

# Konstruktion und Anwendung hybrider Rißspitzenelemente für dreidimensionale bruchmechanische Aufgaben

Meinhard Kuna

## 0. Einleitung

Die bruchmechanische Abschätzung der Betriebssicherheit oder Lebensdauer eines technischen Bauteils mit einem Riß führt in vielen Fällen unumgänglich auf eine komplizierte dreidimensionale (3D) Aufgabe der Kontinuumsmechanik, für deren Lösung ausschließlich numerische Verfahren in Betracht kommen. Zur Behandlung von Rißproblemen nimmt gegenwärtig die Methode der finiten Elemente (FEM) eine führende Stellung ein. Einen Überblick geben die Tagungsbände [1] und die Arbeit [2]. Der vorliegende Beitrag beschränkt sich auf Aufgaben der Elastostatik.

Die generelle Schwierigkeit bei der Anwendung der FEM auf Rißprobleme besteht in der Berücksichtigung der an der Rißspitze auftretenden Spannungs- und Dehnungssingularitäten. Aus diesem Grunde bemüht man sich um die Entwicklung spezieller Sonderelemente, bei denen die analytisch bekannten Singularitäten in die Formulierung der Ansatzfunktionen mit einbezogen werden. Diese sogenannten Rißspitzenelemente werden um die Rißspitze angeordnet, während man den verbleibenden Teil des Körpers mit herkömmlichen Standard-Elementen modelliert. Eine sehr gute Möglichkeit zur Konstruktion von Rißspitzenelementen bieten hybride Variationsprinzipien, da hierbei für die Feldgrößen im Element rißspezifische Ansätze gewählt werden können, zugleich aber ein stetiger Übergang der Feldgrößen auf den Rändern zu den angrenzenden Standard-Elementen gewährleistet wird. Man kann drei hybride Formulierungen unterscheiden, die geeignet sind, um Sonderelemente zu erzeugen, deren Randverschiebungen mit denjenigen gewöhnlicher Standard-Elemente kompatibel sind: 1. Spannungs-Modell, 2. Verschiebungs-Modell, 3. gemischtes Spannungs-Verschiebungsmodell (Zweifeldformulierung). Diese drei Varianten wurden von Pian u. a. [4], Atluri u. a. [5] und Tong u. a. [6] zur Generierung von hybriden Rißspitzenelementen für zweidimensionale Aufgaben herangezogen. Wie durch eigene Erfahrungen bestätigt wurde [7], [8], erweist sich die 3. Variante als besonders günstig, da man direkt von Riß-Eigenfunktionen Gebrauch machen kann, wodurch sich eine Integration der Singularität über das Elementvolumen erübrigt. Da für räumliche Rißkonfigurationen bisher keine Eigenfunktionen bekannt sind, kann die 3. Variante leider nicht realisiert werden. Die von Atluri und Kartiresan [9] und Pian und Moriya [10] entwickelten 3D hybriden Rißspitzenelemente basieren deshalb auf dem Verschiebungs- bzw. Spannungs-Modell. In der vorliegenden Arbeit wurde dem Spannungs-Modell [10] der Vorzug ge-

geben, da es gegenüber dem Verschiebungs-Modell mit einer Größe weniger auskommt. Im Rahmen der koordinierten Zusammenarbeit zwischen der TH Magdeburg, WB Festkörpermechanik und dem IFE Halle bei der Anwendung der FEM in der Bruchmechanik konzentriert sich das IFE hauptsächlich auf die Entwicklung hybrider Rißspitzenelemente, während die TH Magdeburg an der Erstellung von Standard-FEM-Programmsystemen und modifizierten Verschiebungselementen für Rißprobleme arbeitet [2].

## 1. Das hybride Spannungsmodell

Grundlage der Betrachtungen ist das von Pian [11] aufgestellte Variationsprinzip für ein hybrides Spannungsmodell.

$$\pi_{CH}(\sigma_{ij}, \tilde{u}_i) = \sum_n \left\{ \frac{1}{2} \int_{V_n} \sigma_{ij} C_{ijkl} \sigma_{kl} dv + \int_{V_n} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^A dv - \int_{S_n} T_i \tilde{u}_i ds + \int_{S_{Tn}} \bar{T}_i \tilde{u}_i ds \right\} \quad (1)$$

Die Summation (Index  $n$ ) erstreckt sich über alle finiten Elemente des Körpers. Die Spannungen  $\sigma_{ij}$  im Elementvolumen  $V_n$  und die Verschiebungen  $\tilde{u}_i$  auf dem Elementrand  $S_n$  werden als unabhängige Feldgrößen variiert. Der Rand  $S_n$  des  $n$ -ten Elements setzt sich zusammen aus dem Teil  $S_{Un}$ , auf dem die Verschiebungswerte  $\tilde{u}_i$  vorgeschrieben sind, dem Teil  $S_{Tn}$ , wo Randspannungen  $\bar{T}_i$  angreifen und dem verbleibenden Teil  $S_n$ , entlang dessen das Element an Nachbarelemente angrenzt.  $T_i = \sigma_{ij} n_j$  stellt den Spannungsvektor auf  $S_n$  dar ( $n_j$  - Normalenvektor),  $C_{ijkl}$  ist der inverse Hooke'sche Tensor und  $\epsilon_{ij}^A$  bezeichnet Anfangsdehnungen. Der Spannungsansatz muß die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen ( $\bar{p}$  - Volumenkräfte).

$$\sigma_{ij,j} + \bar{p}_i = 0 \quad \text{in } V_n \quad (2)$$

$$\tilde{u}_i = \bar{u}_i \quad \text{auf } S_{Un} \quad (3)$$

Von den Randverschiebungen wird verlangt, daß sie auf  $S_{Un}$  die vorgeschriebenen Werte  $\bar{u}_i$  annehmen. Mit diesen Nebenbedingungen und bei Voraussetzung des

Hooke'schen Gesetzes liefert die stationäre Bedingung des Funktionals  $\delta \pi_{CH} = 0$  die Euler'schen Gleichungen:

$$C_{ijkl} \sigma_{kl} + \epsilon_{ij}^A \equiv \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{in } V_n \quad (4a)$$

$$u_i = \tilde{u}_i \quad \text{auf } S_n \quad (4b)$$

$$\sigma_{ij} n_j \equiv T_i = \bar{T}_i \quad \text{auf } S_{Tn} \quad (5)$$

$$\sum_n \int_{\tilde{S}_n} T_i \delta \tilde{u}_i ds = 0 \Leftrightarrow T_i^{(n)} + T_i^{(m)} = 0 \quad \text{auf } \tilde{S}_{(nm)}. \quad (6)$$

Gl. (4) stellt die Kompatibilitätsbedingungen dar, Gl. (5) bedeutet das Spannungsgleichgewicht mit den äußeren Belastungen  $\bar{T}_i$  und Gl. (6) sagt aus, daß das Spannungsgleichgewicht auf den Kontaktflächen  $\tilde{S}_{(nm)}$  zwischen jeweils zwei Nachelementen  $n$  und  $m$  durch das Funktional erzwungen wird, allerdings in abgeschwächter, genäherter Form.

Die Spannungen im Elementvolumen werden in der folgenden Form angesetzt, wobei die Matrizenschreibweise verwendet wird:

$$\underline{\sigma} = \underline{P} \underline{\beta} + \underline{P}_B \underline{\beta}_B. \quad (7)$$

Die Randspannungen ergeben sich nach Gl. (5).

$$\underline{T} = \underline{N} \underline{\sigma} = \underline{R} \underline{\beta} + \underline{R}_B \underline{\beta}_B. \quad (8)$$

Der Spannungsansatz enthält die  $M$  unbekanntenen Koeffizienten  $\underline{\beta}$ . Das zweite Glied berücksichtigt die äußere Belastung und stellt eine partikuläre Lösung der Gleichgewichtsbedingungen Gl. (2) für die vorgeschriebenen Volumenkräfte  $\bar{p}_i$  dar.  $\underline{P}_B \underline{\beta}_B$  kann auch Terme enthalten, die etwaige Randspannungen nach Gl. (5) a priori erfüllen (siehe [12]). Zusammengefaßt sind folgende Bedingungen an die Anteile des Spannungsansatzes zu stellen ( $\underline{D}$  bezeichnet den Differentialoperator für die Divergenzbildung von  $\underline{\sigma}$ ):

$$\underline{D} \underline{P} = 0 \quad \text{in } V_n \quad (9)$$

$$\underline{D} \underline{P}_B \underline{\beta}_B = -\bar{\underline{p}} \quad \text{in } V_n \quad (10)$$

$$\underline{N} \underline{P}_B \underline{\beta}_B = \bar{\underline{T}} \quad \text{auf } S_{Tn}. \quad (11)$$

Die Verschiebungen  $\tilde{\underline{u}}$  auf der Elementoberfläche werden mittels der Interpolationsfunktion  $L$  durch die Knotenverschiebungen  $\underline{q}$  ausgedrückt.

$$\tilde{\underline{u}} = \underline{L} \underline{q} \quad \text{auf } S_n. \quad (12)$$

Damit schreibt sich das Variationsprinzip (1) wie folgt:

$$\pi_{CH} = \sum_n \left\{ \frac{1}{2} \underline{\beta}^T \underline{H} \underline{\beta} + \underline{\beta}^T \underline{H}_B \underline{\beta}_B + \underline{\beta}^T \underline{H}_\epsilon + \underline{\beta}^T \underline{G} \underline{q} - \underline{\beta}_B^T \underline{G}_B \underline{q} + \int_{S_{Tn}} \bar{\underline{T}} \underline{L} ds \right\}. \quad (13)$$

mit den Abkürzungen:

$$\underline{H} = \int_{V_n} \underline{P}^T \underline{C} \underline{P} dv = \underline{H}^T$$

$$\underline{H}_B = \int_{V_n} \underline{P}^T \underline{C} \underline{P}_B dv \quad \underline{H}_\epsilon = \int_{V_n} \underline{P}^T \epsilon_A dv$$

$$\underline{G} = \int_{S_n} \underline{R}^T \underline{L} ds \quad \underline{G}_B = \int_{S_n} \underline{R}_B^T \underline{L} ds$$

Die Variation bezüglich  $\underline{\beta}$  liefert für jedes Element eine Relation zwischen den Koeffizienten des Spannungsansatzes und den Knotenverschiebungen.

$$\underline{\beta} = \underline{H}^{-1} (\underline{G} \underline{q} - \underline{H}_B \underline{\beta}_B - \underline{H}_\epsilon) \quad (14)$$

Hiermit kann  $\underline{\beta}$  aus Gl. (12) eliminiert werden und anschließende Variation nach  $\underline{q}$  ergibt die gesuchte Steifigkeitsbeziehung für ein hybrides Element.

$$\underline{k} \underline{q} = \underline{f} \quad (15)$$

mit der Steifigkeitsmatrix

$$\underline{k} = \underline{G}^T \underline{H}^{-1} \underline{G} \quad (16)$$

und dem Lastvektor

$$\underline{f} = \underline{G}^T \underline{H}^{-1} (\underline{H}_B \underline{\beta}_B + \underline{H}_\epsilon) - \underline{G}_B^T \underline{\beta}_B + \int_{S_{Tn}} \bar{\underline{T}} \underline{L} ds. \quad (17)$$

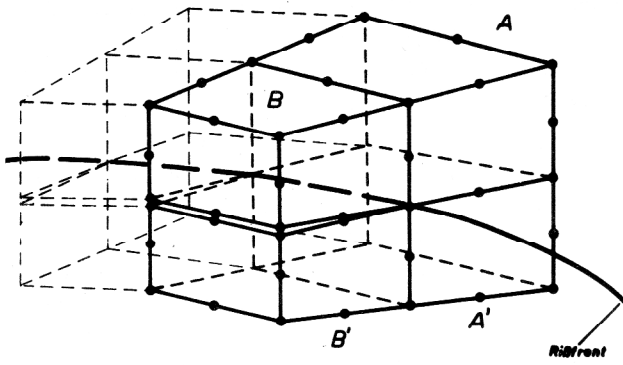
Da Gl. (15) nur Knotenvariable enthält, kann die Assemblierung der Elemente zum Gesamtsystem in der üblichen Weise durchgeführt werden. Außerdem ist eine beliebige Kombination von Verschiebungs- und Hybridelementen erlaubt, vorausgesetzt, die Verschiebungsfunktionen auf den Kontaktflächen sind identisch.

## 2. Die Rißspitzenelemente HCR 60

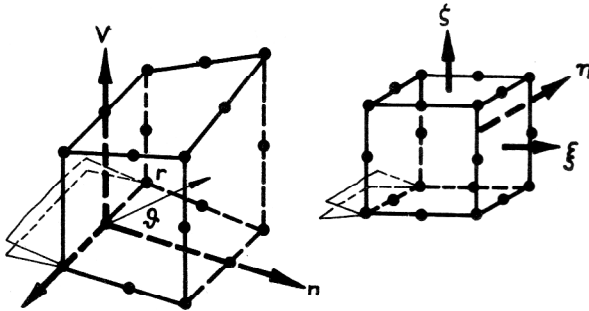
Die Rißspitzenelemente besitzen die Form eines Hexaeders mit 20 Knoten, dessen Flächen quadratisch gekrümmt sein können. In der bisherigen rechen-technischen Version wurden vorerst nur ebene Elementflächen betrachtet. Der Verlauf der Rißfront im Körper wird durch ein Polygon approximiert, wobei um jedes Geradenstück eine Gruppe von vier Rißspitzenelementen angeordnet wird, siehe Bild 1. Der restliche Teil des Körpers wird mit Standard-Elementen vernetzt. Jedes der qualitativ unterschiedlichen Hybrid-Elemente hat eine Kante mit der Rißfront gemeinsam. Es wird ein rißbezogenes Koordinatensystem  $(n, v, t)$  eingeführt, wobei  $t$  tangential zur Rißfront verläuft und  $v$  senkrecht zur Riße-ebene  $(n, t)$  liegt, wie für den Typ A in Bild 2 gezeigt. Zur Formulierung der Ansatzfunktionen und zum Zwecke der numerischen Integration wird das Element mit Hilfe der bekannten quadratischen isoparametrischen Formfunktionen auf den Einheitswürfel  $(-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1)$  transformiert.

Der Spannungsansatz  $\underline{P}$  besteht aus  $M_r$  regulären Polynomtermen  $\underline{P}_r(n, v, t)$  mit den unbestimmten Koeffizienten  $b_m$  und dem rißspezifischen Teil  $\underline{P}_s(r, \vartheta)$  mit den Koeffizienten  $K_I, K_{II}$  und  $K_{III}$ .

$$\underline{P} \underline{\beta} = [\underline{P}_r \quad \underline{P}_s] \{ b_1, b_2, \dots, b_{M_r}, K_I, K_{II}, K_{III} \}^T \quad (18)$$



**Bild 1**  
Anordnung der hybriden Rißspitzenelemente um die Rißfront



**Bild 2**  
Koordinatensysteme für die Rißspitzenelemente

Zur Aufstellung von  $P_r$  wurde für jede Spannungskomponente ein unvollständiges Polynom 3. Ordnung in  $(n, t, v)$  angesetzt, das sich durch die Gleichgewichtsforderung (9) auf  $M_r (= 54$  für die Elementarten A und A') Koeffizienten reduziert.

Für die Elementarten B und B' wurden nur solche Spannungszustände ausgewählt, die keine Randspannungen auf den Rißufern verursachen ( $M_r = 60$ ). Aus Platzgründen muß auf eine vollständige Angabe von  $P_r$  verzichtet und z. B. auf [12] verwiesen werden.

Die grundlegenden Kenngrößen der linear-elastischen Bruchmechanik sind die Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$ ,  $K_{II}$  und  $K_{III}$ , deren Bestimmung und Verteilung entlang der Rißfront Hauptziel der FEM-Rechnungen sind. Aus analytischen Untersuchungen ist bekannt [3], daß für einen vollständig eingebetteten 3D Riß die Spannungen und Verschiebungen bei Annäherung an die Rißfront (d. h.  $r \rightarrow 0$ ) die asymptotischen Lösungen Gln. (19), (20) besitzen, wobei  $(r, \vartheta)$  Polarkoordinaten in der  $(n, v)$ -Ebene bezeichnet. Die Gln. (19), (20) entsprechen genau der Rißspitzenlösung für den ebenen Dehnungszustand mit dem Unterschied, daß die Spannungsintensitätsfaktoren im 3D Fall insbesondere von der  $t$ -Koordinate und dem lokalen Krümmungsradius der Rißfront abhängen. Problematisch wird dieser Ansatz jedoch für einen Riß, der zur Körperoberfläche durchstößt, wo quasi ein ebener Spannungszustand besteht. Die Natur der Spannungssingularität am Schnittpunkt des Risses mit der Oberfläche wird gegenwärtig noch nicht ausreichend verstanden, weder mit analyti-

schon [22] noch mit numerischen [23], [1] Methoden. Im allgemeinen wird angenommen, daß es eine Übergangsschicht nahe der freien Oberfläche gibt, außerhalb derer die Lösung (19), (20) gültig ist. In den hybriden Rißelementen wurde deshalb für  $P_s$  Gl. (19) gewählt, wobei die Spannungsintensitätsfaktoren im Element in  $t$ -Richtung als konstant angenommen wurden.

$$\sigma_s = P_s(r, \vartheta) \{K_I, K_{II}, K_{III}\}^T = (32\pi r)^{-\frac{1}{2}} w(\vartheta) \quad (19)$$

$$w_{nn} = K_I \left(3 \cos \frac{\vartheta}{2} + \cos \frac{5}{2} \vartheta\right) - K_{II} \left(7 \sin \frac{\vartheta}{2} + \sin \frac{5}{2} \vartheta\right)$$

$$w_{vv} = K_I \left(5 \cos \frac{\vartheta}{2} - \cos \frac{5}{2} \vartheta\right) + K_{II} \left(\sin \frac{5}{2} \vartheta - \sin \frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$w_{tt} = K_I 8\nu \cos \frac{\vartheta}{2} - K_{II} 8\nu \sin \frac{\vartheta}{2}$$

$$w_{nv} = K_I \left(\sin \frac{5}{2} \vartheta - \sin \frac{\vartheta}{2}\right) + K_{II} \left(\cos \frac{5}{2} \vartheta + 3 \cos \frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$w_{vt} = K_{III} 4 \cos \frac{\vartheta}{2}$$

$$w_{nt} = -K_{III} 4 \sin \frac{\vartheta}{2}$$

Die entsprechenden Verschiebungen lauten:

$$u_n = (K_I u_n^I + K_{II} u_n^{II}) / \mu \sqrt{32\pi}$$

$$u_v = (K_I u_v^I + K_{II} u_v^{II}) / \mu \sqrt{32\pi}$$

$$u_t = \sqrt{r} K_{III} 8 \sin \frac{\vartheta}{2} / \mu \sqrt{32\pi} \quad (20)$$

$$u_n^I = \sqrt{r} \left[ (5 - 8\nu) \cos \frac{\vartheta}{2} - \cos \frac{3}{2} \vartheta \right]$$

$$u_n^{II} = \sqrt{r} \left[ (9 - 8\nu) \sin \frac{\vartheta}{2} + \sin \frac{3}{2} \vartheta \right]$$

$$u_v^I = \sqrt{r} \left[ (7 - 8\nu) \sin \frac{\vartheta}{2} - \sin \frac{3}{2} \vartheta \right]$$

$$u_v^{II} = \sqrt{r} \left[ (8\nu - 3) \cos \frac{\vartheta}{2} - \cos \frac{3}{2} \vartheta \right]$$

$\mu$  - Schubmodul,  $\nu$  - Poisson-Zahl.

Der Spannungsansatz Gl. (18) erfüllt somit die Gleichgewichtsbedingungen (9) als auch die Normalspannungsfreiheit auf den Rißflächen. Er genügt auch der Forderung ([11], [12]), daß die Koeffizientenzahl  $M = M_r + 3$  größer als die Zahl der Knotenfreiheitsgrade  $M_k = 60$  minus der Starrkörper-Freiheitsgrade  $M_f = 6$  ist.

Bei der Festlegung der Randverschiebungsansätze Gl. (12) wird in drei Flächenarten unterschieden, die im folgenden durch die Richtung ihrer Flächennormalen in Bild 2 gekennzeichnet werden.

a) Flächen  $\xi = 1$  und  $\zeta = 1$ :

Auf diesen Flächen grenzen die Risßspitzenelemente an Standard-Elemente an, weshalb für L die üblichen quadratischen isoparametrischen Formfunktionen in  $(\xi, \eta, \zeta)$  für eine 8-Knoten-Fläche [21] benutzt wurden. Über die vier anderen Flächen sind nur die Risßspitzenelemente untereinander verbunden. Die Interpolationsfunktionen dieser Flächen wurden an das Verschiebungsfeld Gl. (20) der Risßspitzenlösung angepaßt.

b) Flächen  $\eta = 1$  und  $\eta = -1$ :

Diese Flächen schneiden die Risßfront in einem Punkt, so daß hier neben sechs Polynomtermen die gesamte  $(r, \vartheta)$ -Abhängigkeit nach Gl. (20) verwendet wird.

$$\tilde{u}_n = a_1 + a_2 \xi + a_3 \zeta + a_4 \xi \zeta + a_5 \xi^2 + a_3 \zeta^2 + a_7 u_n^I + a_8 u_n^{II}$$

$$\tilde{u}_v = a_9 + a_{10} \xi + a_{11} \zeta + a_{12} \xi \zeta + a_{13} \xi^2 + a_{14} \zeta^2 + a_{15} u_v^I + a_{16} u_v^{II}$$

$$\tilde{u}_t = a_{17} + a_{18} \xi + a_{19} \zeta + a_{20} \xi \zeta + a_{21} \xi^2 + a_{22} \zeta^2 + a_{23} \sqrt{r} \sin \frac{\vartheta}{2} + a_{24} \sqrt{r} \sin \frac{3}{2} \vartheta$$

c) Flächen  $\xi = -1$  und  $\zeta = -1$ :

Diese Flächen haben eine Kante mit der Risßfront gemeinsam, weshalb hier nur die r-Abhängigkeit von Gl. (20) zum Tragen kommt.

$$\tilde{u}_n = a_1 + a_2 \sqrt{r} + a_3 \eta + a_4 \sqrt{r} \eta + a_5 r + a_6 \eta^2 + a_7 r \eta + a_8 \sqrt{r} \eta^2 \text{ und analog } \tilde{u}_v \text{ und } \tilde{u}_t$$

In den Fällen b) und c) müssen die 24 Ansatzkoeffizienten a durch die 24 Knotenvariablen  $\hat{q}$  der Fläche substituiert werden. Dazu berechnet man aus dem Ansatz  $\tilde{u} = A a$  die Verschiebungen an den Knotenkoordinaten  $q = M a$  und invertiert dieses lineare Gleichungssystem, woraus sich die Interpolationsformel für die Fläche ergibt:

$$\tilde{u} = A M^{-1} q \quad (21)$$

Gl. (12) setzt sich somit aus derartigen Beiträgen der sechs Flächen zusammen. Entlang solcher Kanten, wo die Flächenart a) mit den Arten b) und c) zusammenstößt, ist die Stetigkeit der Verschiebungen allerdings nur in den Knotenpunkten gewährleistet. (Für diesen Hinweis bin ich Prof. G. Landgraf zu Dank verpflichtet.) Dieser Nachteil ließe sich nur vermeiden, wenn man auf die risßspezifischen Terme bei den Flächen b) und c) verzichtet, was jedoch die Leistungsfähigkeit des Elementes erheblich beeinträchtigt.

### 3. Rechentechnische Implementierung

Die rechentechnische Realisierung erfolgt im wesentlichen wie bei gewöhnlichen hybriden Spannungselementen [12]. Die numerische Integration zur Erstellung der

Matrizen H und G wird jedoch durch die singulären Risßterme ( $\sim r^{-1}$ ,  $\sim r^{-1/2}$ ) sehr erschwert. Die Vielzahl verschiedenartiger Integranden macht eine analytische Aufbereitung aussichtslos, so daß mit einer Gauß-Produktformel und Subelementschachtelung gearbeitet wurde.

Die Moduln zur Berechnung der Steifigkeitsmatrizen der Risßspitzenelemente HCR60 wurden mit dem 3D FEM-Programm von Wiltinger [13] vereinigt, woraus die Programmvariante CRACK 3DH entstand. Als Standard-Elemente werden isoparametrische Hexaeder- und Pentaederelemente (20 bzw. 15 Knoten) mit quadratischem Verschiebungsansatz verwendet. Die Modellierung eines Körpers mit Risß geschieht, wie oben erläutert, mittels HCR60- und Standard-Elementen. Das globale FEM-System wird wie üblich assembliert und gelöst. Aus den erhaltenen Knotenverschiebungen der HCR60-Elemente lassen sich über Gl. (14) die Koeffizienten  $\beta$  von Gl. (18) errechnen. Somit erhält man für jedes Segment der Risßfront einen Wert der Spannungsintensitätsfaktoren. Bei Bedarf können mit Gl. (18) die Spannungen ermittelt werden.

### 4. Anwendungsbeispiele

Die Risßspitzenelemente wurden zunächst isoliert einem Selbstkonsistenztest unterzogen, d. h. ihren Knoten wurden Verschiebungen nach Gl. (20) aufgezwängt mit vorgegebenen Werten von  $K_I$ ,  $K_{II}$  und  $K_{III}$  und mittels Gl. (14) daraus die Ansatzkoeffizienten errechnet. Die somit erhaltenen Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I'$ ,  $K_{II}'$  und  $K_{III}'$  stimmten in allen Fällen besser als 2 % mit den vorgegebenen Werten überein, womit die Funktionsfähigkeit der Elemente HCR60 zur Reproduktion der Risßsingularität belegt wird.

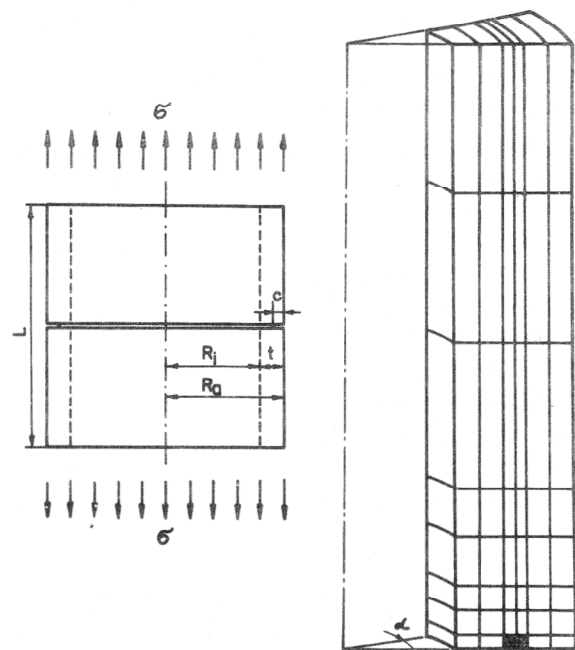
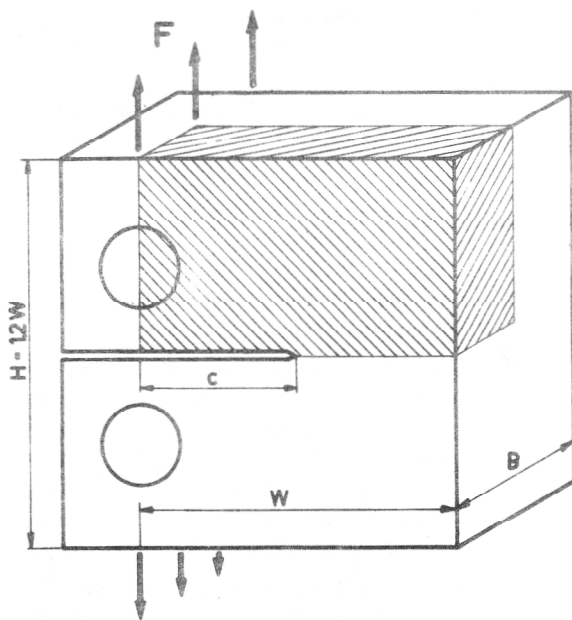
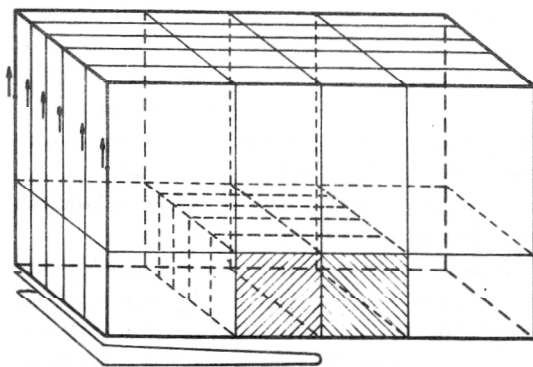


Bild 3  
Zylindrisches Rohr mit umlaufendem Außenrisß unter Zug (links). FEM-Netzwerk für ein betrachtetes Segment mit 46 Hexaederelementen, 2 Risßspitzenelementen und 409 Knoten (rechts)

Im nächsten Schritt wurde das FEM-Programm CRACK 3DH anhand geometrisch einfacher Rißprobleme, deren Lösungen bekannt sind, getestet. Ein Beispiel ist das in Bild 3 dargestellte Rohr unter axialem Zug  $\sigma$  mit umlaufendem Außenriß, dessen Tiefe  $c = 50$  mm der halben Wandstärke  $t$  entspricht. (Innenradius  $R_i = 400$  mm, Außenradius  $R_a = 500$  mm, Rohrlänge  $L = 2R_a$ ). Dieses axialsymmetrische Problem wurde durch ein 3D Netzwerk für ein keilförmiges Segment ( $\alpha = 2,3^\circ$ ) modelliert, wobei die Verschiebungen normal zu den Seitenflächen verhindert wurden. Bild 3 zeigt das verwendete Netzwerk für die obere Hälfte des symmetrischen Segments. Um die Rißspitze wurden zwei HCR60-Elemente vom Typ A und B angeordnet (schraffiert) mit einer Größe von  $1/5$  der Rißlänge. Der berechnete Spannungsintensitätsfaktor  $K_I/\sigma \sqrt{\pi c} = 1.634$  befindet sich in guter Übereinstimmung mit dem Resultat  $K_I/\sigma \sqrt{\pi c} = 1.6817$  der analytischen Lösung von [14] für dasselbe Rißproblem, allerdings im unendlich langen Zylinder.



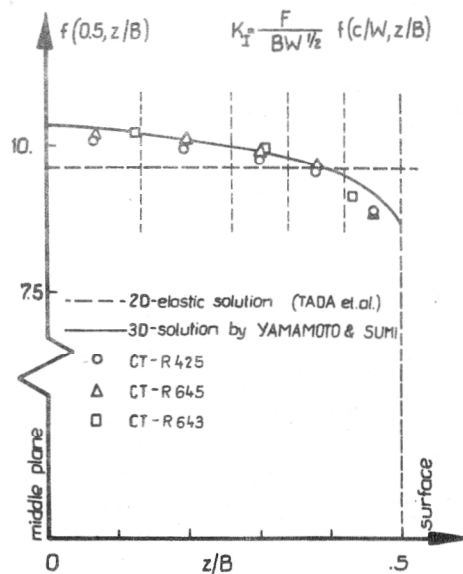
**Bild 4**  
Kompakt-Zug-Probe (Dicke  $B = 0.5 W$ , Rißtiefe  $c = 0.5 W$ )



**Bild 5**  
FEM-Netzwerk CT-R 425 (30 Hexaederelemente, 10 Rißspitzenelemente, 297 Knoten)

( $K_{II}$  und  $K_{III}$  sind aufgrund reiner Zugbelastung und Symmetrie Null).

Ein echt räumliches Berechnungsbeispiel ist die für Bruchzähigkeitsmessungen verwendete Kompakt-Zug-Probe (CT-Probe, Bild 4). Die Probe enthält einen gerade durchgehenden Anriß der Länge  $c = W/2$  und wird durch die Zugkraft  $F$  im Mode I belastet ( $K_{II} K_{III} = 0$ ). Aufgrund der doppelten Symmetrie genügt die Betrachtung eines Quadranten. In vereinfachter Weise wurde der Bereich um das Kraftangriffsloch modelliert, so daß eine FEM-Vernetzung des in Bild 4 schraffierten Teils erforderlich war. Das grobmaschigste der verwendeten Netzwerke ist in Bild 5 abgebildet. Die halbe Dicke wurde in fünf Elementschichten unterteilt, wobei die Rißfront in jeder Schicht von zwei Rißspitzenelementen umgeben ist. Als das wichtigste Berechnungsergebnis wurde die Verteilung des Spannungsintensitätsfaktors  $K_I$  über die Dicke der Probe ( $z$ -Koordinate) in Bild 6 zusammengestellt. Zum Vergleich dienten die 2D Lösung [15] (Strichlinie) und die als am genauesten eingeschätzte 3D Berechnung von Yamamoto & Sumi [16] (Vollinie) nach einer FEM-Superpositionsmethode ( $\sim 780$  Knoten). Mit unserem feinmaschigsten Netzwerk CT-R645 (733 Knoten) wurde ein Ergebnis erzielt, das sehr gut mit demjenigen von [16] im Einklang steht. Aber auch die groberen Netzwerke CT-R425 und CT-R643 (nur drei Elementschichten über die Dicke) lieferten noch eine beachtliche Genauigkeit.

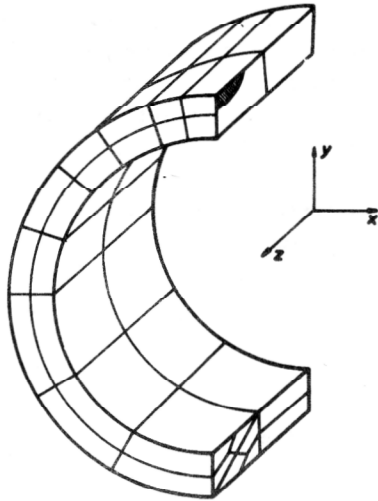


**Bild 6**  
Verteilung des normierten Spannungsintensitätsfaktors  $K_I$  über die Dicke der Kompakt-Zug-Probe ( $\nu = 0.3$ )

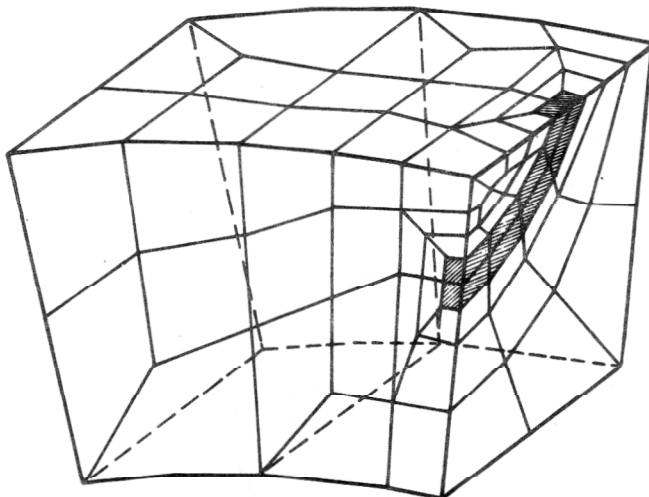
In Bild 7 ist ein typisches Rißproblem aus der technischen Praxis dargestellt, das sich durch die echte 3D Natur und die gekrümmte Rißfront auszeichnet. Es handelt sich um einen dickwandigen Behälter unter Innendruck  $p$  mit Außenriß von der Form eines Kreisabschnittes. Die Rißtiefe  $b$  beträgt  $1/3$  der Wanddicke und das Verhältnis  $R_a/R_i$  ist 1.3, vgl. [17]. Bild 7 zeigt das Netzwerk für ein Viertel des Bauteils und in Bild 8 ist die Vernetzung in der Nähe des Risses vergrößert herausge-

hoben. Die Rissspitzenelemente sind durch Schraffur gekennzeichnet. Auch hier tritt nur  $K_I$  auf, dessen Verteilung entlang der Risffront (als Funktion der Weglänge) Bild 9 wiedergibt. Analysiert wurden die folgenden drei Belastungsarten: (a) Druckbehälter mit kräftefreien Stirnseiten, (b) Stirnseiten sind mit massiven Bodenplatten verschlossen, (c) an den Stirnseiten greift eine axiale Zugspannung der Größe  $p \cdot R_i^2 / (R_a^2 - R_i^2)$  an.

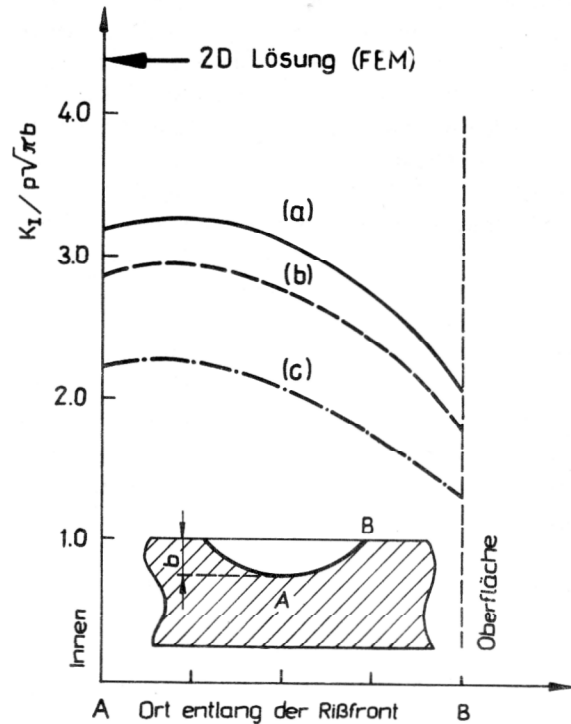
Weitere Anwendungsrechnungen mit hybriden Rissspitzenelementen enthalten die Arbeiten [18] bis [20].



**Bild 7**  
FEM-Netzwerk für einen zylindrischen Behälter mit kreisförmigem Außenriß (schraffiert unter Innendruck (140 Hexaederelemente, 8 Rissspitzenelemente, 895 Knoten)



**Bild 8**  
Detail des Netzwerkes von Bild 7 in Risfnähe



**Bild 9**  
Verteilung des Spannungsintensitätsfaktors entlang der Risffront für den Druckbehälter mit Außenriß

## 5. Diskussion

Verglichen mit solchen 3D Rissspitzenelementen, die auf der Verschiebungsmethode beruhen (siehe [1], [2]), zeichnen sich die hier vorgestellten hybriden Rissspitzenelemente durch zwei Vorzüge aus: (a) Das analytisch bekannte Verhalten der Spannungen und Verschiebungen wird in seiner Radial- und Winkelabhängigkeit vollständig einbezogen. (b) Alle drei Rißöffnungsarten I, II und III werden berücksichtigt und die Werte der Spannungsintensitätsfaktoren erhält man direkt. Die sonst erforderliche, nicht immer zweifelsfreie Auswertung des Verschiebungsfeldes entfällt somit bzw. kann als zusätzliche Bestätigung dienen.

Die Nachteile sind: (c) die Integration der Steifigkeitsmatrix eines HCR60-Elementes dauert etwa zehnmals so lange wie die eines 20-Knoten Standard-Elementes. Dafür reduziert sich jedoch die Zahl der erforderlichen Elemente in Risfnähe und die der globalen Freiheitsgrade. (d) Entlang der Risffront innerhalb eines Elementes werden die Spannungsintensitätsfaktoren als konstant angesetzt. (e) Die in Abschnitt 2 geschilderte schwache Verletzung der Verschiebungskompatibilität entlang einiger Elementkanten muß vom theoretischen Standpunkt aus als unbefriedigend angesehen werden, praktisch konnten jedoch keinerlei negative Folgen bemerkt werden.

Die Problematik der angesetzten Rissspitzenlösung und ihrer Berechtigung am Durchstoßpunkt der Risffront zur Körperoberfläche wurde in Abschnitt 2 bereits diskutiert. Sie betrifft aber alle derzeitigen 3D Rissspitzenelemente in gleicher Weise.

Die praktischen Erfahrungen mit den HCR60-Elementen können als sehr gut bewertet werden. Die angeführ-

ten Berechnungsbeispiele bestätigen ihre Leistungsfähigkeit bei der Bestimmung der Spannungsintensitätsfaktoren für räumliche Rißprobleme. Mit vergleichsweise groben Netzwerken (z. B. Bild 5) konnten zufriedenstellende Genauigkeiten erreicht werden. Auf einen ausführlichen Vergleich mit anderen Rißspitzenelementen wird hier bewußt verzichtet und dazu auf die Arbeit [20] verwiesen.

Bisher wurden nur Beispiele von zugbelasteten Rissen (Mode I) untersucht, obwohl die Rißelemente und das Programm CRACK 3DH auch die Behandlung von Rissen unter Scher- und Torsionsbeanspruchung ( $K_{II}$ ,  $K_{III} \neq 0$ ) erlauben. Die Berücksichtigung von thermischen Dehnungen, Volumenkräften und Belastungen der Rißufer bereitet ebenfalls keine Schwierigkeiten (vgl. Abschnitt 1). Eine offene Frage ist noch die Wahl der optimalen Größe der Rißspitzenelemente.

#### LITERATUR

- [1] Luxmoore, A. R., Owen, D. R. J.: Proc. 1st and 2nd International Conference on „Numerical Methods in Fracture Mechanics“, Pineridge Press, Swansea, 1978 und 1980.
- [2] Altenbach, J., Wiltinger, L.: Anwendung numerischer Methoden in der Bruchmechanik. Z. Technische Mechanik 2 (1981) 2.
- [3] Kassir, M. K., Sih, G. C.: Threedimensional crack problems, Noordhoff, Leyden, 1975.
- [4] Pian, T. H. H., Tong, P., Luk, C. H.: Elastic crack analysis by a finite element hybrid method. Proc. 3. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio 1971, S. 661 – 682.
- [5] Atluri, S. N., Kobayashi, A. S., Nakagaki, M.: An assumed displacement hybrid finite element model for linear fracture mechanics. Int. J. Fracture 11 (1975), S. 257 – 371.
- [6] Tong, P., Pian, T. H. H., Lasry, S.: A hybrid element approach to crack problems in plane elasticity. Int. J. Numer. Methods Eng. 7 (1973), S. 297 – 308.
- [7] Kuna, M., Khanh, D. Q.: Ein spezielles Hybrid-Element für die Spannungsanalyse ebener Körper mit Rissen. VIII. Int. Kongreß über Anwendung der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften, Weimar, 1978, Bd. 2, S. 71 – 76.
- [8] Kuna, M., Altenbach, J., Wiltinger, L.: CRACK 2D – Ein Finite-Element-Programm zur bruchmechanischen Analyse ebener elastostatischer Rißprobleme. Maschinenbautechnik 30 (1981), S. 75 – 78.
- [9] Atluri, S. N. u. a.: Hybrid finite element models für linear and nonlinear fracture mechanics. in [1], S. 52 – 66.
- [10] Pian, T. H. H., Moriya, K.: Treedimensional fracture analysis by assumed stress hybrid elements. in [1], S. 363 – 373.
- [11] Tong, P., Pian, T. H. H.: A variational principle and the convergence of a finite element method based on assumed stress distribution. Int. J. Solids Structures 5 (1969), S. 463 – 472.
- [12] Todorow, M.: Anwendung finiter hybrider Spannungselemente in der Elastostatik. Dissertation TH Magdeburg 1978.
- [13] Wiltinger, L.: Zur Anwendung der FEM auf die Behandlung räumlicher statischer Rißprobleme. Dissertation TH Magdeburg 1980.
- [14] Erdol, R., Erdogan, F.: A thick-walled cylinder with an axisymmetric internal or edge crack. ASME J. of Applied Mechanics 45 (1978), S. 281 – 286.
- [15] Tada, H., Paris, P. C., Irwin, G. R.: The stress analysis of cracks. Hellertown, Pennsylvania 1973.
- [16] Yamamoto, Y., Sumi, Y.: Stress intensity factors for three-dimensional cracks. Int. J. Fracture 14 (1978), S. 17 – 38.
- [17] Kuna, M.: Dreidimensionale bruchmechanische Analyse eines Druckbehälters mit Außenrissen. Bericht zur Auftragsrechnung an den VEB GERMANIA Karl-Marx-Stadt, 1981.
- [18] Kuna, M.: Hybride Sonderelemente zur Spannungsanalyse dreidimensionaler rißbehafteter Körper. IX. IKM Weimar 1981, Berichte Bd. 2, S. 27 – 30.
- [19] Kuna, M.: Special hybrid elements for the analysis of two- and three-dimensional crack problems. II. Conference on Numerical Methods in continuum Mechanics, Strbske Pleso 1981.
- [20] Kuna, M., Wiltinger, L., Altenbach, J.: Erfahrungen bei der Anwendung der FEM auf dreidimensionale elastostatische Rißprobleme. VI. Symposium Verformung und Bruch Magdeburg 1982 (im Druck).
- [21] Zienkiewicz, O. C.: Methode der finiten Elemente. Fachbuchverlag Leipzig 1975.
- [22] Folias, E. S.: On the threedimensional theory of cracked plates. J. Appl. Mech. 42 (1975), 663 – 674.
- [23] Hilton, P. D., Kiefer, B. V.: The enriched element for finite element analysis of three-dimensional elastic crack problems. J. of Pressure Vessel Techn. 102 (1980), 347 – 352.

Anschrift des Verfassers:

Dr. Meinhard Kuna  
AdW der DDR,  
Institut für Festkörperphysik  
und Elektronenmikroskopie  
4020 Halle  
Weinberg, Postfach 250