

Modellgleichungen für Manipulatoren

Peter Maïser

0. Einleitung

Numerische Integration und Untersuchungen zur optimalen Steuerung von Manipulatoren gestalten sich besonders dann effektiv, wenn die Modellgleichungen (Bewegungsdifferentialgleichungen) Normalform ($\dot{x} = f(x, t)$) besitzen. Das ist aber für ein Starrkörpersystem – als mechanisches Modell eines Manipulators – im allgemeinen nicht der Fall, wenn die Bewegungsdifferentialgleichungen nach der synthetischen Methode mittels Impuls- und Drehimpulssatz oder nach der analytischen Methode in Form der Lagrangeschen Gleichungen ermittelt werden. Die so gefundenen Modellgleichungen sind im allgemeinen in beiden Fällen durch Auflösen nach den höchsten Ableitungen mit vertretbarem Aufwand praktisch nicht in Normalform überführbar. Sie besitzen jedoch unterschiedliche Transformationseigenschaften. Während die Newton-Euler-Gleichungen galileiinvariant sind, transformieren sich die Lagrangeschen Gleichungen kovariant bei beliebigen Punkttransformationen im Konfigurationsraum R^n (Riemannscher Raum). Die Boltzmann-Hamel-Gleichungen sind forminvariant gegenüber linearen Transformationen im affinen Tangentialraum, und die kanonischen Gleichungen sind invariant in bezug auf kanonische Transformationen.

Bei der Untersuchung der Dynamik konkreter Manipulatoren im Rahmen des Lagrange-Formalismus zeigt sich, daß bestimmte wünschenswerte Eigenschaften der Metrik (z. B. Orthogonalität) durch Punkttransformationen im Konfigurationsraum nicht, wohl aber durch Transformationen im Tangentialraum erzwungen werden können. Beispiele für in diesem Sinne „zweckmäßige“ Koordinaten finden sich in der Literatur zur theoretischen und analytischen Mechanik. Ihre Anwendung auf drei wichtige Klassen von Manipulatoren soll hier demonstriert werden. Die Bewegungsdifferentialgleichungen erhalten dabei die gewünschte Normalform, so daß sie mühelos mittels programmierbarer Taschenrechner integriert werden können.

1. Die Boltzmann-Hamel-Gleichungen

Die Boltzmann-Hamel-Gleichungen, kurz auch B.-H.-Gln.,

$$(\partial_a T^*) - \partial_a T^* + \partial_b T^* A_{c'a}^{b'} \omega^{c'} = Q_a \quad (1.1)$$

sind verallgemeinerte Lagrangesche Gleichungen in dem Sinne, daß sie forminvariant sind gegenüber linearen Transformationen im affinen Tangentialraum

$$\dot{q}^a \rightarrow \omega^{a'} : \omega^{a'} = f_{a'}^{a'}(q) \dot{q}^a \quad (1.2)$$

mit $\det(f_{a'}^a) \neq 0$ in einem gewissen Gebiet des R^n , vgl. [1], [2]. Dabei gilt für die kinetische Energie

$$T^*(\omega, q) = T(\dot{q}, q), \quad \partial_a T^* = \partial T^* / \partial \omega^{a'}, \quad \partial_a T^* = \partial_a T^* f_{a'}^a \quad (1.3)$$

$$(f_{a'}^a : f_{a'}^a f_{b'}^a = \delta_{b'}^a, \quad f_{a'}^a f_{a'}^b = \delta_a^b) \quad \text{und für die generalisierten Kräfte}$$

$$Q_{a'} = Q_a f_{a'}^a \quad (1.4)$$

$$A_{c'a}^{b'}(q) := 2 f_{c'}^c f_{a'}^a \partial_{[c} f_{a]}^{b'} \quad (1.5)$$

sind die Koordinaten des in den unteren Indizes schiefsymmetrischen Anholonomieobjektes. Es ist identisch Null genau dann, wenn die $\omega^{a'}$ holonom sind.

Die Bewegungsdifferentialgleichungen eines Manipulators sind dann durch die expliziten B.-H.-Gln. (vgl. [2]) und die Transformationsgleichungen (1.2) angebar in der Form:

$$g_{a'b'}(q) \dot{\omega}^{b'} + \Lambda_{a'(b'c')} (q) \omega^{b'} \omega^{c'} = Q_{a'} \quad (1.6 a)$$

$$\dot{q}^a = f_{a'}^a(q) \omega^{a'} \quad (1.6 b)$$

Dabei ist

$$g_{a'b'}(q) := g_{ab}(q) f_{a'}^a(q) f_{b'}^b(q) \quad (1.7)$$

die durch die Transformation (1.2) im Tangentialraum induzierte Metrik, und

$$\Lambda_{a'b'c'}(q) := \Gamma_{a'b'c'} + g_{d'(c'} A_{b')a'}^{d'} + \frac{1}{2} g_{a'd'} A_{b'c'}^{d'} \quad (1.8)$$

sind verallgemeinerte (bezüglich der letzten beiden Indizes asymmetrische) Christoffel-Symbole 1. Art ($\Gamma_{a'b'c'}$: Christoffel-Symbole 1. Art im neuen Koordinatensystem).

2. Die kanonischen Gleichungen in anholonomen Koordinaten

Mit der Lagrange-Funktion $\Lambda^*(\omega', q) := T^*(\omega', q) - U(q)$ und den generalisierten Impulsen

$$p_{a'} := \dot{\partial}_{a'} \Lambda^* \quad (2.1)$$

$$\text{ist } H^*(\omega', q) := \omega^{a'} \dot{\partial}_{a'} \Lambda^* - \Lambda^*$$

die zugehörige Prä-Hamilton-Funktion, und mit (2.1), $\omega^{a'} = \omega^{a'}(p_{b'}, q)$, $\bar{\Lambda}^*(p_{b'}, q) := \Lambda^*(\omega^{a'}(p_{b'}, q), q)$

wird die Hamilton-Funktion

$$\bar{H}^*(p_{b'}, q) := \omega^{a'} p_{a'} - \bar{\Lambda}^* \quad (2.2)$$

definiert. Damit folgen aus den B.-H.-Gln. (1.1) die kanonischen Gleichungen in anholonomen Koordinaten

$$\dot{p}_{a'} = -\partial_{a'} \bar{H}^* - p_{b'} A_{c'a'}^{b'} \partial^{c'} \bar{H}^* + \tilde{Q}_{a'}, \quad \tilde{Q}_{a'} = Q_{a'} + \partial_{a'} U, \quad (2.3 a)$$

$$\omega^{a'} = \partial^{a'} \bar{H}^*, \quad (2.3 b)$$

bzw. – mit Rücksicht auf die Transformationsgleichungen (1.2) –

$$\dot{q}^a = f_{a'}^a(q) \partial^{a'} \bar{H}^* \quad (2.3 c)$$

anstelle von (2.3 b), ($\partial^{a'} \equiv \partial/\partial p_{a'}$).

3. Manipulator in Zylinderkoordinaten

3.1. Lagrange-Modell

Vereinbarung: $\{0, e_{(i)}\}$ sei stets Inertialsystem mit orthonormierter Basis. S_k bezeichne den Massenmittelpunkt des Körpers k , $\{S_k, E_i\}$ sei körperfeste orthonormierte Basis. Θ^{ij} seien die Koordinaten des Trägheitstensors bezüglich eben dieser Basis, m_k die Masse des Körpers k . $\vec{OS}_k = \mathbf{r}_k$ sei der Ortsvektor des Massenmittelpunktes.

Voraussetzung: $E_i \parallel E_i \parallel E_i$; $\Theta_k^{ij} = 0$, $i \neq j$, $k = 1, 2, 3$.

Der Freiheitsgrad des Manipulators ist $n = 3$; $q^1 = \varphi$, $q^2 := \xi$, $q^3 := r$ sind seine generalisierten Koordinaten. Damit folgt für die kinetische Energie

$$T(\dot{q}, q) = \frac{1}{2} \Theta(r) \dot{\varphi}^2 + \frac{M}{2} \xi^2 + m_3 \left(\frac{\dot{r}^2}{2} + A \dot{r} \dot{\varphi} \right) \text{ mit}$$

$$\Theta(r) := \Theta_1^{33} + \Theta_2^{33} + \Theta_3^{33} + m_2 \frac{A^2}{4} + m_3 (A^2 + r^2), \quad M := m_2 + m_3.$$

Die generalisierten Kräfte Q_a folgen aus der virtuellen Arbeit

$$\delta' A = M_\varphi \delta \varphi + (K_\xi - Mg) \delta \xi + K_r \delta r \equiv Q_a \delta q^a.$$

Die expliziten Lagrangeschen Gleichungen $g_{ab}(q) \ddot{q}^b + \Gamma_{abc}(q) \dot{q}^b \dot{q}^c = Q_a$ lauten dann konkret für den Manipulator in Bild 1:

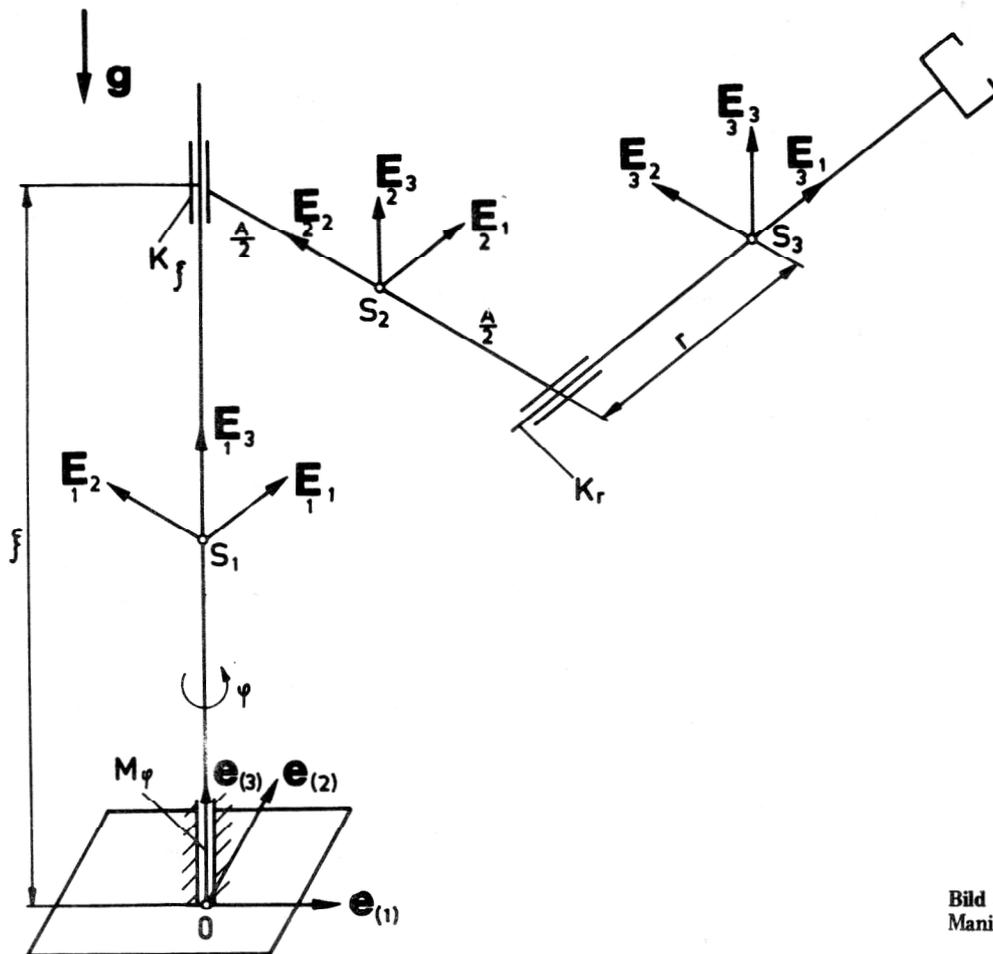


Bild 1
Manipulator in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}
 \Theta(r) \ddot{\varphi} + m_3 A \ddot{r} + 2 m_3 r \dot{r} \dot{\varphi} &= M_\varphi, \\
 M \ddot{\xi} &= K_\xi - Mg, \\
 m_3 A \ddot{\varphi} + m_3 \ddot{r} - m_3 r \dot{\varphi}^2 &= K_r.
 \end{aligned}$$

(3.1)

Diese Modellgleichungen besitzen nicht die gewünschte Normalform, denn die Metrik des Konfigurationsraumes R^3

$$(\xi_{ab}(q)) = \begin{bmatrix} \Theta(r) & 0 & m_3 A \\ 0 & M & 0 \\ m_3 A & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

ist nicht orthogonal. (Sie ist orthogonal genau dann, wenn $A = 0$.)

3.2. Boltzmann-Hamel-Modell

Es entsteht die Frage nach der Orthogonalisierbarkeit der Metrik durch Koordinatentransformation, d. h., vermöge einer Hauptachsentransformation der kinetischen Energie T . Das kann mittels einer linearen Transformation im affinen Tangentialraum gemäß (1.2) erreicht werden. Z. B. führt die Transformation

$$\begin{aligned}
 \omega^{1'} &= -A \dot{\varphi} & , & & \dot{\varphi} &= -\frac{1}{A} \omega^{1'} & , \\
 \omega^{2'} &= \dot{\xi} & , & & \dot{\xi} &= \omega^{2'} & , \\
 \omega^{3'} &= A \dot{\varphi} + \dot{r} & , & & \dot{r} &= \omega^{1'} + \omega^{3'} & ,
 \end{aligned}$$

(3.2 a-b)

also

$$(f_{a'}^a(q)) = \begin{bmatrix} -A & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ A & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (f_{a'}^a(q)) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

zu

$$T^*(\omega', q) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Theta(r)}{A^2} - m_3 \right) (\omega^{1'})^2 + M (\omega^{2'})^2 + m_3 (\omega^{3'})^2 \equiv \frac{1}{2} g_{a'b'}(q) \omega^{a'} \omega^{b'} \quad (3.3)$$

mit der orthogonalen Metrik

$$(g_{a'b'}(q)) = \begin{bmatrix} \frac{\Theta(r)}{A^2} - m_3 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}.$$

(3.2) beschreibt eine holonome Koordinatentransformation. Folglich ist das Anholonomieobjekt identisch Null, und die Bewegungsdifferentialgleichungen des Manipulators in Bild 1 lassen sich mit den B.-H.-Gleichungen (1.6 a) und den Transformationsgleichungen (3.2 b) in der gewünschten Normalform

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= -\frac{1}{A} \omega^{1'} & \dot{\omega}^{1'} &= \frac{1}{\Theta(r)} \left\{ A^2 K_r - AM_\varphi - m_3 r [(\omega^{1'})^2 + 2 \omega^{1'} \omega^{2'}] \right\}, \\ \dot{\xi} &= \omega^{2'} & \dot{\omega}^{2'} &= \frac{K_\xi}{M} - g, \\ \dot{r} &= \omega^{1'} + \omega^{3'} & \dot{\omega}^{3'} &= \frac{K_r}{m_3} + \frac{r}{A^2} (\omega^{1'})^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

schreiben ($\bar{\Theta}(r) := \Theta(r) - m_3 A^2$).

3.3. Kanonisches Modell

Mit T^* gemäß (3.3) und der potentiellen Energie $U = Mg \xi$ ist

$$\Lambda^*(\omega', q) := T^* - U = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\Theta(r)}{A^2} - m_3 \right) (\omega^{1'})^2 + M (\omega^{2'})^2 + m_3 (\omega^{3'})^2 \right\} - Mg \xi.$$

Folglich sind $p_{1'} = \left(\frac{\Theta(r)}{A^2} - m_3 \right) \omega^{1'}$, $p_{2'} = M \omega^{2'}$, $p_{3'} = m_3 \omega^{3'}$

die generalisierten Impulse (im neuen Koordinatensystem), und mit

$$\bar{\Lambda}^*(p_b', q) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{A^2}{\bar{\Theta}(r)} p_{1'}^2 + \frac{1}{M} p_{2'}^2 + \frac{1}{m_3} p_{3'}^2 \right\} - Mg \xi$$

ist nach (2.2)

$$\bar{H}^*(p_a, q) = \frac{A^2}{2\bar{\Theta}(r)} p_1^2 + \frac{1}{2M} p_2^2 + \frac{1}{2m_3} p_3^2 + Mg \xi$$

die Hamilton-Funktion. Mit $\tilde{Q}_1 := M \varphi$, $\tilde{Q}_2 := K_\xi$, $\tilde{Q}_3 := K_r$ und $\tilde{Q}_a = \tilde{Q}_a f_{a'}^a$, sowie $\partial_a \bar{H}^* \equiv \partial_a \bar{H}^* f_{a'}^a$, und $A_{c'a'}^b \equiv 0 \quad \forall a, b, c$ sind dann zufolge (2.3 a, c)

$$\begin{aligned}
 \dot{\varphi} &= -\frac{A}{\Theta(r)} P_1' & \dot{P}_1' &= \frac{A^2 m_3 r}{[\Theta(r)]^2} P_1'^2 + K_r - \frac{1}{A} M_\varphi, \\
 \dot{\xi} &= \frac{1}{M} P_2' & \dot{P}_2' &= K_\xi - Mg, \\
 \dot{r} &= \frac{A^2}{\Theta(r)} P_1' + \frac{1}{m_3} P_3' & \dot{P}_3' &= \frac{A^2 m_3 r}{[\Theta(r)]^2} P_1'^2 + K_r
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

die kanonischen Gleichungen. Die beiden Gleichungssysteme (3.4) und (3.5) sind natürlich äquivalent.

4. Manipulator in sphärischen Koordinaten

4.1. Lagrange-Modell

Es gelte die Vereinbarung von Abschnitt 3.1. Der Freiheitsgrad des Manipulators in Bild 2 ist $n = 4$; $q^1 := \vartheta$, $q^2 := \psi$, $q^3 := \varphi$ (Cardan-Winkel), $q^4 := r$ sind seine generalisierten Koordinaten. Für die Winkelgeschwindigkeiten $\vec{\omega}_k = \omega_k^i E_i$ ($k = 1, 2, 3$) gilt:

$$\begin{aligned}
 \omega_1^1 &= \omega_1 \equiv 0, & \omega_2^1 &= \omega_{21} = -\dot{\vartheta}, \\
 \omega_1^2 &= \omega_{12} \equiv 0, & \omega_2^2 &= \omega_{22} = -\sin \vartheta \cdot \dot{\psi}, \\
 \omega_1^3 &= \omega_{13} = \dot{\psi}, & \omega_2^3 &= \omega_{23} = \cos \vartheta \cdot \dot{\psi}, \\
 \omega_3^1 &= \omega_{31} = -\cos \varphi \dot{\vartheta} - \sin \varphi \sin \vartheta \dot{\psi}, \\
 \omega_3^2 &= \omega_{32} = \sin \varphi \dot{\vartheta} - \cos \varphi \sin \vartheta \dot{\psi}, \\
 \omega_3^3 &= \omega_{33} = \cos \vartheta \dot{\psi} + \dot{\varphi}.
 \end{aligned}$$

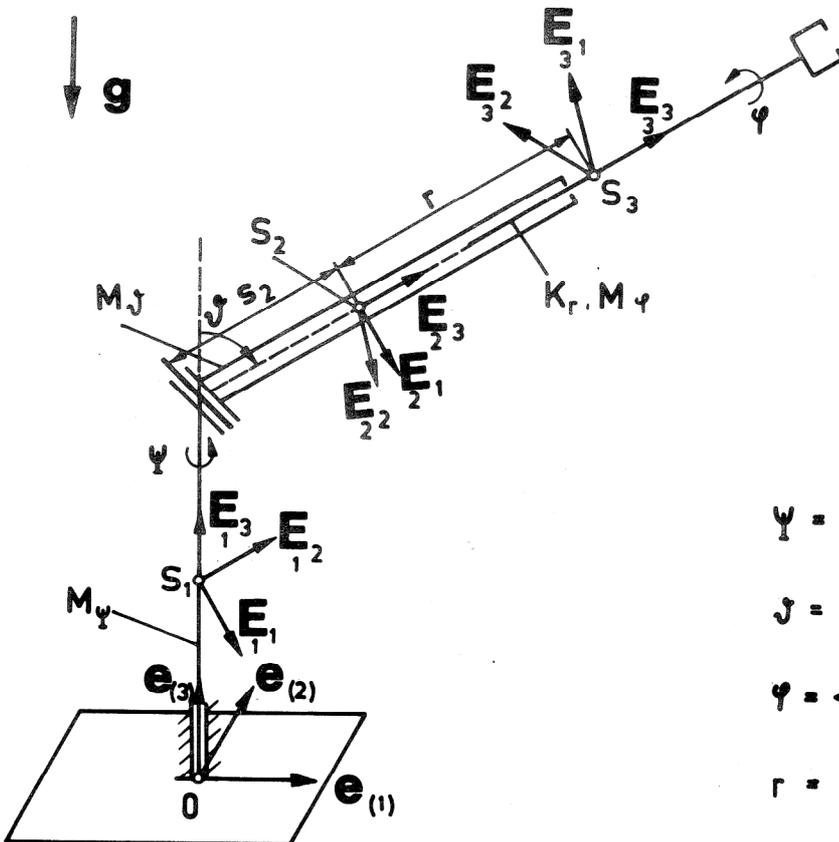


Bild 2
Manipulator in sphärischen Koordinaten

$$\begin{aligned}
 \psi &= \angle (E_1, e_{(1)}), \\
 \vartheta &= \angle (E_3, E_3), \\
 \varphi &= \angle (E_3, E_2), \\
 r &= \overline{S_2 S_3}
 \end{aligned}$$

Mit $\Theta_k^{ij} = 0, i \neq j; k = 1, 2, 3$ folgt für die kinetische Energie

$$\begin{aligned}
 T(\dot{q}, q) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left\{ m_k \dot{r}_k^2 + \Theta_k^{ij} \omega_i \omega_j \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ [m_2 s_2^2 + m_3 r^2 + \Theta_3^{11} \cos^2 \vartheta + \Theta_3^{22} \sin^2 \vartheta + \Theta_2^{11}] \cdot \dot{\vartheta}^2 \right. \\
 &\quad + [(m_2 s_2^2 + m_3 r^2 + \Theta_3^{11} \sin^2 \vartheta + \Theta_3^{22} \cos^2 \vartheta + \Theta_2^{22}) \cdot \sin^2 \vartheta \\
 &\quad + (\Theta_2^{33} + \Theta_3^{33}) \cos^2 \vartheta + \Theta_1^{33}] \dot{\psi}^2 + (\Theta_3^{11} - \Theta_3^{22}) \cdot \sin 2\vartheta \cdot \sin \vartheta \\
 &\quad \left. + 2 \Theta_3^{33} \cos \vartheta \dot{\psi} \dot{\vartheta} + \Theta_3^{33} \dot{\varphi}^2 + m_3 \dot{r}^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Sei $\Theta_3^{11} = \Theta_3^{22}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 T(\dot{q}, q) &= \frac{1}{2} \left\{ \Theta^{11}(r) \dot{\vartheta}^2 + [\bar{\Theta}^{22}(r) \sin^2 \vartheta + \Theta^{33} \cos^2 \vartheta] \dot{\psi}^2 \right. \\
 &\quad \left. + 2 \Theta_3^{33} \cos \vartheta \dot{\psi} \dot{\vartheta} + \Theta_3^{33} \dot{\varphi}^2 + m_3 \dot{r}^2 \right\} \equiv \frac{1}{2} g_{ab}(q) \dot{q}^a \dot{q}^b \quad \text{mit den Abkürzungen}
 \end{aligned}$$

$$\Theta^{11}(r) := \Theta_2^{11} + \Theta_3^{11} + m_2 s_2^2 + m_3 r^2,$$

$$\bar{\Theta}^{22}(r) := \Theta_3^{11} + \Theta_2^{22} + \Theta_1^{33} + m_2 s_2^2 + m_3 r^2, \quad \Theta^{33} := \Theta_1^{33} + \Theta_2^{33} + \Theta_3^{33}.$$

Die generalisierten Kräfte folgen aus der virtuellen Arbeit

$$\delta' A = [-M\vartheta + (m_2 s_2 + m_3 r) g \sin \vartheta] \cdot \delta \vartheta + M_\varphi \cdot \delta \varphi + M_\psi \cdot \delta \psi + [K_r - m_3 g \cos \vartheta] \cdot \delta r \equiv Q_a \delta q^a.$$

Dann sind

$$\begin{aligned}
 &\Theta^{11}(r) \ddot{\vartheta} + 2 m_3 r \dot{r} \dot{\vartheta} - \frac{1}{2} [\bar{\Theta}^{22}(r) - \Theta^{33}] \sin 2\vartheta \dot{\psi}^2 + \Theta^{33} \sin \vartheta \dot{\psi} \dot{\vartheta} \\
 &= -M\ddot{\vartheta} + (m_2 s_2 + m_3 r) g \sin \vartheta, \\
 &[\bar{\Theta}^{22}(r) \sin^2 \vartheta + \Theta^{33} \cos^2 \vartheta] \ddot{\psi} + \Theta_3^{33} \cos \vartheta \ddot{\varphi} + 2 m_3 r \sin^2 \vartheta \dot{r} \dot{\psi} \\
 &+ [\bar{\Theta}^{22}(r) - \Theta^{33}] \sin 2\vartheta \dot{\vartheta} \dot{\psi} - \Theta^{33} \sin \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\varphi} = M_\psi, \quad (4.1) \\
 &\Theta_3^{33} \cos \vartheta \ddot{\psi} + \Theta_3^{33} \ddot{\varphi} - \Theta_3^{33} \sin \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\psi} = M_\varphi, \\
 &m_3 \ddot{r} - m_3 r (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\psi}^2) = K_r - m_3 g \cos \vartheta
 \end{aligned}$$

die Lagrangeschen Gleichungen. Diese Modellgleichungen besitzen nicht Normalform, denn die Metrik des Konfigurationsraumes R^4

$$(g_{ab}(q)) = \begin{bmatrix} \Theta^{11}(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\Theta}^{22}(r) \sin^2 \vartheta + \Theta^{33} \cos^2 \vartheta & \Theta_3^{33} \cos \vartheta & 0 \\ 0 & \Theta_3^{33} \cos \vartheta & \Theta_3^{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

ist nicht orthogonal.

4.2. Boltzmann-Hamel-Modell

Einführung anholonomer Geschwindigkeitskoordinaten gemäß

$$\begin{aligned}
 \omega^{1'} &= \dot{\vartheta} & , & & \dot{\vartheta} &= \omega^{1'} & , \\
 \omega^{2'} &= \sin \vartheta \cdot \dot{\psi} & , & & \dot{\psi} &= \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \omega^{2'} & , \\
 \omega^{3'} &= \cos \vartheta \dot{\psi} + \dot{\varphi} & , & & \dot{\varphi} &= -\operatorname{ctg} \vartheta \omega^{2'} + \omega^{3'} & , \\
 \omega^{4'} &= \dot{r} & , & & \dot{r} &= \omega^{4'} & ,
 \end{aligned} \tag{4.2 a-b}$$

also

$$(f^a{}'_a(\mathbf{q})) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad (f^a{}'_a(\mathbf{q})) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin \vartheta} & 0 & 0 \\ 0 & -\operatorname{ctg} \vartheta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

liefert – für $\Theta_3^{11} = \Theta_3^{22}$ –

$$T^*(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \left\{ \Theta^{11}(\mathbf{r}) \cdot (\omega^{1'})^2 + \Theta^{22}(\mathbf{r}, \vartheta) \cdot (\omega^{2'})^2 + \Theta_3^{33} (\omega^{3'})^2 + m_3 (\omega^{4'})^2 \right\} \equiv \frac{1}{2} g_{a'b'}(\mathbf{q}) \omega^{a'} \omega^{b'} \tag{4.4}$$

mit $\Theta^{22}(\mathbf{r}, \vartheta) := \bar{\Theta}^{22}(\mathbf{r}) + (\Theta_1^{33} + \Theta_2^{33}) \cdot \operatorname{ctg}^2 \vartheta$ und der orthogonalen Metrik

$$(g_{a'b'}(\mathbf{q})) = \begin{bmatrix} \Theta^{11}(\mathbf{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta^{22}(\mathbf{r}, \vartheta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3^{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

Mit (4.3) folgt für das Anholonomieobjekt gemäß (1.5)

$$A_{1'2'}^{2'} = +\operatorname{ctg} \vartheta, \quad A_{2'1'}^{3'} = 1, \quad \text{Rest Null.} \tag{4.5}$$

(D. h., durch (4.2) wird ein anholonomer Tangentialraum definiert.) Die Bewegungsdifferentialgleichungen des Manipulators lassen sich mit den B.-H.-Gleichungen (1.6 a) und den Transformationsgleichungen (4.2 b) in der Normalform

$$\begin{aligned}
\dot{\vartheta} &= \omega^{1'} & , \\
\dot{\psi} &= \frac{1}{\sin \vartheta} \omega^{2'} & , \\
\dot{\varphi} &= -\operatorname{ctg} \vartheta \omega^{2'} + \omega^{3'} & , \\
\dot{r} &= \omega^{4'} & , \\
\dot{\omega}^{1'} &= \frac{1}{\Theta^{11}(r)} \left\{ -M_{\vartheta} - 2m_3 r \omega^{1'} \omega^{4'} + [\Theta^{22}(r, \vartheta) \operatorname{ctg} \vartheta + \frac{1}{2} \partial_{\vartheta} \Theta^{22}(r, \vartheta)] \cdot (\omega^{2'})^2 \right. \\
&\quad \left. - \Theta_3^{33} \omega^{2'} \omega^{3'} + (m_2 s_2 + m_3 r) g \cdot \sin \vartheta \right\} , \\
\dot{\omega}^{2'} &= \frac{1}{\Theta^{22}(r, \vartheta)} \cdot \left\{ \frac{M_{\psi}}{\sin \vartheta} + \Theta_3^{33} \omega^{1'} \omega^{3'} - M_{\varphi} \cdot \operatorname{ctg} \vartheta \right. \\
&\quad \left. - [\Theta^{22}(r, \vartheta) \cdot \operatorname{ctg} \vartheta + \partial_{\vartheta} \Theta^{22}(r, \vartheta)] \omega^{1'} \omega^{2'} - 2m_3 r \omega^{2'} \omega^{4'} \right\} , \\
\dot{\omega}^{3'} &= \frac{1}{\Theta_3^{33}} \cdot M_{\varphi} , \\
\dot{\omega}^{4'} &= \frac{1}{m_3} \cdot \left\{ K_r + m_3 r \cdot [(\omega^{1'})^2 + (\omega^{2'})^2] - m_3 g \cdot \cos \vartheta \right\}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

schreiben.

4.3. Kanonisches Modell

Mit T^* gemäß (4.4) und der potentiellen Energie $U(r, \vartheta) := (m_2 s_2 + m_3 r) g \cos \vartheta$ ist

$$\Lambda^*(\omega, q) := T^* - U = \frac{1}{2} \left\{ \Theta^{11}(r) (\omega^{1'})^2 + \Theta^{22}(r, \vartheta) (\omega^{2'})^2 + \Theta_3^{33} (\omega^{3'})^2 + m_3 (\omega^{4'})^2 \right\} - (m_2 s_2 + m_3 r) g \cos \vartheta .$$

Folglich sind

$$p_{1'} = \Theta^{11}(r) \omega^{1'} , \quad p_{2'} = \Theta^{22}(r, \vartheta) \omega^{2'} , \quad p_{3'} = \Theta_3^{33} \omega^{3'} , \quad p_{4'} = m_3 \omega^{4'}$$

die generalisierten Impulse (im neuen Koordinatensystem), und mit

$$\bar{\Lambda}^*(p_{b'}, q) = \frac{1}{2\Theta^{11}(r)} p_{1'}^2 + \frac{1}{2\Theta^{22}(r, \vartheta)} p_{2'}^2 + \frac{1}{2\Theta_3^{33}} p_{3'}^2 + \frac{1}{2m_3} p_{4'}^2 - (m_2 s_2 + m_3 r) g \cos \vartheta$$

ist gemäß (2.2)

$$\bar{H}^*(p_{b'}, q) = \frac{1}{2\Theta^{11}(r)} p_{1'}^2 + \frac{1}{2\Theta^{22}(r, \vartheta)} p_{2'}^2 + \frac{1}{2\Theta_3^{33}} p_{3'}^2 + \frac{1}{2m_3} p_{4'}^2 + (m_2 s_2 + m_3 r) g \cos \vartheta$$

die entsprechende Hamilton-Funktion.

$$\text{Mit } \tilde{Q}_1 := -M_{\vartheta}, \quad \tilde{Q}_2 := M_{\psi}, \quad \tilde{Q}_3 := M_{\varphi}, \quad \tilde{Q}_4 = K_r, \quad \tilde{Q}_{a'} = \tilde{Q}_a f_{a'}^a, \quad \partial_{a'} \bar{H}^* \equiv \partial_a \bar{H}^* f_{a'}^a =$$

$$\partial_1 \bar{H}^* \delta_{a'}^1 + \partial_4 \bar{H}^* \delta_{a'}^4 \quad \text{und (4.5) sind dann}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\vartheta} &= \frac{1}{\Theta^{11}(r)} p_1' & , \\
\dot{\psi} &= \frac{1}{\Theta^{22}(r, \vartheta) \cdot \sin \vartheta} \cdot p_2' & , \\
\dot{\varphi} &= -\frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{\Theta^{22}(r, \vartheta)} \cdot p_2' + \frac{1}{\Theta^{33}} p_3' & , \\
\dot{r} &= \frac{1}{m_3} p_4' & , \\
\dot{p}_1' &= -M_\vartheta + (m_2 s_2 + m_3 r) g \sin \vartheta + \frac{1}{\Theta^{22}(r, \vartheta)} \cdot \\
&\quad \cdot \left\{ \left[\frac{1}{2} \partial_\vartheta \ln \Theta^{22}(r, \vartheta) + \operatorname{ctg} \vartheta \right] \cdot p_2'^2 - p_2' \cdot p_3' \right\} , \\
\dot{p}_2' &= \frac{M_\psi}{\sin \vartheta} + \frac{p_1'}{\Theta^{11}(r)} [p_3' - p_2' \cdot \operatorname{ctg} \vartheta] - M_\varphi \cdot \operatorname{ctg} \vartheta , \\
\dot{p}_3' &= M_\varphi , \\
\dot{p}_4' &= K_r - m_3 g \cos \vartheta + m_3 r \left[\frac{p_1'^2}{[\Theta^{11}(r)]^2} + \frac{p_2'^2}{[\Theta^{22}(r, \vartheta)]^2} \right]
\end{aligned} \tag{4.7}$$

die kanonischen Gleichungen. Die Modellgleichungen (4.6) und (4.7) sind äquivalent.

5. Manipulator in torusähnlichen Koordinaten

5.1. Lagrange-Modell

Es gelte die Vereinbarung von Abschnitt 3.1. Der Freiheitsgrad des Manipulators in Bild 3 ist $n = 3$.

$q^1 = \sphericalangle(\mathbf{E}_1, \mathbf{e}_1)$, $q^2 = \sphericalangle(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1)$, $q^3 = \sphericalangle(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1)$ seien seine generalisierten Koordinaten.

Für die Winkelgeschwindigkeiten $\vec{\omega}_k = \omega_k^i \mathbf{E}_i$ ($k = 1, 2, 3$) gilt:

$$\omega_1^1 = \omega_1^1 = 0, \quad \omega_2^1 = \omega_2^1 = \sin q^2 \dot{q}^1, \quad \omega_3^1 = \omega_3^1 = \sin(q^2 + q^3) \dot{q}^1,$$

$$\omega_1^2 = \omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = \omega_2^2 = -\dot{q}^2, \quad \omega_3^2 = \omega_3^2 = -(\dot{q}^2 + \dot{q}^3),$$

$$\omega_1^3 = \omega_1^3 = \dot{q}^1, \quad \omega_2^3 = \omega_2^3 = \cos q^2 \dot{q}^1, \quad \omega_3^3 = \omega_3^3 = \cos(q^2 + q^3) \dot{q}^1.$$

Damit folgt für die kinetische Energie

$$T(\dot{q}, q) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 [m_k \dot{r}_k^2 + \Theta_k^{ij} \omega_{ki} \omega_{kj}] = \frac{1}{2} g_{ab}(q) \dot{q}^a \dot{q}^b$$

mit

$$g_{11} = m_2 [B^2 + \frac{L_2^2}{4} \cos^2 q^2] + m_3 \left\{ B^2 + [L_2 \cos q^2 + \frac{L_3}{2} \cos(q^2 + q^3)]^2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + (\Theta_1^{33} + \Theta_2^{33}) \cos^2 q^2 + (\Theta_1^{33} + \Theta_2^{11}) \sin^2 q^2 \\
& + \Theta_3^{11} \sin^2 (q^2 + q^3) + \Theta_3^{33} \cos^2 (q^2 + q^3) + \Theta_2^{13} \sin 2q^2 \\
& + \Theta_3^{13} \sin 2(q^2 + q^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{12} = & m_2 B \frac{L_2}{2} \sin q^2 + m_3 B \left[L_2 \sin q^2 + \frac{L_3}{2} \sin (q^2 + q^3) \right] \\
& - \Theta_2^{12} \sin q^2 - \Theta_2^{23} \cos q^2 - \Theta_3^{12} \sin (q^2 + q^3) - \Theta_3^{23} \cos (q^2 + q^3),
\end{aligned}$$

$$g_{13} = m_3 B \frac{L_3}{2} \sin (q^2 + q^3) - \Theta_3^{12} \sin (q^2 + q^3) - \Theta_3^{23} \cos (q^2 + q^3),$$

$$g_{22} = m_2 \frac{L_2^2}{4} + m_3 \left[L_2^2 + \frac{L_3^2}{4} + L_2 L_3 \cos q^3 \right] + \Theta_2^{22} + \Theta_3^{22}, \quad (5.1)$$

$$g_{23} = m_3 \left[L_2 \frac{L_3}{2} \cos q^3 + \frac{L_3^2}{4} \right] + \Theta_3^{22},$$

$$g_{33} = m_3 \frac{L_3^2}{4} + \Theta_3^{22}.$$

Durch die Metrik (5.1) ist die Kinematik des Manipulators im Konfigurationsraum R^3 vollständig definiert. Mit den Christoffel-Symbolen 1. Art

$$\Gamma_{abc}(q) := \frac{1}{2} (\partial_b g_{ac} + \partial_c g_{ab} - \partial_a g_{bc}) \quad (5.2)$$

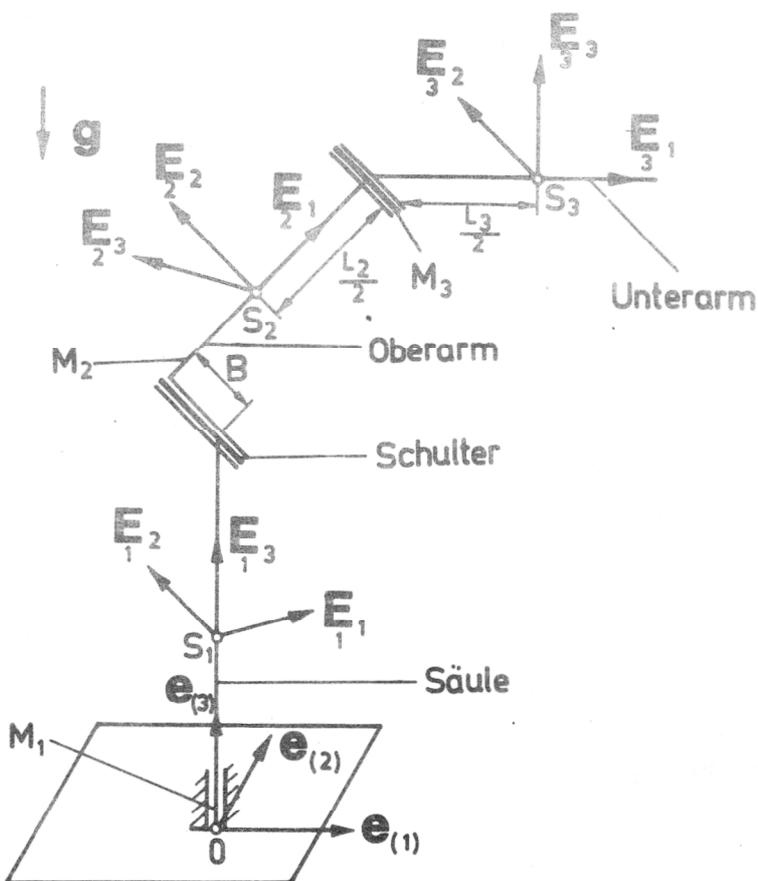


Bild 3
Manipulator in torusähnlichen Koordinaten

$$q^1 = \angle (\mathbf{E}_1, \mathbf{e}_{(1)})$$

$$q^2 = \angle (\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1)$$

$$q^3 = \angle (\mathbf{E}_3, \mathbf{E}_1)$$

und den aus der virtuellen Arbeit

$$\delta'A = M_1 \delta q^1 - \left\{ M_2 + \frac{m_2}{r} g L_2 \cos q^2 + m_3 g [L_2 \cos q^2 + \frac{L_3}{2} \cos(q^2 + q^3)] \right\} \delta q^2 - [M_3 + m_3 g \frac{L_3}{2} \cos(q^2 + q^3)] \delta q^3 \equiv Q_a \delta q^a$$

der eingepägten Kräfte und Momente folgenden generalisierten Kräfte lassen sich dann die Bewegungsdifferentialgleichungen in Lagrangescher Form

$$\boxed{g_{ab}(q) \ddot{q}^b + \Gamma_{abc}(q) \dot{q}^b \dot{q}^c = Q_a} \quad (5.3)$$

angeben.

Metrik (g_{ab}), Christoffel-Symbole (Γ_{abc}) und generalisierte Kräfte (Q_a) können rationell mittels Rechner (vgl. [3], [4]) ermittelt werden. Wegen der Nichtorthogonalität der Metrik lassen sich die Bewegungsdifferentialgleichungen (5.3) durch Auflösen nach den höchsten Ableitungen mit vertretbarem Aufwand praktisch nicht in Normalform überführen. Die Integration der Modellgleichungen (5.3) erfolgt dann zweckmäßigerweise mit Verfahren für implizite Differentialgleichungen.

Praktisch wichtiger Sonderfall: $B = 0$, $\Theta_k^{ij} = 0$, $i \neq j$, $k = 1, 2, 3$.

Dann ist

$$g_{11} = m_3 [L_2 \cos q^2 + \frac{L_3}{2} \cos(q^2 + q^3)]^2 + \Theta_3^{11} + (\Theta_3^{33} - \Theta_3^{11}) \cos^2(q^2 + q^3) + \Theta_1^{33} + \Theta_2^{11} + (\Theta_2^{33} - \Theta_2^{11} + m_2 \frac{L_2^2}{4}) \cos^2 q^2,$$

$$g_{12} = g_{13} \equiv 0,$$

$$g_{22} = m_3 [L_2^2 + \frac{L_3^2}{4} + L_2 L_3 \cos q^3] + \Theta_3^{22} + m_2 \frac{L_2^2}{4} + \Theta_2^{22},$$

$$g_{23} = m_3 [L_2 \frac{L_3}{2} \cos q^3 + \frac{L_3^2}{4}] + \Theta_3^{22},$$

$$g_{33} = m_3 \cdot \frac{L_3^2}{4} + \Theta_3^{22};$$

$$\Gamma_{112} = \frac{1}{2} [\Theta_2^{11} - \Theta_2^{33} - L_2^2 (\frac{m_2}{4} + m_3)] \sin 2 q^2 - \frac{m_3}{2} L_2 L_3 \sin(2 q^2 + q^3)$$

$$+ \frac{1}{2} (\Theta_3^{11} - \Theta_3^{33} - \frac{m_3}{4} L_3^2) \sin 2(q^2 + q^3),$$

$$\Gamma_{113} = -\frac{1}{2} m_3 L_2 L_3 \cos q^2 \sin(q^2 + q^3) + \frac{1}{2} (\Theta_3^{11} - \Theta_3^{33} - \frac{m_3}{4} L_3^2) \cdot \sin 2(q^2 + q^3),$$

$$\Gamma_{223} = -\frac{1}{2} m_3 L_2 L_3 \sin q^3,$$

$$\Gamma_{211} = -\Gamma_{112}, \quad \Gamma_{233} = \Gamma_{223}, \quad \Gamma_{311} = -\Gamma_{113}, \quad \Gamma_{322} = -\Gamma_{223},$$

(die restlichen Γ_{abc} sind Null), und die Lagrangeschen Gleichungen (5.3) lauten:

$$\begin{aligned}
g_{11}(q) \ddot{q}^1 + 2 \Gamma_{112}(q) \dot{q}^1 \dot{q}^2 + 2 \Gamma_{113}(q) \dot{q}^1 \dot{q}^3 &= Q_1, \\
g_{22}(q) \ddot{q}^2 + g_{23}(q) \ddot{q}^3 + \Gamma_{211}(q) (\dot{q}^1)^2 + 2 \Gamma_{223}(q) \dot{q}^2 \dot{q}^3 + \Gamma_{233}(q) (\dot{q}^3)^2 &= Q_2, \\
g_{32}(q) \ddot{q}^2 + g_{33} \ddot{q}^3 + \Gamma_{311}(q) (\dot{q}^1)^2 + \Gamma_{322}(q) (\dot{q}^2)^2 &= Q_3.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Dabei ist $Q_a = \tilde{Q}_a - \partial_a U$, $\tilde{Q}_1 = M_1$, $\tilde{Q}_2 = -M_2$, $\tilde{Q}_3 = -M_3$.

5.2. Boltzmann-Hamel-Modell

Für den Sonderfall von 5.1. gilt mit der affinen Transformation

$$\begin{aligned}
\omega^{1'} &= \dot{q}^1, & \dot{q}^1 &= \omega^{1'}, \\
\omega^{2'} &= \alpha \dot{q}^2 + \beta \dot{q}^3, & \dot{q}^2 &= a \omega^{2'} + \omega^{3'}, \\
\omega^{3'} &= \beta \dot{q}^2 + \gamma \dot{q}^3, & \dot{q}^3 &= \omega^{2'} + d \omega^{3'},
\end{aligned} \tag{5.5 a-b}$$

$$\begin{aligned}
a &= d \frac{A}{B}, & A &:= \Theta_3^{22} + m_3 \frac{L_3^2}{4}, \\
d &:= -(1 + \sqrt{1 - \frac{B}{A}}), & B &:= A - (\Theta_2^{22} + m_2 \frac{L_2^2}{4}) - m_3 L_2^2,
\end{aligned}$$

$$\alpha := \frac{d}{\delta}, \quad \beta := -\frac{1}{\delta}, \quad \gamma := \frac{a}{\delta}, \quad \delta := \det(f_{a'}^a) = ad - 1,$$

gemäß (1.7) für die Metrik

$$\begin{aligned}
g_{1'1'} &:= g_{11} \\
g_{2'2'} &:= a^2 g_{22} + 2 a g_{23} + g_{33} = \bar{a} \cos q^3 + \bar{b}, \\
g_{3'3'} &:= g_{22} + 2 d g_{23} + d^2 g_{33} = \bar{c} \cos q^3 + \bar{d}, \\
g_{a'b'} &= 0, \quad a' \neq b'
\end{aligned}$$

mit gewissen Konstanten \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} , \bar{d} .

Für die verallgemeinerten Christoffel-Symbole 1. Art gilt gemäß (1.8) mit $A_{c'a'}^{b'} \equiv 0 \forall a', b', c'$:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{1'1'2'} &:= a \cdot \Gamma_{112} + \Gamma_{113}, & \Lambda_{1'1'3'} &:= \Gamma_{112} + d \cdot \Gamma_{113}; \\
\Lambda_{2'1'1'} &:= -a \Gamma_{112} - \Gamma_{113}, & \Lambda_{2'2'2'} &:= a(1+a) \cdot \Gamma_{223}, \\
\Lambda_{2'2'3'} &:= ad(1+a) \cdot \Gamma_{223}, & \Lambda_{2'3'3'} &:= -(1+d) \cdot \Gamma_{223}; \\
\Lambda_{3'1'1'} &:= -\Gamma_{112} - d \cdot \Gamma_{113}, & \Lambda_{3'2'2'} &:= -ad(1+a) \cdot \Gamma_{223}, \\
\Lambda_{3'2'3'} &:= (1+d) \cdot \Gamma_{223}, & \Lambda_{3'3'3'} &:= d(1+d) \cdot \Gamma_{223}.
\end{aligned}$$

1) Ist $\Theta_2^{22} > \Theta_3^{22}$, $L_2 > L_3$, $m_2 > m_3$, so folgt $B < 0$, und es ist stets $\delta \neq 0$.

Die restlichen $\Lambda_{a'b'c'}$ sind Null. Für die generalisierten Kräfte gilt gemäß (1.4):

$$Q_{1'} = Q_1, \quad Q_{2'} = a Q_2 + Q_3, \quad Q_{3'} = Q_2 + d Q_3.$$

Die Bewegungsdifferentialgleichungen des Manipulators lassen sich nun mit den B.-H.-Gln. (1.6 a) und den Transformationsgleichungen (5.5 b) in der gewünschten Normalform

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}^1 &= \omega^{1'} & , \\ \dot{q}^2 &= a \omega^{2'} + \omega^{3'} & , \\ \dot{q}^3 &= \omega^{2'} + d \omega^{3'} & , \\ \omega^{1'} &= \frac{1}{g_{11}} \left\{ Q_1 - 2 \Lambda_{1'1'2'}(q) \omega^{1'} \omega^{2'} - 2 \Lambda_{1'1'3'}(q) \omega^{1'} \omega^{3'} \right\} & , \\ \omega^{2'} &= \frac{1}{g_{2'2'}} \cdot \left\{ a Q_2 + Q_3 - \Lambda_{2'1'1'}(q) (\omega^{1'})^2 - \Lambda_{2'2'2'}(q) (\omega^{2'})^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \Lambda_{2'2'3'}(q) \omega^{2'} \omega^{3'} - \Lambda_{2'3'3'}(q) (\omega^{3'})^2 \right\} & , \\ \omega^{3'} &= \frac{1}{g_{3'3'}} \cdot \left\{ Q_2 + d Q_3 - \Lambda_{3'1'1'}(q) (\omega^{1'})^2 - \Lambda_{3'2'2'}(q) (\omega^{2'})^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \Lambda_{3'2'3'}(q) \omega^{2'} \omega^{3'} - \Lambda_{3'3'3'}(q) (\omega^{3'})^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

schreiben.

5.3. Kanonisches Modell

Mit

$$T^*(\omega', q) := \frac{1}{2} g_{a'b'}(q) \omega^{a'} \omega^{b'} \text{ und der potentiellen Energie}$$

$$U(q^2, q^3) := g \left\{ \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) L_2 \cdot \sin q^2 + \frac{m_3}{2} L_3 \sin(q^2 + q^3) \right\}$$

$$\text{ist } \Lambda^*(\omega', q) = \frac{1}{2} \left\{ g_{11}(q) (\omega^{1'})^2 + g_{2'2'}(q) (\omega^{2'})^2 \right\} \\ - g \left\{ \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) L_2 \sin q^2 + \frac{m_3}{2} L_3 \sin(q^2 + q^3) \right\} ,$$

und für die Hamilton-Funktion ergibt sich

$$\bar{H}^*(p_{b'}, q) := \frac{1}{2 g_{11}} p_1^2 + \frac{1}{2 g_{2'2'}} p_2^2 + \frac{1}{2 g_{3'3'}} p_3^2 + g \left[\left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) L_2 \sin q^2 + \frac{m_3}{2} L_3 \sin(q^2 + q^3) \right].$$

$$\text{Mit } \tilde{Q}_1 := M_1, \quad \tilde{Q}_2 := -M_2, \quad \tilde{Q}_3 := -M_3, \quad \tilde{Q}_{a'} = \tilde{Q}_a f_{a'}^a ,$$

$\partial_a \bar{H}^* \equiv \partial_a \bar{H}^* f_{a'}^a$, folgen dann aus (2.3 a), (2.3 c) die kanonischen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\dot{q}^1 &= \frac{1}{g_{11}(q)} p_1' & , \\
\dot{q}^2 &= \frac{a}{g_{2'2'}(q)} p_2' + \frac{1}{g_{3'3'}(q)} p_2' & , \\
\dot{q}^3 &= \frac{1}{g_{2'2'}(q)} p_2' + \frac{d}{g_{3'3'}(q)} p_3' & , \\
\dot{p}_1' &= M_1 & , \\
\dot{p}_2' &= -aM_2 - M_3 + \frac{\Lambda_{1'1'2'}}{g_{11}} p_1'^2 + \frac{\Lambda_{2'2'2'}}{g_{2'2'}} p_2'^2 - \frac{\Lambda_{2'3'3'}}{g_{3'3'}} p_3'^2 \\
&\quad - g \left[a \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) L_2 \cos q^2 + (1+a) \frac{m_3}{2} L_3 \cos (q^2 + q^3) \right] , \\
\dot{p}_3' &= -M_2 - dM_3 + \frac{\Lambda_{1'1'3'}}{g_{11}} p_1'^2 + \frac{\Lambda_{2'2'3'}}{g_{2'2'}} p_2'^2 + \frac{\Lambda_{3'3'3'}}{g_{3'3'}} p_3'^2 \\
&\quad - g \left[\left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) L_2 \cos q^2 + (1+d) \frac{m_3}{2} L_3 \cos (q^2 + q^3) \right] .
\end{aligned} \tag{5.7}$$

6. Schlußbemerkungen

Die zweckmäßige Auswahl eines der drei Modelle: Lagrange-Modell, Boltzmann-Hamel-Modell, kanonisches Modell hängt ab von der Kinematik eines Manipulators und vom Ziel der Untersuchung. Das Lagrange-Modell eignet sich besonders für die Berechnung von Antriebsmomenten bei bekanntem Bewegungsgesetz, während dem Boltzmann-Hamel-Modell und dem kanonischen Modell für Untersuchungen zur optimalen Steuerung, aber auch für die Integration mittels einfacher klassischer Verfahren der Vorzug zu geben ist. Auf den programmierbaren Taschenrechnern TI 58/59 z. B. erfordert das einfachste Prediktor-Korrektor-Verfahren (Trapezregel) bei fester Schrittweite für die Manipulatoren in Zylinder- bzw. in torusähnlichen Koordinaten 98 Programmschritte, während für die rechten Seiten der B.-H.-Modellgleichungen mindestens 95 bzw. 370 Programmspeicherstellen (abhängig von der analytischen Struktur der Antriebskräfte und -momente) benötigt werden. (Rechenzeit: $\geq 30''$ /Integrationsschritt). Für den Manipulator in sphärischen Koordinaten ist der Programmspeicherbedarf etwas höher (die Ordnung der Modellgleichungen ist 8), der Speicherplatzbedarf für die rechten Seiten (wiederum abhängig von der analytischen Struktur der Antriebskräfte und -momente) liegt aber in jedem Fall unter dem Limit des TI 59.

LITERATUR:

- [1] Dobronravov, V. V.: Osnovy analititscheskoj mehaniki. „Vyss, skola“, Moskva 1976.
- [2] Maisser, P.: Der Lagrange-Formalismus für diskrete elektromechanische Systeme in anholonomen Koordinaten und seine Anwendung in der Theorie elektrischer Maschinen. Wiss. Z. Techn. Hochsch. Ilmenau, 27 (1981) Heft 2, S. 131 – 145.
- [3] Maisser, P., Habelt, J.: Rechnergestützte Ermittlung der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen holonomer Starrkörpersysteme. Wiss. Z. Techn. Hochsch. Ilmenau, 25 (1979) Heft 2, S. 119 – 127.
- [4] Maisser, P.: Rechnergestütztes Aufstellen der Bewegungsgleichungen eines Manipulators mit kinematischer Baumstruktur. Forschungsbericht 1980. Techn. Hochsch. Ilmenau, Sektion Gerätetechnik.

Anschrift des Verfassers:
Dr. rer. nat. Peter Maisser
Technische Hochschule
Sektion Gerätetechnik
Wissenschaftsbereich Technische Mechanik/
Mechanismentechnik
6300 Ilmenau
PSF 327