

Formalisierte Berechnung der Geschwindigkeitssprünge und Impulse bei Stoßvorgängen in Starrkörper- und hybriden Mehrkörpersystemen

U. Fischer, K. Hennig

Viele Aufgaben der Maschinendynamik erfordern die Berücksichtigung von Stoßvorgängen und die Aufstellung der Gleichungen zur Berechnung der Geschwindigkeitssprünge, wie sie nach der elementaren Stoßtheorie auftreten. Die zunehmende Bedeutung komplizierter, z. T. räumlicher, Mechanismen, die u. a. für Manipulatoren und Industrieroboter Anwendung finden, unterstreicht die Notwendigkeit von einfach zu handhabenden Berechnungsformeln. Dabei soll nicht verkannt werden, daß die elementare Stoßtheorie nur ein recht grobes Modell der Wirklichkeit darstellt, das zeigt sich u. a. an den Schwierigkeiten der Vorausbestimmung der sog. Stoßzahl. Dennoch leistet diese Theorie insbesondere für orientierende Untersuchungen eine unschätzbare Hilfe.

In Erweiterung früherer Untersuchungen [1] wird im folgenden auch eine Möglichkeit zur Berechnung der Impulse gezeigt, die zwischen den stoßenden Teilen ausgetauscht werden. Bei Systemen mit starren und elastischen Körpern (hybride Systeme) wird vorausgesetzt, daß eine Diskretisierung mit Hilfe von Ritz-Ansätzen auf sogenannte zulässige Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden vorangegangen ist (vgl. z. B. [2]).

1. Grundannahmen

Das zu untersuchende Modell werde durch die verallgemeinerten Koordinaten q_1, q_2, \dots, q_n beschrieben, die in einen Spaltenvektor q zusammengefaßt sind. Zwischen diesen Koordinaten bestehen nicht notwendigerweise Bindungen, von denen vorausgesetzt werden soll, daß sie — ob sie nun zweiseitig oder einseitig sein mögen — vor, während und nach dem Stoß bestehen. Diese Bindungen lassen sich also durch

$$\dot{q}^T \cdot B + b^T = 0^T \quad (1)$$

ausdrücken, wobei die Matrix B und der Vektor b im allgemeinen Funktionen der Zeit und der verallgemeinerten Koordinaten sind. Die Bindungen können holonom oder nichtholonom sein. Der zu untersuchende Stoßvorgang möge durch die Ungleichung

$$H(t, q_1, q_2, \dots, q_n) \leq 0 \quad (2)$$

determiniert sein, woraus

$$\dot{H} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + h_0 \quad (3)$$

folgt. Hier soll der Vektor $h = \partial H / \partial q$ eingeführt werden, so daß Gl. (3) die Form

$$\dot{H} = \dot{q}^T \cdot h + h_0 \quad (4)$$

erhält. Die kinetische Energie des Gesamtsystems soll durch

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T \cdot G \cdot \dot{q} + \dot{q}^T \cdot g + g_0 \quad (5)$$

ausgedrückt werden. Die symmetrische Matrix G , der Vektor g und der Skalar g_0 sind im allgemeinen Funktionen der Zeit und der verallgemeinerten Koordinaten. Mit den Gln. (1), (4) und (5) lassen sich die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zweiter Art wie folgt formulieren:

$$\frac{d}{dt} (G \cdot \dot{q} + g) - \frac{\partial T}{\partial q^T} = f + \lambda_0 h + B \cdot \underline{\lambda} \quad (6)$$

Neu eingeführt wurden hier der Vektor der verallgemeinerten eingepprägten Kräfte, f , der Lagrangesche Parameter λ_0 sowie ein Spaltenvektor mit weiteren Lagrangeschen Parametern, $\underline{\lambda}$. Nach der elementaren Stoßtheorie sind die Koordinaten während des Stoßvorganges, dessen Dauer gegen Null geht, als stetige Größen zu betrachten, während sich die Geschwindigkeiten um endliche Werte sprunghaft ändern und die Stoßkräfte (dargestellt durch λ_0 und $\underline{\lambda}$) Distributionen von der Art der Diracschen δ -Funktion darstellen. Damit lassen sich die Geschwindigkeitsänderungen zur Zeit t_0 des Stoßes durch Integration von Gl. (6) wie folgt berechnen:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [G \cdot \dot{q} + g]_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \left(\frac{\partial T}{\partial q^T} + f + \lambda_0 h + B \cdot \underline{\lambda} \right) dt$$

$$G \cdot \Delta \dot{q} = p_0 h(t_0, q_{10}, \dots, q_{n0}) + B(t_0, q_{10}, \dots, q_{n0}) \cdot p$$

In Gl. (7) sind p_0 und die Elemente von p die durch Integration von λ_0 und $\underline{\lambda}$ entstandenen Stoßimpulse. Gl. (1) und Gl. (7) ergeben insgesamt eine Gleichung weniger als die Anzahl der in $\Delta \dot{q}$, p_0 , p enthaltenen Unbekannten. Diese seien deshalb auf p_0 bezogen durch die Einführung der neuen Vektoren u und v :

$$\Delta \dot{q} = p_0 u; \quad p = p_0 v \quad (8)$$

Aus den Gln. (1), (7), (8) entsteht ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten u und v :

$$\begin{pmatrix} G & -B \\ -B^T & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

2. Berechnungsformeln

Die fehlende Gleichung zur Berechnung von p_0 wird aus einer Betrachtung gewonnen, die sich auf die bekannte Unterteilung des Stoßvorganges in eine Kompressionsperiode und die anschließende Restitutionsperiode stützt. Das Ende der Kompressionsperiode ist erreicht, wenn $\dot{H} = 0$ erfüllt ist; der zum Erreichen dieses Zustandes notwendige Impuls sei p_0' . Man setzt im weiteren $\dot{q} = \dot{q}_1 + \Delta\dot{q}$, wobei der Index 1 den Zustand unmittelbar vor dem Stoß bezeichnet. Mit den Gln. (4) und (8) folgt

$$p_0' = - \frac{h^T \cdot \dot{q}_1 + h_0}{h^T \cdot u} \quad (10)$$

Während der Restitutionsperiode wird ein Impuls p_0'' übertragen, der das κ -fache von p_0' beträgt; dabei ist κ die sogenannte Stoßzahl, deren Wert zwischen 0 und 1 liegt. Damit erhält man schließlich:

$$p_0 = -(1 + \kappa) \frac{h^T \cdot \dot{q}_1 + h_0}{h^T \cdot u} \quad (11)$$

Mit den Gl. (8) sind damit auch die gesuchten Geschwindigkeitssprünge und die Austauschimpulse gegeben.

3. Beispiele

3.1. Einfaches Starrkörpersystem

Ein Stoßvibrator (Bild 1) wird von einem (hier nicht gezeichneten) Antrieb mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω angetrieben. Gesucht sind die Geschwindigkeitsänderungen beim Stoß, der auf den Pfahl übertragene Impuls sowie der vom Antrieb auf den Unwuchtkörper zu übertragene Drehimpuls.

Mit den oben eingeführten Bezeichnungen gilt

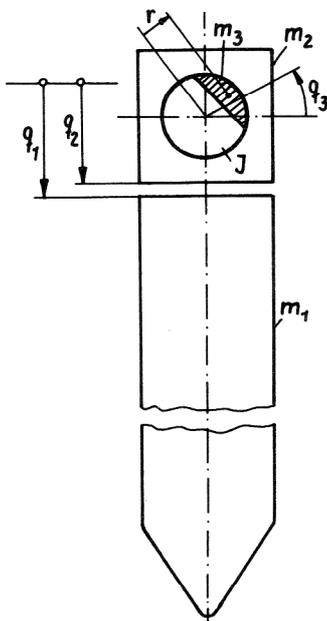


Bild 1

$$G = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 & -m_3 r \cdot \cos q_3 \\ 0 & -m_3 r \cdot \cos q_3 & m_3 r^2 + J \end{bmatrix}$$

$$B^T = [0; 0; 1]$$

$$h^T = [-1; 1; 0]$$

Die Auflösung der Gl. (9) liefert mit den obigen Größen:

$$u_1 = -m_1^{-1}; \quad u_2 = (m_2 + m_3)^{-1}; \quad u_3 = 0;$$

$$v_1 = \frac{-m_3}{m_2 + m_3} r \cos q_3$$

Damit ergibt sich aus Gl. (11) der auf den Pfahl übertragene Impuls zu

$$p_0 = -(1 + \kappa) \frac{m_1 (m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3} (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)$$

Die Geschwindigkeitsänderungen und der Drehimpuls bestimmen sich aus Gl. (8) zu:

$$\Delta \dot{q}_1 = -p_0/m_1; \quad \Delta \dot{q}_2 = p_0/(m_2 + m_3);$$

$$P_1 = \frac{-m_3 p_0}{m_2 + m_3} r \cos q_3$$

3.2. Hybrides System

Ein Spezialfahrzeug besteht im wesentlichen aus einem langen Träger mit gleichmäßiger Masseverteilung, der sich auf vorgespannte Federn abstützt. Die Verschiebung und Verformung des Trägers soll durch 3 Koordinaten, q_1, q_2, q_3 , beschrieben werden, wobei eine sinusförmige Durchbiegung des Trägers vorausgesetzt wird. Die Änderung der verallgemeinerten Geschwindigkeiten und der Stoßimpulse sollen für den Fall berechnet werden, in dem das Spiel am linken Balkenende nach zeitweiliger Überwindung der Federvorspannung verschwindet.

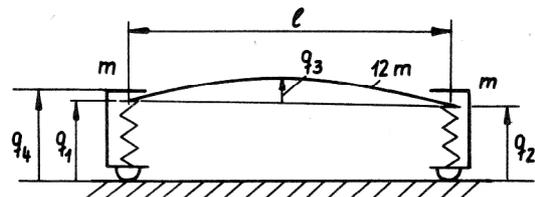


Bild 2

Es gilt mit den gegebenen Massewerten:

$$G = \begin{bmatrix} 4m & 2m & 12m/\pi & 0 \\ 2m & 4m & 12m/\pi & 0 \\ 12m/\pi & 12m/\pi & 6m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

$$h^T = [1; 0; 0; -1]$$

Die Auflösung von Gl. (9) liefert

$$\mu_1 = 0,690; \mu_2 = 0,190; \mu_3 = -0,560; \mu_4 = -1$$

Daraus folgt mit den Gln. (11) und (8):

$$p_0 = -0,592 (1 + \kappa) m (\dot{q}_1 - \dot{q}_4);$$

$$\Delta \dot{q}_1 = -0,408 (1 + \kappa) \cdot (\dot{q}_1 - \dot{q}_4);$$

$$\Delta \dot{q}_2 = -0,112 (1 + \kappa) \cdot (\dot{q}_1 - \dot{q}_4);$$

$$\Delta \dot{q}_3 = 0,331 (1 + \kappa) \cdot (\dot{q}_1 - \dot{q}_4);$$

$$\Delta \dot{q}_4 = 0,592 (1 + \kappa) \cdot (\dot{q}_1 - \dot{q}_4)$$

LITERATUR:

- [1] Fischer, U.: Übergangsbedingungen für Stoßvorgänge in mechanischen Systemen mit endlich vielen Freiheitsgraden. Wiss. Z. Techn. Hochsch. Magdeburg. 16 (1972), S. 323 – 325.
- [2] Truckenbrodt, A.: Bewegungsverhalten und Regelung hybrider Mehrkörpersysteme mit Anwendung auf Industrieroboter. Fortschr.-Ber. VDI-Z. Reihe 8, Nr. 33.

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr. sc. techn. Udo Fischer
Technische Hochschule Magdeburg
Sektion Maschinenbau
3010 Magdeburg, PSF 124

Prof. Dr. sc. techn. Klaus Hennig
Akademie der Wissenschaften der DDR
Institut für Mechanik
1199 Berlin
Rudower Chaussee 5