

## Zur Lösung des ebenen und axialsymmetrischen Fließens eines viskoplastischen Körpers mit Hilfe der FEM

H. Gläser, R. Vogel

Viskoplastische Körper übertragen im Gegensatz zu den viskosen Flüssigkeiten im Ruhezustand Spannungen mit nicht verschwindendem Deviator. Für kleine Geschwindigkeitsgradienten jedoch endliche Geschwindigkeiten soll das von Prager/Hohenemser verallgemeinerte Stoffgesetz nach Bingham gelten. Dieses verknüpft gemäß (1) das viskose und das plastische Fließen, d. h. den Newton- und den Levy-Mises-Körper in additiver Weise:

$$s_{ij} = \left( 2\mu + \frac{k}{\sqrt{I_2}} \right) V_{ij} \quad (1)$$

bzw. in Matrizenschreibweise

$$s = D\dot{\epsilon} = \left( D' + \frac{k}{\sqrt{I_2}} \right) \dot{\epsilon}$$

Darin bedeuten  $\mu$  die Zähigkeit im Fließzustand,  $I_2$  die zweite Invariante des Deviators der Verzerrungsgeschwindigkeiten und  $k$  die Schubfließgrenze. Den Startvektor für dieses nichtlineare Problem bildet nach dem Iterationsverfahren von Schlüssler [1] die Lösung des zähen, stationären Fließens eines inkompressiblen Körpers, dem der nichtlineare Term der plastischen Lösung auf iterativem Wege überlagert wird. Zunächst zur Lösung des inkompressiblen, viskosen Problems. In diesem Fall ist der Vektor der deviatorischen Spannungen mit dem der Verzerrungsgeschwindigkeiten durch die Zähigkeitsmatrix  $D'$  für den ebenen Deformationszustand und den axialsymmetrischen Spannungszustand nach [2] verbunden.

<p>ebener Def.</p> $s^T = (s_x, s_y, \tau_{xy})$ $\dot{\epsilon}^T = (\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\gamma}_{xy})$ $D' = \mu \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $p = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$	<p>axialsymmetr. Spann.</p> $s^T = (s_r, s_\varphi, s_z, \tau_{rz})$ $\dot{\epsilon}^T = (\dot{\epsilon}_r, \dot{\epsilon}_\varphi, \dot{\epsilon}_z, \dot{\gamma}_{rz}) \quad (2)$ $D' = \mu \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $p = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z)$
---	---

Mit Hilfe des angegebenen isotropen Druckes lassen sich die Komponenten des entsprechenden Spannungstensors berechnen.

$$\sigma = s + m \cdot p$$

wobei gilt

$$m^T = (1, 1, 1, 0) \quad (3)$$

Der Zusammenhang zwischen den Verzerrungen und den Verschiebungen bzw. ihren Geschwindigkeiten heißt mit den bekannten Differentialoperatormatrizen  $L$

$$\epsilon = L \cdot u \quad \text{bzw.} \quad \dot{\epsilon} = L \cdot v$$

$$L^T = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad L^T = \begin{bmatrix} \partial/\partial r & \frac{1}{r} & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial r \end{bmatrix} \quad (4)$$

Es ist erkennbar, daß die für eine isotrope, inkompressible Flüssigkeit definierte Zähigkeit  $\mu$  eine Schubmodul  $G$  in der Elastizitätstheorie analoge Stellung einnimmt.

Im Hinblick auf die Anwendung der FEM verwenden wir die dem Gleichgewicht äquivalente virtuelle Arbeitsgleichung (5), die mit der Kontinuitätsgleichung (6)

$$\int_V \delta \epsilon^T \sigma \, dV - \int_V \delta u^T \cdot f_v \, dV - \int_A \delta u^T \cdot f_A \, dA = 0 \quad (5)$$

mit

$$\nabla^T u = \epsilon_v = 0 \quad (6)$$

die Grundlage der Lösungsmethode für inkompressible elastische Festkörper ( $u, G$ ) bzw. für inkompressible, viskose Flüssigkeiten ( $v, \mu$ ) darstellt.

Die angeschriebenen Beziehungen machen die formale Analogie zwischen den inkompressiblen elastischen Problemen und denen des viskosen inkompressiblen stationären Fließens deutlich. Damit können nach Zienkiewicz [2] die für inkompressible elastische Festkörper entwickelten Lösungsmethoden zur Lösung des viskosen, inkompressiblen, langsamen Fließens bei Weglassen der konvektiven Terme, denn nur unter dieser Voraussetzung ist die Dualität vollständig, herangezogen werden. Die zutreffenden, bekanntesten Lösungstechniken sind:

1. Das sog. u-p-Verfahren:  $u$  bzw.  $v$  und  $p$  werden als Variable angesetzt, wobei der Druck  $p$  wie ein Lagrange'scher Multiplikator in die Variationsgleichung eingeht.
2.  $u$  bzw.  $v$  wird als einzige Variable angenommen und die Kontinuitätsgleichung wird als Straffunktion angesetzt.

Einige Bemerkungen zu den genannten Lösungsverfahren des inkompressiblen Problems.

Im Zusammenhang mit der Diskretisierung werden beim u-p-Verfahren die unabhängig variable Verschiebungsgeschwindigkeit und der Druck  $p$  über die jeweiligen Matrizen der Ansatzfunktionen  $N^v$ ,  $N^p$  durch den Vektor der Knotengeschwindigkeiten  $a^v$  bzw. durch den Druck in den Knotenpunkten  $a^p$  ausgedrückt.

$$v = N^v \cdot a^v \quad p = N^p \cdot a^p$$

Hiermit liefert die virtuelle Arbeitsgleichung nach (5) folgende Steifigkeitsgleichung (8) für den Vektor der Knotengeschwindigkeiten und den isotropen Druck in noch zweckmäßiger Weise auszuwählenden Knotenpunkten, wobei außerdem mögliche Massenkräfte unberücksichtigt blieben.

$$K a^v + K^p a^p + f^v = 0 \quad (8)$$

$K$  gewöhnliche Steifigkeitsmatrix aus dem deviatorischen Spannungszustand

$K^p$  Druckmatrix infolge des isotropen Druckes

$f^v$  Kräftematrix (Volumen- und Oberflächenkraft)

$$K = K_{ij} = \int_v B_i^T D' B_j dV$$

$$K^p = K_{ij}^p = - \int_v B_i^T \cdot m \cdot N_j^p dV$$

$$f^v = - \int_v (N_i^v)^T f_{vo} dV - \int_A (N_i^v)^T f_A dA$$

Die zur Bestimmung des Vektors der Knotengeschwindigkeiten und des isotropen Druckes in den Knotenpunkten notwendige zweite Matrixgleichung folgt aufgrund der geforderten Zwangsbedingung aus dem Forma-

lismus des Galerkin-Verfahrens, indem man die mit dem Druckansatz  $p = N^p \delta a^p$  multiplizierte Kontinuitätsgleichung für den Fall der Inkompressibilität integriert und null setzt.

$$\int_v (\delta p)^T \cdot \underline{\epsilon}_v dV = (\delta a^p)^T \int_v (N^p)^T \cdot \underline{\epsilon}_v dV = 0$$

Hieraus folgt mit

$$\epsilon_v = m^T L v = m^T L N^v \cdot a^v = m^T B a^v$$

$$(K^p)^T a^v = 0, \quad (9)$$

wobei

$$(K^p)^T = \int_v (N^p)^T m^T B dV$$

die schon genannte Druckmatrix darstellt.

Die Steifigkeitsgleichung (8) und die aus der Kontinuitätsbeziehung resultierende Gleichung (9) lassen sich in der Matrixgleichung (10) zusammenfassen,

$$\begin{bmatrix} K & K^p \\ K^p{}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a^v \\ a^p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

bzw. in kompakter Form geschrieben (10)

$$K_{(a)} a + f = 0$$

Die Matrixgleichungen (10) nehmen für den ebenen Deformationszustand und den axialsymmetrischen Spannungszustand folgendes Aussehen an.

ebener Def.

$$\int_v \begin{bmatrix} \mu (2 N_{i,x}^v N_{j,x}^v + N_{i,y}^v N_{j,y}^v) & \mu N_{i,y}^v N_{j,x}^v & -N_{i,x}^v N_j^p \\ \mu N_{i,x}^v N_{j,y}^v & \mu (2 N_{i,y}^v N_{j,y}^v + N_{i,x}^v N_{j,x}^v) & -N_{i,y}^v N_j^p \\ -N_{i,x}^v N_j^p & -N_{i,y}^v N_j^p & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_x^v \\ a_y^v \\ a^p \end{pmatrix} dV - \int_A [N_i^v N_i^v] \begin{pmatrix} f_{ox} \\ f_{oy} \end{pmatrix} dA = 0$$

axialsymmetr.

$$\int_v \begin{bmatrix} \mu [2 (N_{i,r}^v N_{j,r}^v + \frac{N_i^v}{r} \frac{N_j^v}{r}) + N_{i,z}^v N_{j,z}^v] & \mu N_{i,z}^v N_{j,r}^v & -N_j^p (N_{i,r}^v + \frac{N_i^v}{r}) \\ \mu N_{i,r}^v N_{j,z}^v & \mu (2 N_{i,z}^v N_{j,z}^v + N_{i,r}^v N_{j,r}^v) & -N_{j,z}^v N_j^p \\ -N_j^p (N_{i,r}^v + \frac{N_i^v}{r}) & -N_{i,z}^v \cdot N_j^p & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_r^v \\ a_z^v \\ a^p \end{pmatrix} dV$$

$$- \int_A [N_i^v \cdot f_{or} + N_i^v \cdot f_{oz}] dA = 0$$

Soweit stellen die Gleichungen (10) das Analogon zur Lagrang'schen Form der inkompressiblen elastischen Gleichungen dar. Im Zusammenhang mit der FEM-Discretisierung ist hierbei zu beachten, daß genügend Freiheitsgrade zur Beschreibung eines realistischen Geschwindigkeitsfeldes verfügbar sind, um die Nebenbedingungen ( $p$  als Lagrange'sche Multiplikatorvariable) zu erfüllen.

Verschiedene Autoren [3], [4], [5], führen an, daß sich nur dann Lösungen angeben lassen, wenn für die Formfunktion des Druckansatzes folgende Bedingungen eingehalten werden:

Der Polynomansatz für  $p$  muß um mindestens eine Ordnung niedriger sein als der Ansatz für  $v$ .

Der Polynomansatz für  $p$  darf höchstens eine lineare Funktion sein.

Die mit dem u-p-Algorithmus realisierten Rechnungen haben zu instabilen Gleichungssystemen geführt.

Eine weitere Lösungsmöglichkeit besteht darin, die Inkompressibilität nicht in jedem Integrationspunkt, sondern entweder

im Durchschnitt über das Element oder  
im Durchschnitt über das gesamte Gebiet

zu erfüllen.

Beide Ansätze führen dazu, daß die Inkompressibilität zwar im Durchschnitt erfüllt wird, aber örtlich erheblich gestört sein kann [6].

Das Gleichungssystem ist hiernach nur dann lösbar, wenn auf eine vollkommene Inkompressibilität verzichtet wird. Ein entsprechender Algorithmus ist das Penalty-Verfahren.

Dabei wird  $\nabla^T u = \frac{p}{\alpha}$  gesetzt. Die Zahl  $\alpha$  sollte so groß gewählt werden, daß  $\nabla^T u$  gegen Null geht. Aus einem formalen Vergleich mit der Elastizitätstheorie folgt hierfür:

$$\alpha = K - \frac{2}{3} \mu$$

$K$  Kompressionsmodul

Damit folgt aus dem Gleichungssystem (10) die Iterationsvorschrift (11).

$$(K + K^P \alpha K^P)^T a^{v(m+1)} = f \quad (11)$$

$$K^P = \int_v B^T m dV$$

Wird  $\alpha$  sehr groß gewählt (für  $\nu = 0,49995$  wird  $\frac{\alpha}{\mu} = 9999$ ), so hat die Iteration nur die Aufgabe einer Regularisierung. Für kleine  $\alpha$ -Werte sind dann entsprechend viele Iterationsschritte für eine inkompressible Lösung notwendig.

Dieses Verfahren hat gegenüber dem u-p-Ansatz zwei entscheidende Vorteile:

1. Pro Knoten existieren nur 2 statt 3 Freiheitsgrade.

Dadurch verringert sich der Speicherplatz auf ca.  $\frac{2}{3}$  gegenüber dem u-p-Ansatz

2. Durch den Wegfall jeder 3. Gleichung verringert sich die Rechenzeit.

Obwohl der Penalty-Ansatz stets zu divergenzfremden Lösungen führt, müssen die assoziierten Geschwindigkeitsverteilungen nicht immer mit physikalisch möglichen Feldern verträglich sein. Dies liegt an der sehr unterschiedlichen Größenordnung der Faktoren im Produkt  $\alpha \cdot \nabla^T u$ .

Diese Schwierigkeiten lassen sich umgehen, wenn in die Iterationsvorschrift die Berechnung des isotropen Druckes  $p$  aufgenommen wird. Der entsprechende Algorithmus wurde von [7] angegeben:

$$(K + K^P \beta K^P)^T a^{v(m+1)} = f - K^P a^{p(m)} \quad (12)$$

$$a^{p(m+1)} = a^{p(m)} + \beta K^P a^{v(m+1)}$$

Dabei sind für die Berechnung des isotropen Druckes die gleichen Bedingungen zu erfüllen, wie sie bereits für den u-p-Ansatz dargelegt wurden.

Der Wert  $\beta$  sollte dabei so groß gewählt werden, daß bei der Berechnung von  $\nabla^T u$  nicht die Differenz zweier gleich großer Zahlen gebildet werden muß.

Für  $\frac{\beta}{\mu} = 10$  wird beispielsweise  $\nu = 0,454$  und für

$$\frac{\beta}{\mu} = 100 \text{ ergibt sich } \nu = 0,495.$$

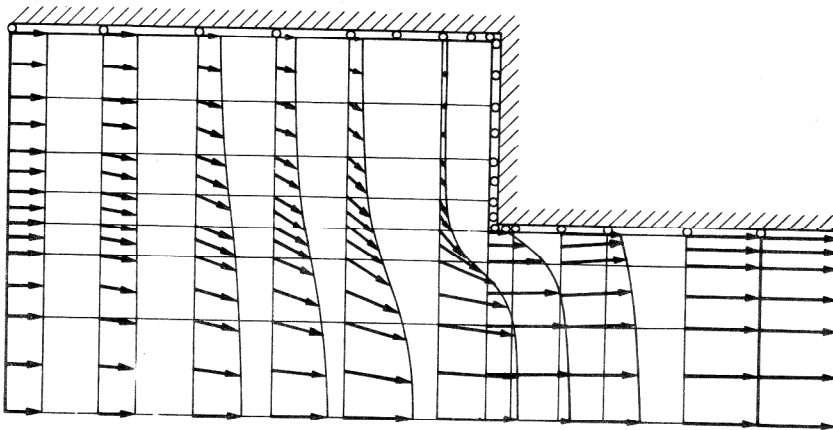
Mit der Lösung des inkompressiblen elastischen Problems nach einer der genannten Techniken liegt aufgrund der erwähnten Analogie die Lösung des ebenen bzw. axialsymmetrischen, inkompressiblen, viskosen Fließens vor, die den Startvektor für das Iterationsverfahren zur Lösung der viskoplastischen Aufgabe nach Schlüssler darstellt. Aus dem jeweiligen Gleichungssystem (10), (11) oder (12), das nun für die gesamte vernetzte Struktur aufzuschreiben ist, ergibt sich unter Beachtung der Randbedingungen der Vektor der Knotengeschwindigkeiten.

Daraus berechnet man mit dem Geschwindigkeitsfeld die 2. Invariante der Verzerrungsgeschwindigkeiten, die für den ebenen Deformationszustand und den axialsymmetrischen Spannungszustand angegeben ist, und baut mit der Schubfließspannung die Stoffmatrix  $D^0$  für den 1. Iterationsschritt auf. Die neue Stoffmatrix findet über die gewöhnliche Steifigkeitsmatrix Berücksichtigung im obigen Gleichungssystem. dessen Lösung unter der Randbedingung einen korrigierten Vektor der Knotengeschwindigkeiten  $a^1$  liefert.

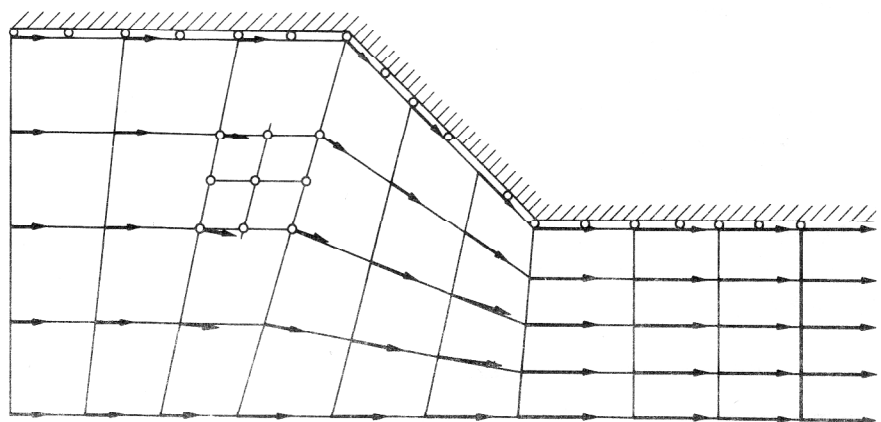
Dieser bildet wiederum die Basis für eine weitere, verbesserte Stoffmatrix, die im fortgesetzten Wechsel mit der Lösung des Gleichungssystems sukzessive die Geschwindigkeitsdifferenzen von Schritt zu Schritt kleiner werden läßt, bis eine gewünschte Genauigkeitsmarke  $\epsilon$  nicht mehr überschritten wird. Die allgemeine Iterationsvorschrift zeigt die Formel.

$$a^{m+1} = - (K_{(a^m)})^{-1} \cdot f \quad (14)$$

$$\Delta a = a^{v+1} - a^v \leq \epsilon$$



**Bild 1**  
Viskoplastisches Vorwärtsfließpressen mit plötzlicher Querschnittsänderung und 50 % Dickenreduktion



**Bild 2**  
Viskoplastisches Vorwärtsfließpressen mit 50 % Dickenreduktion

Die Bilder 1 und 2 zeigen numerisch ermittelte Geschwindigkeitsverteilungen für den ebenen Deformationszustand eines viskoplastischen Materials (superplastische Blei-Zinn-Legierung). Dabei zeigte es sich, daß nach wenigen Iterationsschritten (5 – 8 Schritte) der Lösungszuwachs in einer Größenordnung von  $10^{-5}$  lag.

- [6] Thompson, E. G.: Average and Complete Incompressibility in the Finite Element Method. Intern. Journ. for Num. Meth. in Engineering, Vol. 9, 925 – 932, (1975).
- [7] Girault, V., P.-A. Raviart: Finite Elemente Approximation of the Navier-Stokes Equations, Lecture Notes in Mathematics 749. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1979, S. 85.

#### LITERATUR

- [1] Schlüssler, K. H.: Zweidimensionale Theorie des Walzvorganges, Freiburger Forschungshefte, Metallverformung zur Mechanik des ebenen Walzens, B 94. VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie Leipzig 1964.
- [2] Zienkiewicz, O. C.: The Finite Element Methode, 3-rd Edition, MC-Craw Hill London, 1977.
- [3] Zienkiewicz, O. C., P. N. Godbole: Flow of Plastic and Viscoplastic Solids with Special Reference to Extrusion and Forming Process, Intern. Journ. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 8, 3 – 16, (1974).
- [4] Herrmann, L. R.: Elasticity Equations form Incompressible and Nearly Incompressible Materials by Variational Theorem, AIAA Journal, Vol. 3, No. 10.
- [5] Gründemann, H.: Zur numerischen Realisierung thermo-mechanischer Probleme bei Metallverformungsvorgängen mittels FEM. Problemseminar Finite Elemente III, Gaußig, 19. – 23. Januar 1981.

Anschrift der Verfasser:  
Prof. Dr.-Ing. habil. H. Gläser  
Dipl.-Ing. R. Vogel  
Technische Hochschule  
Sektion Maschinen-Bauelemente  
9010 Karl-Marx-Stadt  
PSF 964