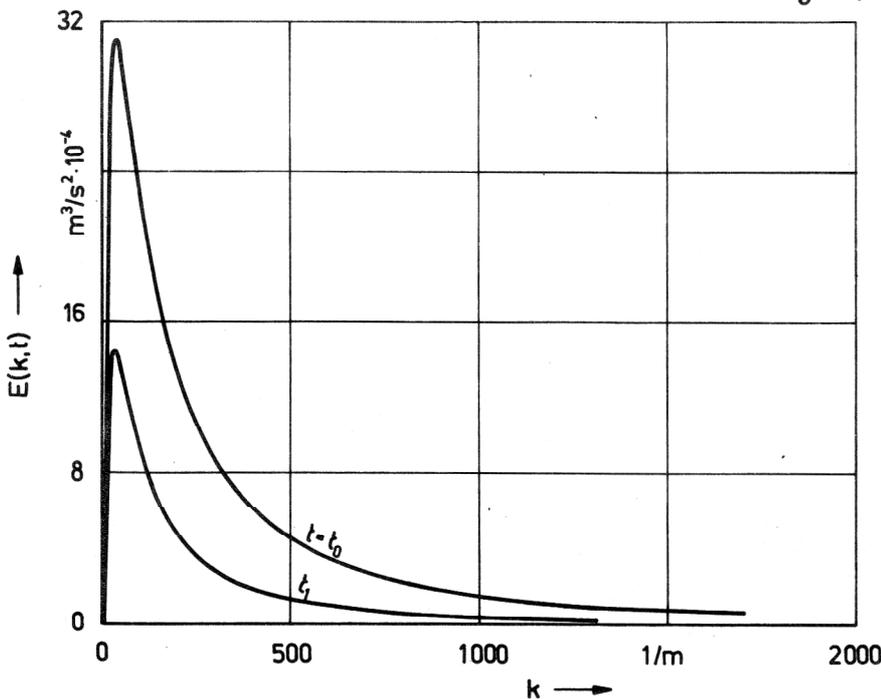


Bild 2  
Dreidimensionale Energiespektren, die den gemessenen eindimensionalen Spektren entsprechen

Unter der Annahme, daß in dieser Strömung in einem Bezugssystem, das sich mit der mittleren Geschwindigkeit in Strömungsrichtung bewegt, näherungsweise isotrope Verhältnisse vorliegen, kann man bei Verwendung der Taylorschen Hypothese die beiden Spektren als Resultate von Messungen an einem Ort zu verschiedenen Zeiten auffassen. Als Zeitdifferenz ergibt sich dabei aus dem Abstand der Meßpunkte und der mittleren Geschwindigkeit 0,044 s.

Von experimenteller Seite liegen eindimensionale Spektren vor. Aus diesen wurden die benötigten dreidimensionalen Energiespektren berechnet. Zwischen dem eindimensionalen Längsspektrum  $E_1(k)$  und dem Energiespektrum  $E(k)$  besteht der Zusammenhang:

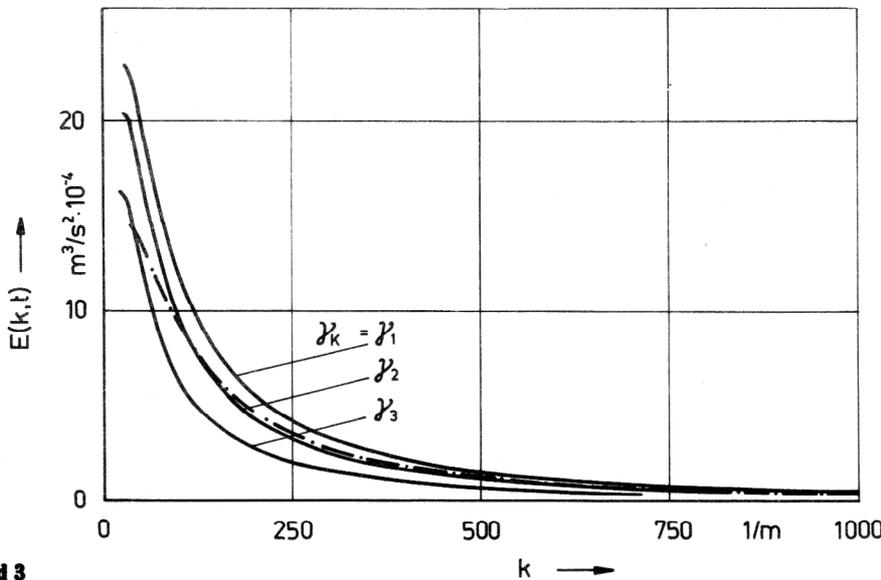
$$E(k) = \frac{1}{2} k^3 \frac{d}{dk} \left( \frac{1}{k} \frac{d}{dk} E_1(k) \right). \quad (16)$$

Um die Differentiationen in (16) durchführen zu können, wurden die Meßergebnisse mit Hilfe eines analytischen Ausdrucks approximiert. Im Bild 1 sind die Approximationskurven und die Meßwerte (durch Kreuze gekennzeichnet) der eindimensionalen Längsspektren

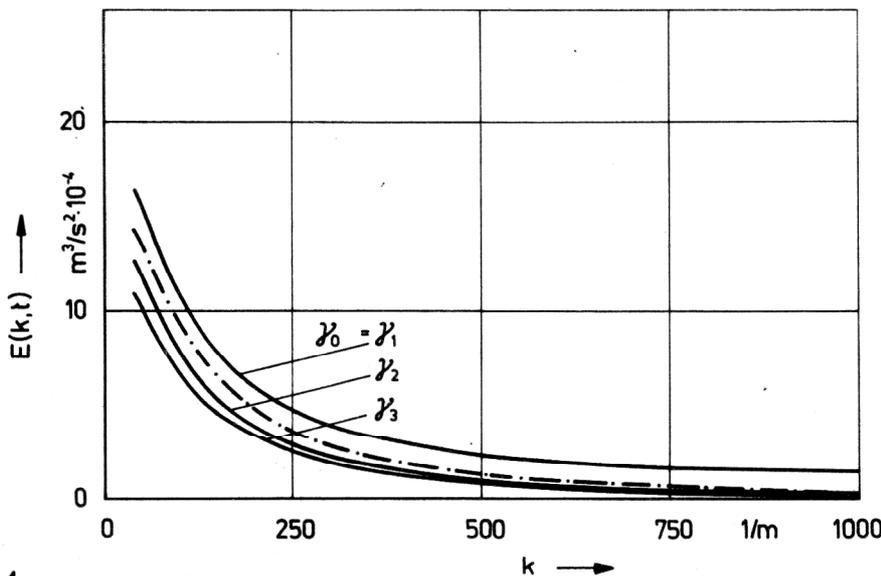
aufgetragen. Bild 2 zeigt die sich daraus ergebenden Energiespektren, die den Zeitpunkten  $t_0$  und  $t_1$  zugeordnet werden. Das Spektrum zur Zeit  $t_0$  diente als Ausgangsspektrum für die Rechnungen, das Spektrum zur Zeit  $t_1$  ( $t_1 = t_0 + 0,044$  s) zum Vergleich mit den numerischen Ergebnissen.

### 3.3. Die numerischen Rechnungen

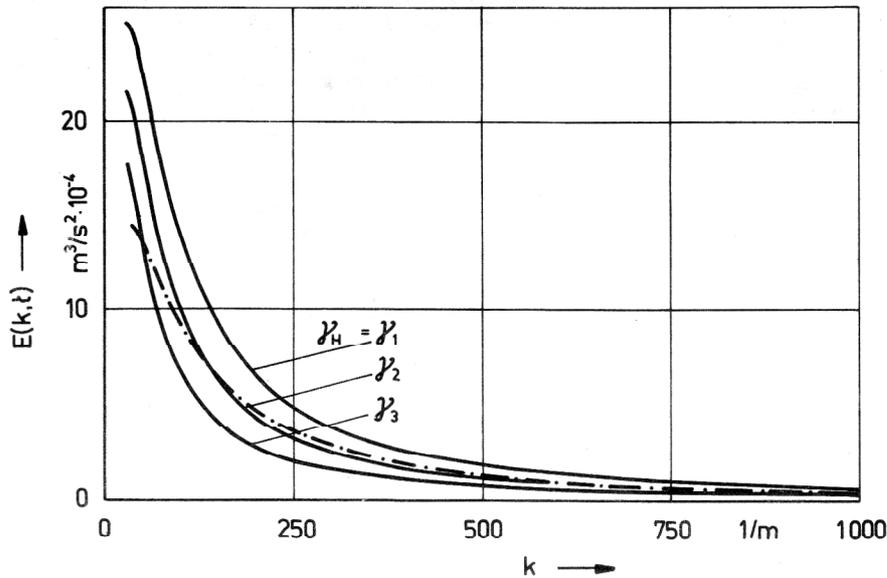
Es wurde die zeitliche Entwicklung des Ausgangsspektrums bis zum Zeitpunkt  $t_1$  nach den Hypothesen von Kovasznay, Obuchov, Heisenberg und Mijakoda, Ogura berechnet. Dabei wurden die Vorfaktoren  $\gamma_K$ ;  $\gamma_O$ ,  $\gamma_H$  und  $\gamma_{M/O}$  variiert. Im Ergebnis der Rechnungen liegen für die benutzten Hypothesen unterschiedliche Spektren zum Zeitpunkt  $t_1$  vor, die jeweils verschiedenen Vorfaktoren entsprechen. Durch Gegenüberstellung mit dem Vergleichsspektrum kann nun ermittelt werden, mit welchen Vorfaktoren die besten Übereinstimmungen erzielt werden. Für jeweils drei ausgewählte Werte der Konstanten sind die errechneten Spektren in den Bildern 3 bis 6 aufgetragen. Das Vergleichsspektrum ist als



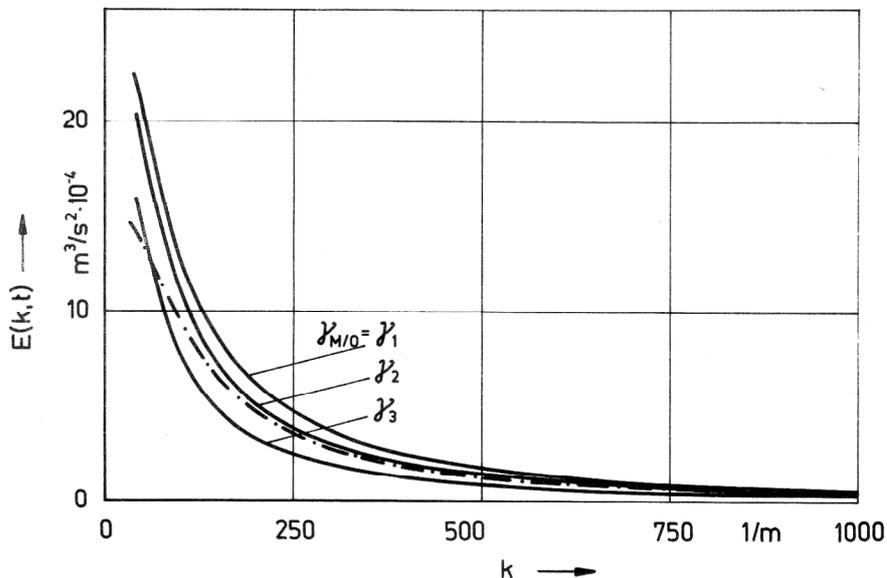
**Bild 3**  
Nach der Hypothese von Kovasznay mit  $\gamma_1 = 0,14$ ,  $\gamma_2 = 0,21$  und  $\gamma_3 = 0,39$  berechnete Energiespektren



**Bild 4**  
Nach der Hypothese von Obuchov mit  $\gamma_1 = 0,11$ ,  $\gamma_2 = 0,16$  und  $\gamma_3 = 0,22$  berechnete Energiespektren



**Bild 5**  
Nach der Hypothese von Heisenberg mit  $\gamma_1 = 0,25$ ,  $\gamma_2 = 0,5$  und  $\gamma_3 = 0,9$  berechnete Energiespektren



**Bild 6:**  
Nach der Hypothese von Mijakoda, Ogura mit  $\gamma_1 = 0,19$ ,  $\gamma_2 = 0,26$  und  $\gamma_3 = 0,47$  berechnete Energiespektren

Strichpunktlinie eingezeichnet. In allen Darstellungen wurde auf den Verlauf der Spektren bei kleinen Wellenzahlen verzichtet, da in diesem Bereich keine Meßwerte vorlagen bzw. diese sehr streuten.

Bei den hier betrachteten Hypothesen zeigt sich, daß bei geeigneter Wahl der Vorfaktoren eine befriedigende Übereinstimmung mit den Meßwerten für  $k > 150$  1/m erreicht wird. Die besten Resultate werden mit  $\gamma_K = 0,21$ ,  $\gamma_O = 0,16$ ,  $\gamma_H = 0,5$  und  $\gamma_{M/O} = 0,26$  erzielt. Das bedeutet für die Kolmogoroff-Obuchov-Konstante nach (12) und (13)

$$c_1 = 1,47 \dots 1,78.$$

Abschließend soll darauf hingewiesen werden, daß für kleine Reynoldszahlen bei den Vorfaktoren eine Reynoldszahlabhängigkeit vermutet wird (vgl. [3], S. 250).

Im hier betrachteten Fall lagen für die turbulente Reynoldszahl

$$Re_\lambda = \frac{\lambda \sqrt{u'^2}}{\nu}, \quad (17)$$

wobei  $\lambda = \sqrt{\frac{15 \nu u'^2}{\epsilon}}$  der Taylorsche Mikromaßstab ist

und mit  $u'$  die Geschwindigkeitsschwankung bezeichnet wird, die Werte  $Re_\lambda(t_0) = 194$  und  $Re_\lambda(t_1) = 148$  vor. Untersuchungen zur Reynoldszahlabhängigkeit wurden nicht durchgeführt.

## LITERATUR

- [1] Монин, А. С., Яглом, А. М.: Статистическая гидромеханика, часть 1, Москва 1965.
- [2] Монин, А. С., Яглом, А. М.: Статистическая гидромеханика, часть 2, Москва 1967.
- [3] Hinze, J. O.: Turbulence Mc Graw-Hill, New York, Toronto, London 1975.
- [4] Dreßler, B.: Theoretische und numerische Untersuchungen zum zeitlichen Verhalten des Energiespektrums in der homogenen isotropen Turbulenz, Dissertation, AdW der DDR, 1980.
- [5] Миллионщиков, М. Д.: К теории однородной изотропной турбулентности. Докл. АН СССР 32 (1941) 9. 611 – 614.
- [6] Deissler, R.: On the decay of homogeneous turbulence before final period, Phys. Fluids 1 (1958) 2, 111 – 121.
- [7] Tatsumi, T., Kida, S., Mizushima, J.: The multiple-scale cumulant expansion for isotropic turbulence, J. Fluid Mechanics 85 (1978) 1, 97 – 142.
- [8] Kovasznyai, L. S. G.: Spectrum of locally isotropic turbulence, J. Aeronaut. Sci. 15 (1948) 12, 745 – 753.
- [9] Обухов, А. М.: О распределении энергии в спектре турбулентного потока. Докл. АН СССР 32 (1941) 1, 22 – 24.
- [10] Heisenberg, W.: Zur statistischen Theorie der Turbulenz, Zs. Phys. 124 (1948) 7 – 12, 628 – 657.
- [11] Ogura, Y., Mijakoda, K.: Some remarks on the „turbulent element model“ of isotropic turbulence, J. Meteor. Soc. Japan 31 (1953) 6, 206 – 218.
- [12] Seifert, G.: Bemerkungen zu Hypothesen der spektralen Energieübertragung in isotroper Turbulenz, 3. Wissenschaftliche Tagung der Abt. Mathematik/Rechentchnik an der IHS Köthen, 4. – 5. 10. 1978, Tagungsband S. 254 – 266.
- [13] Graichen, K.: Messung und Interpretation von Spektren turbulenter Geschwindigkeitsschwankungen am Beispiel einer turbulenten Rührwerksströmung, Dissertation, AdW der DDR, 1977.
- [14] Meetz, K.: Das zeitliche Abklingen der Energiespektren in der homogenen isotropen Turbulenz als Anfangswertproblem, Z. Naturforschung 11 A (1956) 10, 832 – 847.
- [15] Klatt, F.: Über die Bestimmung der Komponente der Energiespektralfunktion im inhomogenen, ebenen Strömungsfeld hinter einem Turbulenzgitter, Zwischenbericht am Strömungstechnischen Labor des ZIMM der AdW der DDR 1971 (unveröffentlicht).

Anschrift des Verfassers:  
 Dr. rer. nat. Bernd Dreßler  
 Akademie der Wissenschaften der DDR  
 Institut für Mechanik  
 1199 Berlin-Adlershof  
 Rudower Chaussee 5