

# Zum Ansatz von Coles für das Geschwindigkeitsprofil turbulenter Wandgrenzschichten

Hans Grützner

## 1. Das Geschwindigkeitsprofil nach Coles

Für den wandnahen, aber immerhin bis ins Gebiet vollausgebildeter Turbulenz reichenden Teil einer turbulenten Wandgrenzschicht kann man annehmen (vgl. z. B. [1]), daß das Profil  $u = u(y)$  der mittleren Geschwindigkeit  $u$  nur von der Wandschubspannung  $\tau_w$ , der Dichte  $\rho$  und der kinematischen Zähigkeit  $\nu$  des strömenden Mediums abhängt. Dabei ist  $y$  der Wandabstand. Man kann also erwarten, daß

$$u = f_w(y; \tau_w, \rho, \nu) \quad (1)$$

mit  $u = 0$  für  $y = 0$  an der Wand. In dimensionsloser Schreibweise bedeutet dies, daß

$$\frac{u}{u_\tau} = f_w\left(\frac{yu_\tau}{\nu}\right) = f_w(y^+), \quad (2)$$

wobei  $f_w$  nach den Gesetzen der Dimensionsanalyse notwendigerweise eine universelle Funktion ist.  $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$

ist die sogenannte Schubspannungsgeschwindigkeit,  $y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu}$  der dimensionslose Wandabstand.

Bei (2) handelt es sich um das bekannte Wandgesetz turbulenter Grenzschichten, das vielfach experimentell bestätigt ist. Für  $f_w$  gilt dabei:

$$\frac{u}{u_\tau} = f_w(y^+) = \begin{cases} y^+ & \text{im Gebiet (I) für } 0 \leq y^+ \leq 5 \\ \dots & \text{im Gebiet (II) für } 5 \leq y^+ \leq 50 \\ \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C & \text{im Gebiet (III) für } 50 \leq y^+ \end{cases} \quad (3)$$

Das Gebiet (I) ist die sogenannte viskose Unterschicht, (III) ist der wandnahe vollturbulente Teil der Grenzschicht und (II) ist das sogenannte Übergangsgebiet, in dem sich kein einfacher analytischer Ausdruck für  $f_w$  angeben läßt.  $\kappa$  und  $C$  sind experimentell zu bestimmende Konstanten. Sie können zu  $\kappa = 0,4$  und  $C = 5,1$  genommen werden (vgl. z. B. [2], S. 97).

Es ist interessant, das Wandgesetz (2) einmal im Hinblick auf die zwei Grenzfälle  $u_\tau \rightarrow \infty$  und  $u_\tau \rightarrow 0$  zu betrachten. Für  $u_\tau \rightarrow \infty$  und endliche Werte von  $u$  und  $y$  wird einmal  $y^+ \rightarrow \infty$  und damit nach (3) auch  $f_w(y^+) =$

$\frac{u}{u_\tau} \rightarrow \infty$ ; andererseits liefert (2) aber auch  $\frac{u}{u_\tau} \rightarrow 0$ . Das Wandgesetz (2) führt also für  $u_\tau \rightarrow \infty$  zu einem Widerspruch, der physikalisch so gedeutet werden muß, daß in

turbulenten Wandgrenzschichten keine unbegrenzt großen Wandschubspannungen  $\tau_w$  auftreten können. Und in der Tat treten i. allg. die größeren Wandschubspannungen auch immer am Anfang einer jeden Grenzschichtentwicklung auf, dort wo die Grenzschicht noch laminar ist.

Für  $u_\tau \rightarrow 0$  führt das Wandgesetz (2) ebenfalls zu einem Widerspruch. Bei endlichen Werten  $u$  und  $y$  wird mit

$$u_\tau \rightarrow 0 \text{ auch } f_w(y^+) = \frac{u}{u_\tau} \rightarrow 0, \text{ während andererseits } \frac{u}{u_\tau} \rightarrow \infty \text{ sein soll. Das Wandgesetz (2) sagt also aus, daß}$$

für  $u_\tau \rightarrow 0$  kein turbulentes Geschwindigkeitsprofil vom Charakter des Wandgesetzes existiert. (Es ist interessant, daß sich diese Aussagen für die beiden genannten Grenzfälle aus der dimensionslosen Darstellung (2) des Wandgesetzes ableiten lassen, während sie aus der dimensionsbehafteten Schreibweise (1) nicht ohne weiteres ablesbar sind!)

Nun sind allerdings turbulente Wandgrenzschichtprofile mit  $u_\tau \rightarrow 0$  durchaus physikalisch real. Es sind dies die ablösungsnahen Profile einer turbulenten Wandgrenzschicht. Der Widerspruch des Wandgesetzes (2) für  $u_\tau \rightarrow 0$  ist daher physikalisch unbefriedigend. Ein Ansatz, der diesen Widerspruch behebt und der darüber hinaus nicht nur den wandnahen Teil des Geschwindigkeitsprofils, sondern in vielen Fällen das gesamte turbulente Grenzschichtprofil beschreibt, stammt von Coles [3].

Coles erweiterte das Wandgesetz (2) um das sogenannte Nachlaufgesetz (wake law) zu

$$\frac{u}{u_\tau} = f_w\left(\frac{yu_\tau}{\nu}\right) + \frac{P}{\kappa} \cdot w\left(\frac{y}{\delta}\right). \quad (4)$$

Darin ist  $P$  mit  $0 \leq P \leq \infty$  ein zusätzlicher dimensionsloser Parameter und  $w\left(\frac{y}{\delta}\right)$  eine universelle, im Definitionsbereich  $0 \leq \frac{y}{\delta} \leq 1$  überall positive normierte Funktion von S-förmiger Gestalt.  $\delta$  bedeutet die Dicke der Grenzschicht. Für  $w\left(\frac{y}{\delta}\right)$  gilt definitionsgemäß:

$$w(0) = 0, \quad w(1) = 2, \quad (5)$$

$$\int_0^1 w\left(\frac{y}{\delta}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = 1 \quad \text{bzw.} \quad \int_0^2 \frac{y}{\delta} dw = 1.$$

Den genauen Verlauf von  $w\left(\frac{y}{\delta}\right)$  gewann Coles aus der Untersuchung einer Vielzahl damals vorliegender Meß-

ergebnisse. Eine Tabelle der Funktionswerte  $w\left(\frac{y}{\delta}\right)$  findet sich in [3], eine graphische Darstellung der Funktion  $w\left(\frac{y}{\delta}\right)$  auch in [2], S. 99. Es lassen sich aber auch analytische Näherungsausdrücke für  $w\left(\frac{y}{\delta}\right)$  angeben (vgl. z. B. [4] bis [8]). Coles selbst wählt in [9], S. 5:

$$w\left(\frac{y}{\delta}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{\delta}\right).$$

Der gleiche Ausdruck findet sich auch bei Rotta in [10], S. 243. In (4) ist jetzt auch das turbulente Ablöseprofil enthalten. Es ergibt sich für  $u_\tau \rightarrow 0$  aus (4) wegen (5) zu

$$\frac{u}{u_\delta} = \frac{1}{2} w\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad (6)$$

$$\text{wenn } P \rightarrow \frac{\kappa}{2} \frac{u_\delta}{u_\tau} \rightarrow \infty, \text{ da } f_w\left(\frac{yu_\tau}{\nu}\right) \rightarrow 0.$$

$u_\delta$  ist die Geschwindigkeit am Grenzschichttrand  $\delta$ . Damit ist in der Tat der Widerspruch des Wandgesetzes (2) für  $u_\tau \rightarrow 0$  durch den Ansatz (4) von Coles beseitigt, wobei allerdings notwendigerweise  $P \rightarrow \infty$  sein muß. In diesem Falle verschwindet gemäß (6) in (4) der Anteil des Wandgesetzes (2) gegenüber dem des Nachlaufgesetzes. Der Widerspruch des Wandgesetzes (2) für  $u_\tau \rightarrow \infty$  ist dagegen auch noch in (4) enthalten. Das heißt auch (4) gilt nur für nicht allzu große  $u_\tau$ -Werte, was aber – wie bereits erwähnt – physikalisch durchaus sinnvoll ist.

In dimensionsbehafteter Schreibweise stellt (4) das Geschwindigkeitsprofil  $u = u(y)$  in Abhängigkeit von den vier Größen  $u_\tau, \delta, \nu, P$  dar:

$$u = f_c(y; u_\tau, \delta, \nu, P). \quad (7)$$

Gemäß den Aussagen der Dimensionsanalyse läßt sich diese 4-Parametrigkeit hier auf eine 2-Parametrigkeit in dimensionsloser Schreibweise reduzieren. In (4) tritt dieser Zusammenhang bereits in der Form

$$\frac{u}{u_\tau} = f_c\left(\frac{yu_\tau}{\nu}, \frac{y}{\delta}, P\right)$$

auf. Aber es können auch beliebige andere Potenzprodukte obiger dimensionsloser Ausdrücke gebildet werden. So sind z. B. auch die Schreibweisen

$$\frac{u}{u_\tau} = f_c\left(\frac{yu_\tau}{\nu}; \delta^+, P\right), \quad (8)$$

$$\frac{u}{u_\tau} = f_c\left(\frac{y}{\delta}; \delta^+, P\right) \quad (9)$$

möglich. Dabei wurde in (8) und (9) entsprechend  $y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu}$  abkürzend gesetzt:

$$\delta^+ = \frac{\delta u_\tau}{\nu}. \quad (10)$$

Die den Beziehungen (8) und (9) entsprechenden Schreibweisen des Geschwindigkeitsprofils (4) nach Coles sind:

$$\frac{u}{u_\tau} = f_w(y^+) + \frac{P}{\kappa} w\left(\frac{y^+}{\delta^+}\right), \quad (11)$$

$$\frac{u}{u_\tau} = f_w\left(\frac{y}{\delta} \cdot \delta^+\right) + \frac{P}{\kappa} w\left(\frac{y}{\delta}\right).$$

Es kann also festgehalten werden: Der Ansatz von Coles für die Geschwindigkeitsprofile turbulenter Wandgrenschichten hängt in dimensionsbehafteter Schreibweise von vier Größen ab, in dimensionsloser Schreibweise dagegen nur von zwei Kennzahlen.

## 2. Das Reibungsgesetz als Folgerung aus dem Geschwindigkeitsprofil

Das dimensionsbehaftete Geschwindigkeitsprofil  $u = u(y)$  ist also nach Coles gemäß (7) durch die vier Größen  $u_\tau, \delta, \nu, P$  vollständig bestimmt. Dann liegen damit aber auch alle anderen Größen, die man aus einem Geschwindigkeitsprofil ableiten kann, in Abhängigkeit von den gleichen vier Größen fest (vgl. [10], S. 244). Dies gilt also auch für die Geschwindigkeit

$$u_\delta = u(\delta) \quad (12)$$

am Grenzschichttrand  $\delta$ . Für  $u_\delta$  muß daher ein eindeutiger Zusammenhang

$$u_\delta = f_c(\delta; u_\tau, \delta, \nu, P) = r_c(\delta, u_\tau, \nu, P) \quad (13)$$

existieren. Dieser Zusammenhang sagt dann aber auch aus, daß von den fünf Größen in (13) nur jeweils vier (innerhalb vernünftiger Gültigkeitsgrenzen) voneinander unabhängig vorgegeben werden dürfen; die fünfte ist durch (13) zu bestimmen!

Natürlich läßt sich auch der Zusammenhang (13) wieder in dimensionsloser Form darstellen. So liefert die Dimensionsanalyse aus (13) z. B. eine eindeutig festliegende Relation

$$\frac{u_\tau}{u_\delta} = r_c(\delta^+, P). \quad (14)$$

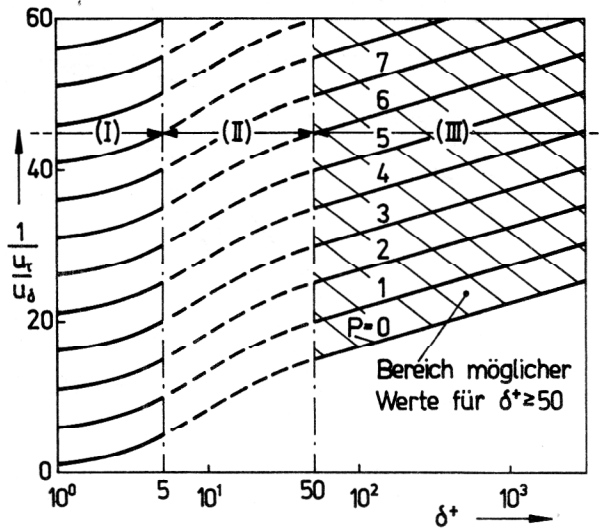
Diese Beziehung – und damit auch (13) – soll als das zum Geschwindigkeitsprofil von Coles gehörende Reibungsgesetz bezeichnet werden. Gleichung (14) besagt, daß wiederum mit jeweils zwei der drei dimensionslosen

Parameter  $\frac{u_\tau}{u_\delta}, \delta^+, P$  auch der dritte festliegt. Dabei ergibt sich für (14) aus (11) wegen (12) und (5):

$$\frac{1}{u_\tau/u_\delta} = f_w(\delta^+) + \frac{2}{\kappa} P \quad (15)$$

mit  $f_w(\delta^+)$  gemäß (3).

Das zum Profil von Coles gehörende Reibungsgesetz der Form (15) ist in Bild 1 dargestellt. Die physikalisch sinnvolle und bereits erwähnte obere Begrenzung für die dimensionslose Wandschubspannung  $u_\tau/u_\delta$  ist darin deutlich zu erkennen. So ergibt sich z. B. unter der Annahme, daß für  $P = 0$  mehr als gerade nur der Grenzschicht-



**Bild 1**  
Das zum Profilansatz von Coles gehörende Reibungsgesetz in der Form  $(u_\tau/u_\delta)^{-1} = r_c(\delta^+; P)$  mit  $P$  als Parameter

rand  $y = \delta$  dem vollturbulenten Gebiet (III) des Wandgesetzes (3) angehören soll (vgl. auch [11]):

$$u_\tau/u_\delta < 0,0672 \quad \text{für } \delta^+ > 50, P = 0. \quad (16)$$

Man erkennt weiter aus Bild 1, daß nach Coles vollturbulente Profile für  $P > 0$  noch kleinere Reibungsbeiwerte  $u_\tau/u_\delta$  als nach (16) aufweisen. Für das Ablöseprofil (6) selbst gilt

$$u_\tau/u_\delta \rightarrow 0, \quad \delta^+ \rightarrow 0, P \rightarrow \infty.$$

Das Reibungsgesetz (14) bzw. (15) läßt sich noch ohne Veränderung seiner physikalischen Aussage in andere Formen bringen. Denn die in ihm vorkommenden Kennzahlen können wieder durch beliebige aus ihnen selbst gebildete Potenzprodukte ersetzt werden. So kann z. B. wegen (10) durch Bildung von

$$\frac{\delta^+}{u_\tau/u_\delta} = \frac{u_\delta \cdot \delta}{\nu} = Re_\delta \quad (17)$$

die wenig gebräuchliche Kennzahl  $\delta^+$  durch die gebräuchliche Reynoldszahl  $Re_\delta$  ersetzt werden. Es ergibt sich so mit (17) aus (14) ein Reibungsgesetz der Form

$$\frac{u_\tau}{u_\delta} = r_c(Re_\delta, P)$$

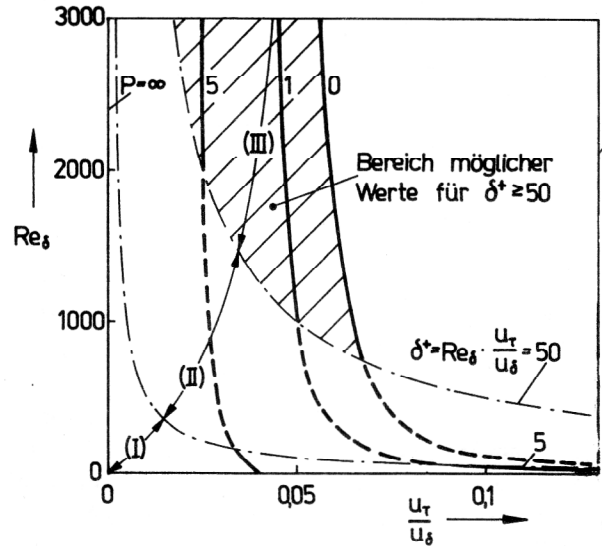
und entsprechend aus (15)

$$\frac{1}{u_\tau/u_\delta} = f_w(Re_\delta \cdot \frac{u_\tau}{u_\delta}) + \frac{2}{\kappa} P. \quad (18)$$

Die sich aus (18) ergebende Abhängigkeit  $Re_\delta = r_c(u_\tau/u_\delta, P)$  ist in Bild 2 mit  $P$  als Scharparameter dargestellt. Wiederum kommt für  $\delta^+ \geq 50$  die obere Begrenzung der Reibungsbeiwerte  $u_\tau/u_\delta$  deutlich zum Ausdruck. Man sieht aber auch, daß für Grenzschichten, die das vollturbulente Gebiet (III) des Wandgesetzes enthalten, die zugehörige Reynoldszahl  $Re_\delta$  nicht unbegrenzt klein werden kann. So muß z. B. für das Wandgesetz allein ( $P = 0$ ) neben (16) auch

$$Re_\delta > 744 \quad \text{für } \delta^+ > 50; P = 0 \quad (19)$$

erfüllt sein. Für  $P > 0$  werden noch größere Werte für  $Re_\delta$  als nach (19) gefordert. Das Ablöseprofil (6) selbst enthält allerdings keinen Anteil des Wandgesetzes mehr, so daß daraus auch formal keine Beschränkung für  $Re_\delta$  folgt.



**Bild 2**  
Das zum Profilansatz von Coles gehörende Reibungsgesetz in der Form  $Re_\delta = r_c(u_\tau/u_\delta; P)$  mit  $P$  als Parameter

### 3. Andere Darstellungen des Geschwindigkeitsprofils von Coles

#### 3.1. Umformungen mit Hilfe des Reibungsgesetzes

Mit Hilfe des Reibungsgesetzes (13) kann jede der fünf Größen  $u_\delta, u_\tau, \delta, \nu, P$  durch die vier übrigen ausgedrückt werden. Das bedeutet aber auch, daß in dem Profilansatz (4) von Coles jede der Größen  $u_\tau, \delta, \nu, P$  eliminiert werden kann. Damit werden im Prinzip vier weitere dimensionsbehaftete Darstellungen des Geschwindigkeitsprofils von Coles möglich:

$$u = f_c(y; u_\delta, \delta, \nu, P), \quad (20)$$

$$u = f_c(y; u_\delta, u_\tau, \nu, P), \quad (21)$$

$$u = f_c(y; u_\delta, u_\tau, \nu, \delta), \quad (22)$$

$$u = f_c(y; u_\delta, u_\tau, P, \delta), \quad (23)$$

wobei zu beachten ist, daß die jeweils eliminierte Größe durch (13) ebenfalls festliegt. Die zugehörigen dimensionslosen Darstellungen sind

$$\frac{u}{u_\delta} = f_c\left(\frac{y}{\delta}; Re_\delta, P\right),$$

$$\frac{u}{u_\delta} = f_c\left(\frac{yu_\tau}{\nu}; \frac{u_\tau}{u_\delta}, P\right) \quad \text{oder} \quad \frac{u}{u_\tau} = f_c\left(\frac{yu_\tau}{\nu}; \frac{u_\tau}{u_\delta}, P\right),$$

$$\frac{u}{u_\delta} = f_c\left(\frac{y}{\delta}; \frac{u_\tau}{u_\delta}, Re_\delta\right) \quad \text{oder} \quad \frac{u}{u_\tau} = f_c\left(\frac{y}{\delta}; \frac{u_\tau}{u_\delta}, Re_\delta\right), \quad (24)$$

$$\frac{u}{u_\delta} = f_c\left(\frac{y}{\delta}; \frac{u_\tau}{u_\delta}, P\right) \quad \text{oder} \quad \frac{u}{u_\tau} = f_c\left(\frac{y}{\delta}; \frac{u_\tau}{u_\delta}, P\right),$$

wobei hier nur gebräuchliche Kennzahlen ausgewählt wurden. Aus den obigen Profildarstellungen kann natürlich auch wieder das Reibungsgesetz (13) gefolgert werden. Denn ermittelt man  $u_\tau$  aus (20) gemäß

$$u_\tau = \sqrt{\nu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0}}, \quad (25)$$

$\delta$  aus (21) gemäß

$$\delta = y(u_\delta), \quad (26)$$

$P$  aus (22) gemäß

$$P = \frac{\kappa}{2u_\tau} \left[ u_\delta - u_\tau \cdot f_w \left( \frac{\delta u_\tau}{\nu} \right) \right], \quad (27)$$

$\nu$  aus (23) gemäß

$$\nu = \frac{u_\tau^2}{\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0}}, \quad (28)$$

so ergibt sich stets das Reibungsgesetz (13), was in (27) schon direkt zum Ausdruck kommt. Wendet man dagegen die Definitionen (25) bis (28) und auch (12) auf eine der Profildarstellungen (7), (20) bis (23) an, wenn die betreffende Größe darin bereits als Parameter enthalten ist, so ergeben sich folgerichtig Identitäten, aber keine neuen Aussagen.

Als Beispiel soll hier noch die der Schreibweise (24) entsprechende Form des Profils nach Coles angeführt werden. Aus (4) und (15) folgt

$$\frac{u}{u_\delta} = \frac{u_\tau}{u_\delta} \left\{ f_w \left( \frac{y}{\delta} \cdot \frac{u_\tau}{u_\delta} \cdot Re_\delta \right) + \frac{1}{2} \left[ \frac{u_\delta}{u_\tau} - f_w \left( \frac{u_\tau}{u_\delta} \cdot Re_\delta \right) \right] \cdot w \left( \frac{y}{\delta} \right) \right\} \quad (29)$$

mit  $f_w$  nach (3). Bild 3 zeigt die sich aus (29) z. B. für  $Re_\delta = 20\,000$  ergebende Schar möglicher Profile mit  $u_\tau/u_\delta$  als Parameter. Die zugehörigen Werte von  $P$  ergeben sich aus (18). Der größtmögliche Reibungsbeiwert beträgt  $u_\tau/u_\delta = 0,0452$ . Er ergibt sich aus (18) für  $P = 0$ .

Es soll noch bemerkt werden, daß hier die Überlegungen zu den verschiedenen Schreibweisen des Profilsansatzes von Coles bewußt anhand der dimensionsbehafteten Gleichungen durchgeführt wurden. Die Verhältnisse bleiben dabei übersichtlich. So könnte es bei der formalen Überführung eines dimensionslos angeschriebenen Profils in eine andere dimensionslose Schreibweise durchaus vorkommen, daß nach dem Umschreiben alle fünf Größen  $\delta$ ,  $u_\delta$ ,  $u_\tau$ ,  $\nu$ ,  $P$  in der neuen Darstellung enthalten sind. Schreibt man z. B. das Reibungsgesetz mit Hilfe von (14) und (17) in der Form

$$\delta^+ = r_c(Re_\delta, P)$$

und eliminiert mit seiner Hilfe  $\delta^+$  aus dem Profil (9), so erhält man formal

$$\frac{u}{u_\tau} = f_c \left( \frac{y}{\delta}; Re_\delta, P \right),$$

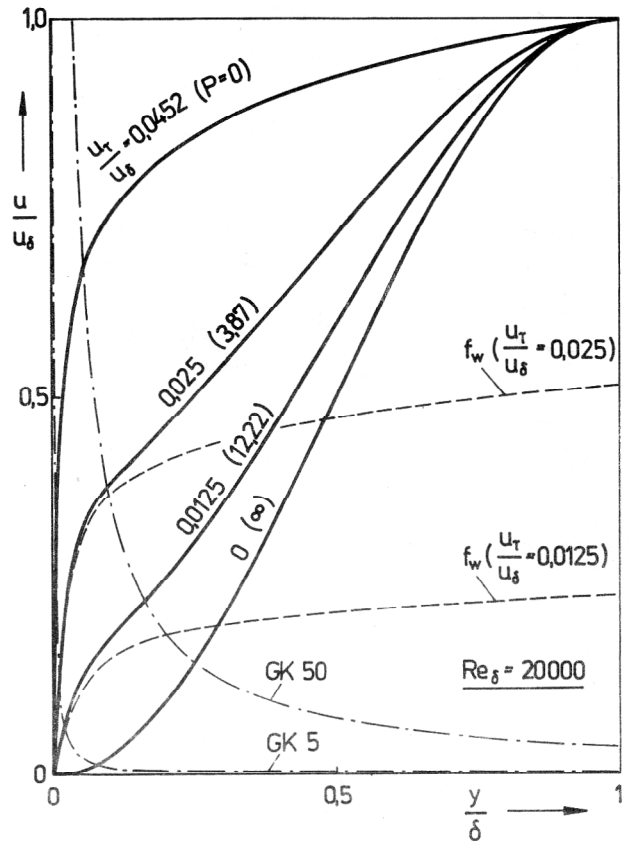


Bild 3

Die Schar möglicher Profile  $u/u_\delta = f_c(y/\delta)$  nach Coles mit  $u_\tau/u_\delta$  bzw.  $P$  als Parameter für  $Re_\delta = 20\,000$

$$\text{GK 50} \dots \text{Grenzkurve } \frac{y}{\delta} \cdot \frac{u}{u_\delta} = \frac{50}{Re_\delta} \cdot f_w(50) = \frac{744}{Re_\delta} \text{ fürs Wandgesetz}$$

$$\text{GK 5} \dots \text{Grenzkurve } \frac{y}{\delta} \cdot \frac{u}{u_\delta} = \frac{5}{Re_\delta} \cdot f_w(5) = \frac{25}{Re_\delta} \text{ fürs Wandgesetz}$$

was aber einer dimensionsbehafteten Schreibweise

$$u = f_c(y; \delta, u_\delta, u_\tau, \nu, P)$$

gleichkommt. Darin sind dann aber natürlich nicht alle fünf Parameter frei vorgebar, sondern nur vier. Der fünfte ist aus dem Reibungsgesetz zu ermitteln. – In der dimensionsbehafteten Schreibweise käme man zu einem solchen Resultat, wenn man eine mehrfach in dem Profilsatz auftretende Größe nicht überall durch die aus dem Reibungsgesetz folgende Relation ersetzen würde. Die Fragwürdigkeit des Vorgehens tritt hier also offen zutage.

### 3.2. Das Geschwindigkeitsprofil nach Coles in der Form des Außengesetzes

Die Geschwindigkeitsprofile einer turbulenten Grenzschicht werden auch noch sehr häufig in der Form des sogenannten Außengesetzes (velocity defect law)

$$\frac{u_\delta - u}{u_\tau} = F \left( \frac{y}{\delta}; P_1, P_2, \dots \right) \quad (30)$$

dargestellt (vgl. z. B. [10], S. 226), worin die  $P_1, P_2, \dots$

irgendwelche Parameter bedeuten. Anders geschrieben bedeutet das Außengesetz (30), daß das Profil dargestellt wird als

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{u_\delta}{u_\tau} - F\left(\frac{y}{\delta}; P_1, P_2, \dots\right)$$

bzw. in dimensionsbehafteter Schreibweise als

$$u = u_\delta - u_\tau \cdot F\left(\frac{y}{\delta}; P_1, P_2, \dots\right)$$

Das Außengesetz (30) verlangt also eine dimensionsbehaftete Profildarstellung, in der  $\delta$ ,  $u_\delta$  und  $u_\tau$  als Parameter enthalten sind. Für die Aufgabe, das Profil von Coles in die Form des Außengesetzes zu bringen, kommen daher von den bisher angegebenen Profildarstellungen nur die Schreibweisen (22) und (23) in Frage, wenn nur voneinander unabhängige Größen als Parameter auftreten sollen.

Das bedeutet, daß sich für den Profilansatz von Coles Außengesetze der Form

$$\frac{u_\delta - u}{u_\tau} = F_c\left(\frac{y}{\delta}; \frac{u_\tau}{u_\delta}, Re_\delta\right) = F_c\left(\frac{y}{\delta}; \frac{u_\tau}{u_\delta}, \delta^+\right)$$

und

$$\frac{u_\delta - u}{u_\tau} = F_c\left(\frac{y}{\delta}; \frac{u_\tau}{u_\delta}, P\right) \quad (31)$$

ergeben. Es läßt sich also feststellen, daß die Geschwindigkeitsprofile von Coles auch in der Form des (dimensionslosen) Außengesetzes im allgemeinen 2-parametrig sind. Dabei muß aber einer der Parameter  $u_\tau/u_\delta$  sein, wenn alle Kennzahlen voneinander unabhängig sein sollen.

Allerdings tritt in (31) für  $y^+ > 50$  der Parameter  $u_\tau/u_\delta$  nicht mehr in der Funktion  $F_c$  auf. Dies ist aber lediglich eine Folge der Definition des Außengesetzes und der speziellen analytischen Form von (31) für  $y^+ > 50$ . Letztere folgt nämlich aus (4) und (3), wenn  $\nu$  noch mit Hilfe des Reibungsgesetzes (15) eliminiert wird, zu

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_\tau} &= \frac{u_\delta}{u_\tau} + \frac{1}{\kappa} \cdot \ln \frac{y}{\delta} - \frac{P}{\kappa} \cdot \left[2 - w\left(\frac{y}{\delta}\right)\right] \\ &= f_c\left(\frac{y}{\delta}; \frac{u_\tau}{u_\delta}, P\right) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\text{für } \frac{y}{\delta} > 50 \cdot \exp\left(C + \frac{2}{\kappa} P - \frac{u_\delta}{u_\tau}\right)$$

Hier tritt auf der rechten Seite der Parameter  $u_\delta/u_\tau$  lediglich als additives Glied auf, so daß sich daraus in der Tat das Außengesetz

$$\begin{aligned} \frac{u_\delta - u}{u_\tau} &= -\frac{1}{\kappa} \cdot \ln \frac{y}{\delta} + \frac{P}{\kappa} \left[2 - w\left(\frac{y}{\delta}\right)\right] = \\ &= F_c\left(\frac{y}{\delta}; P\right) \end{aligned}$$

$$\text{für } \frac{y}{\delta} > 50 \cdot \exp\left(C + \frac{2}{\kappa} P - \frac{u_\delta}{u_\tau}\right)$$

ergibt. Die 1-Parametrigkeit des Profilansatzes von Coles in der Form des Außengesetzes für  $y^+ > 50$  mit  $P$  als Parameter ist also eine besondere Eigenschaft dieses Ansatzes. Im allgemeinen ist aber – wie oben bereits erwähnt – der Profilansatz von Coles auch als Außengesetz 2-parametrig.

#### 4. Zur Einführung weiterer Profilgrößen und Kennzahlen

In der Grenzschichttheorie sind zur Charakterisierung von Geschwindigkeitsprofilen noch weitere Größen in Gebrauch. Es sind dies z. B. die Verdrängungsdicke

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_\delta}\right) dy, \quad (33)$$

die Impulsverlustdicke

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{u_\delta} \left(1 - \frac{u}{u_\delta}\right) dy, \quad (34)$$

die Energieverlustdicke

$$\delta_3 = \int_0^\delta \frac{u}{u_\delta} \left[1 - \left(\frac{u}{u_\delta}\right)^2\right] dy \quad (35)$$

und die daraus gebildeten Formparameter

$$H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad \text{und} \quad H_{32} = \frac{\delta_3}{\delta_2}$$

Dabei gelten die hier angeschriebenen Ausdrücke (33) bis (35) für ebene Strömungsfelder.

Weiterhin gebräuchlich sind noch drei Größen, die aus dem Außengesetz abgeleitet sind, nämlich das Längenmaß

$$\Delta = \int_0^\delta \frac{u_\delta - u}{u_\tau} dy,$$

der Formparameter

$$I = \frac{1}{\Delta} \int_0^\delta \left(\frac{u_\delta - u}{u_\tau}\right)^2 dy$$

und die Größe (vgl. [12], S. 159)

$$I_2 = \frac{1}{\Delta} \int_0^\delta \left(\frac{u_\delta - u}{u_\tau}\right)^3 dy.$$

Gemäß den obigen Definitionen bestehen folgende Zusammenhänge (vgl. [12], S. 163):

$$\delta_1 = \frac{u_\tau}{u_\delta} \cdot \Delta,$$

$$\delta_2 = \delta_1 \left(1 - \frac{u_\tau}{u_\delta} \cdot I\right),$$

$$\delta_3 = \delta_1 \left[2 - 3 \frac{u_\tau}{u_\delta} \cdot I + \left(\frac{u_\tau}{u_\delta}\right)^2 \cdot I_2\right]$$

Es genügt daher im Prinzip, wenn man sich nur für die drei Längenmaße  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  interessiert. Dabei sollen hier aber nur einige allgemeine Überlegungen angestellt werden.

Zunächst soll der Übersichtlichkeit wegen gefordert werden, daß in den Ausdrücken für die dimensionsbehafteten  $\delta_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) wieder nur voneinander unabhängige Größen auftreten. In den Definitionen (33) bis (35) der  $\delta_i$  sind  $u_\delta$  und  $\delta$  bereits als Parameter enthalten. Es muß daher auch bei der Berechnung der  $\delta_i$  für das Profil von Coles auf Darstellungen zurückgegriffen werden, die ebenfalls  $u_\delta$  und  $\delta$  als Parameter enthalten, also z. B. auf das Profil in der Form (20), (22) oder (23). Damit sind Abhängigkeiten der Art

$$\delta_i = d_c(\delta, u_\delta, u_\tau, P), \quad (36)$$

$$\delta_i = d_c(\delta, u_\delta, u_\tau, \nu), \quad (37)$$

$$\delta_i = d_c(\delta, u_\delta, P, \nu) \quad (38)$$

( $i=1, 2, 3$ ) zu erwarten. Die zugehörigen dimensionslosen Zusammenhänge sind

$$\frac{\delta_i}{\delta} = d_c\left(\frac{u_\tau}{u_\delta}, P\right),$$

$$\frac{\delta_i}{\delta} = d_c\left(\frac{u_\tau}{u_\delta}, Re_\delta\right) \text{ bzw. } \frac{\delta_i}{\delta} = d_c\left(\frac{u_\tau}{u_\delta}, \delta^+\right),$$

$$\frac{\delta_i}{\delta} = d_c(Re_\delta, P)$$

( $i=1, 2, 3$ ). Würden dagegen die Profildarstellungen (7) und (21) für die Ermittlung der  $\delta_i$  benutzt werden, müßte die fünfte als Parameter auftretende Größe mit Hilfe des Reibungsgesetzes (13) eliminiert werden.

Mit den Beziehungen (36) bis (38) ist man nun wiederum in der Lage, in den entsprechenden Profildarstellungen und auch in den entsprechenden Darstellungen des Reibungsgesetzes eine Größe durch vier andere zu ersetzen. Es ergibt sich damit eine (verwirrende) Vielzahl von möglichen Darstellungen sowohl des Profils als auch des Reibungsgesetzes. So läßt sich z. B. mit Hilfe von (36), (37) oder (38) die Grenzschichtdicke  $\delta$  im Reibungsgesetz (13) ersetzen. Es ergeben sich dadurch Zusammenhänge

$$\delta_i = r_c(u_\delta, u_\tau, \nu, P) \quad (39)$$

( $i=1, 2, 3$ ) oder in der zugehörigen dimensionslosen Schreibweise

$$Re_i = r_c\left(\frac{u_\tau}{u_\delta}, P\right)$$

$$(i=1, 2, 3), \text{ wenn } Re_i = \frac{u_\delta \delta_i}{\nu}.$$

Andererseits folgt aus (39) für  $i=2$

$$\nu = r_c(\delta_2, u_\delta, u_\tau, P).$$

Damit kann in den Ausdrücken, die sich aus (39) für  $\delta_1$  und  $\delta_3$  ergeben, jetzt  $\nu$  eliminiert werden. Man erhält somit

$$\delta_1 = r_c(\delta_2, u_\delta, u_\tau, P),$$

$$\delta_3 = r_c(\delta_2, u_\delta, u_\tau, P)$$

bzw. in der zugehörigen dimensionslosen Schreibweise

$$H_{12} = r_c\left(\frac{u_\tau}{u_\delta}, P\right),$$

$$H_{32} = r_c\left(\frac{u_\tau}{u_\delta}, P\right).$$

Es läßt sich aber auch in den Ausdrücken (39) für  $\delta_1$  und  $\delta_3$  der Parameter  $P$  durch die ebenfalls aus (39) folgende Beziehung

$$P = r_c(\delta_2, u_\delta, u_\tau, \nu)$$

ersetzen. Es ergibt sich damit

$$\delta_1 = r_c(\delta_2, u_\delta, u_\tau, \nu),$$

$$\delta_3 = r_c(\delta_2, u_\delta, u_\tau, \nu)$$

bzw. ein entsprechender dimensionsloser Zusammenhang

$$H_{12} = r_c\left(\frac{u_\tau}{u_\delta}, Re_2\right), \quad (40)$$

$$H_{32} = r_c\left(\frac{u_\tau}{u_\delta}, Re_2\right).$$

Alle oben als Beispiel angeführten Beziehungen verdeutlichen noch einmal, daß in dimensionsbehafteter Schreibweise in allen aus dem Profilanfang von Coles sich ergebenden Zusammenhängen – und auch in den dimensionsbehafteten Profilen selbst – stets nur vier Parametergrößen voneinander unabhängig sind. Treten dagegen mehr Parameter auf, so gilt immer noch eine entsprechende Anzahl von mit dem Profil bereits festliegenden Relationen zwischen diesen Größen.

Im Zusammenhang mit der Einführung der obigen Grenzschichtdickenmaße  $\delta_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) ist hier vielleicht noch eine Bemerkung angebracht. Zur Ermittlung der  $\delta_i$  muß definitionsgemäß das Geschwindigkeitsprofil über die gesamte Grenzschichtdicke  $\delta$  integriert werden. Dabei ist also auch über das Wandgesetz (3) zu integrieren, für das hier im Übergangsbereich (II) kein analytischer Ausdruck angegeben wurde. Vielfach wird aus diesem Grunde der logarithmische Ausdruck des Gebiets (III) auch zur Approximation des Wandgesetzes in (I) und (II) benutzt. So ergibt sich z. B. bei einer derartigen Näherung mit (32) aus (33)

$$\frac{\delta_1}{\delta} \approx \frac{1}{\kappa} \frac{u_\tau}{u_\delta} (1+P) \quad \text{für } \delta^+ > 50. \quad (41)$$

Die Approximation von  $\delta_1/\delta$  durch (41) wird dabei umso ungenauer sein, je kleiner  $\delta^+$  ( $> 50$ ) und  $P$  sind. Dies ist bei Benutzung von (41) und ähnlichen Näherungsformeln gegebenenfalls zu beachten.

## 5. Abschließende Bemerkungen

Der Ansatz von Coles für das Geschwindigkeitsprofil einer turbulenten Wandgrenzschicht wurde hier einer etwas ausführlicheren Betrachtung unterzogen. Als Resultat der angestellten Überlegungen kann festgehalten werden, daß das dimensionsbehaftete Geschwindigkeitsprofil gegeben ist, wenn von ihm vier Parametergrößen bekannt sind. Um bei all den möglichen verschiedenen Darstellungen der Profile und der Relationen zwischen den einzelnen Profilparametern die Zusammenhänge im einzelnen verfolgen zu können, empfahl es sich, alle Umformungen in dimensionsbehafteter Schreibweise durchzuführen. Man hatte dann die Gewähr, daß eine abgeleitete Beziehung nur voneinander unabhängige Größen enthielt. Natürlich ließ sich dann mittels Dimensionsanalyse zu jedem dimensionsbehafteten Zusammenhang eine zugehörige Darstellung in dimensionslosen Kennzahlen finden. Würde man dagegen von vornherein die Umwandlung dimensionsloser Zusammenhänge ineinander betreiben, so wäre im allgemeinen nicht mehr gesichert, daß das Resultat nur voneinander unabhängige Größen enthält.

Es muß aber auch weiter betont werden, daß alle angeschriebenen Beziehungen lediglich Folgerungen aus dem Ansatz von Coles für das Geschwindigkeitsprofil sind. Mit diesen Beziehungen wird keine neue, vom Profil unabhängige physikalische Aussage getroffen. Man kommt auf diesem Wege auch zu keiner Aussage, welche äußeren Strömungsbedingungen – z. B. weicher Druckgradient – zu einem bestimmten Profil von Coles gehören. Andererseits bedeutet dies aber auch, daß zu den Geschwindigkeitsprofilen von Coles notwendigerweise die angeführten (und noch weitere) Parameterbeziehungen gehören. Diese Parameterbeziehungen dürfen daher auch nur höchstens näherungsweise durch anderweitig – z. B. experimentell – ermittelte Zusammenhänge zwischen den betreffenden Parametern ersetzt werden. So kann z. B. das von Ludwig und Tillmann in [13] angegebene Reibungsgesetz

$$c_f = 2 \left( \frac{u_T}{u_\delta} \right)^2 = 0,246 \cdot 10^{-0,678 H_{12}} \cdot Re_2^{-0,268},$$

das häufig für Grenzschichtrechnungen verwendet wird, in Verbindung mit dem Profilansatz von Coles lediglich als eine Näherung für das Reibungsgesetz (40) angesehen werden. Alle angeführten Parameterbeziehungen – also auch das Reibungsgesetz (40) – bedürfen daher im Prinzip keiner experimentellen Überprüfung, wenn die Gültigkeit des Profilansatzes von Coles bereits als gesichert angesehen werden kann. Andererseits ist mit jeder experimentellen Verifikation dieser Zusammenhänge gleichzeitig eine notwendige Bedingung auch für die Gültigkeit des Geschwindigkeitsprofils von Coles erbracht.

## LITERATUR:

- [1] Schubauer, G. B., Tchen, C. M.: *Turbulent Flow*. Princeton, New Jersey 1961, S. 50.
- [2] Walz, A.: *Strömungs- und Temperaturgrenzschichten*. Karlsruhe 1966.
- [3] Coles, D.: *The Law of the Wake in the Turbulent Boundary Layer*. *J. Fluid Mech.* 1, Part 2, 1956, S. 191 – 226.
- [4] Hinze, J. O.: *Turbulence*. New York, Toronto, London 1959, S. 507.
- [5] Spalding, D. B.: *The Kinetic-Energy-Deficit Equation of Turbulent Boundary Layer*. AGARDograph 97, 1965 (zitiert in: Sofran, G. (Herausgeber): *Fluid Mechanics of Internal Flow*. Amsterdam, London, New York 1967, S. 83).
- [6] Moses, H. L.: *The Behavior of Turbulent Boundary Layers in Adverse Pressure Gradients*. Gas Turbine Lab., Mass. Inst. Techn. Rep. No. 73, 1964 (zitiert wie [5]).
- [7] Rotta, J. C.: *Temperaturverteilungen in der turbulenten Grenzschicht an der ebenen Platte*. *Int. J. Heat Mass Transfer* 7, 1964 (zitiert wie [5]).
- [8] Strehle, E.: *Zur Integration der Bewegungsgleichungen für ebene turbulente Wandgrenzschichten*. Diss. TU Dresden, 1972.
- [9] Coles, D. E., Hirst, E. A.: *Proceedings Computation of Turbulent Boundary Layers – 1968 AFOSR-IFF-Stanford Conference*. Vol. 2, Compiled Data.
- [10] Rotta, J. C.: *Turbulente Strömungen*. Stuttgart 1972.
- [11] Grützner, H.: *Über einige Ergebnisse der Untersuchung einer turbulenten Rohreinlaufströmung bei ungestörter und gestörter Zuströmung*. Schriftenreihe des Zentralinstituts für Mathematik und Mechanik bei der AdW der DDR, Heft 22, Berlin 1976, S. 79.
- [12] Rotta, J. C.: *Turbulent Boundary Layers in Incompressible Flow*. In: Ferri, A., Küchemann, D., Sterne, L. H. G. (Herausgeber): *Progress in Aeronautical Sciences*, Vol. 2, New York 1962.
- [13] Ludwig, H., Tillmann, W.: *Untersuchungen über die Wandschubspannung in turbulenten Reibungsschichten*. *Ing.-Arch.* 17, 1949, S. 288 – 299.

Anschrift des Verfassers:  
Dipl.-Ing. H. Grützner  
Akademie der Wissenschaften der DDR  
Institut für Mechanik  
1199 Berlin  
Rudower Chaussee 5