

# Finite Elemente auf der Grundlage einer verallgemeinerten Wlassowschen halbmomentenfreien Schalentheorie

Johannes Altenbach, Wolfgang Kissing

## 1. Problemstellung

Dünnwandige, in mehreren Richtungen ausgesteifte Systeme besitzen mit zunehmender Bedeutung des Leichtbaus große Verbreitung. Es haben sich dabei industriezweigspezifische Konstruktionsformen herausgebildet, wie dies Bild 1 beispielhaft für Schiffbau und Brückenbau zeigt.

Obwohl die betrachteten Konstruktionen ihren Abmessungen nach im allgemeinen als stabförmige Gebilde anzusprechen sind, ist auf Grund der durch die Versteifungen vorhandenen inneren Gliederung eine Anwendung von Stabmodellen zu ihrer Berechnung äußerst problematisch. Eine Behandlung nach der allgemeinen Schalentheorie scheidet schon allein wegen der komplizierten Geometrie aus.

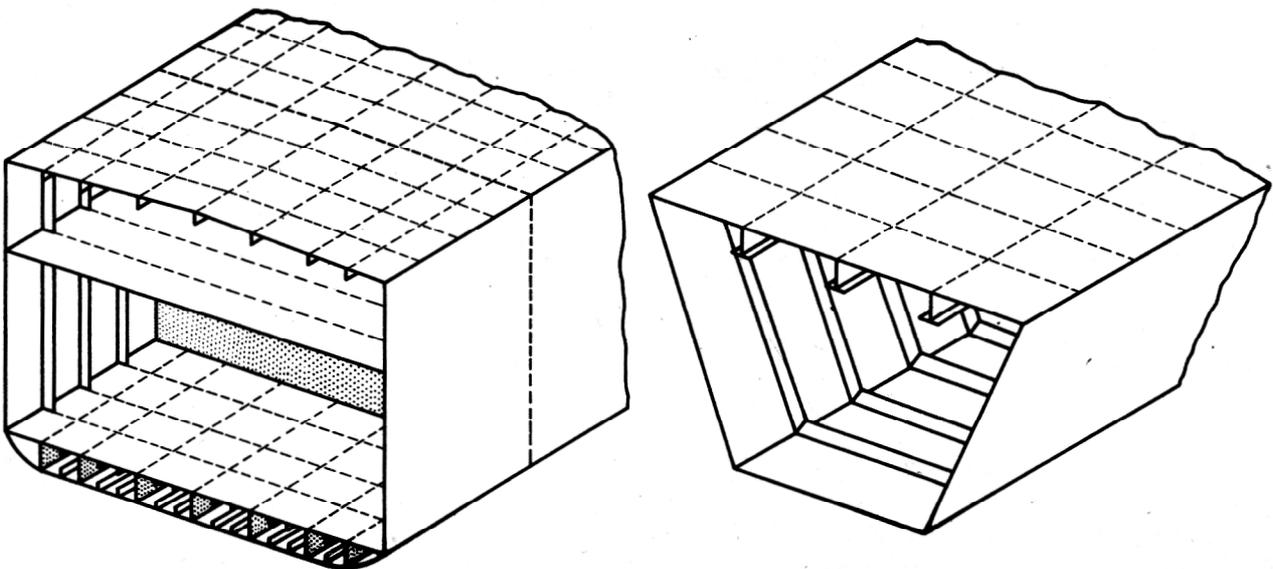
Grundsätzlich auch sehr erfolgreich anwendbar sind numerische Verfahren, wie die Finite-Elemente-Methode. Werden dabei, wie dies traditionell üblich ist, ebene finite Elemente eingesetzt, so ergibt sich, da die Modellierung derartiger Strukturen sehr feine Netzteilungen erfordert, ein außerordentlich großer Aufwand.

Die von Wlassow [1], ausgehend von Stabmodellen, entwickelte halbmomentenfreie Schalentheorie ermöglicht ganz speziell eine analytische Behandlung der in Bild 1 gezeigten quer- und längsausgesteiften dünnwandigen Konstruktionen. Eine große Verbreitung in der praktischen Berechnung blieb dieser Theorie allerdings versagt, da sie im allgemeinen auf große DGL-Systeme führt, und ihre Behandlung, besonders mit zunehmenden Verhältnissen von Längen- zu Querabmessungen außerordentlich große numerische Schwierigkeiten bereiten kann.

Erst in den letzten Jahren zeichnet sich speziell in der sowjetischen Literatur, vgl. [2] und Schrifttum, ein Wiederaufleben dieser technischen Stabschalentheorie ab. Hierzu trägt im besonderen Maße die Einsatzmöglichkeit leistungsfähiger EDVA zur numerischen Behandlung dieses Berechnungsmodells bei.

Als eine sehr aussichtsreiche Möglichkeit, die Anwendung der Theorie der halbmomentenfreien Schale weiterzuentwickeln, kann die Einführung finiter Elemente auf der Basis dieser Theorie angesehen werden.

Der vorliegende Beitrag hat deshalb das Ziel, die allgemeinen Grundlagen des Aufbaus der Steifigkeitsmatrizen für derartige finite Elemente bereitzustellen. Dabei sollen sowohl die sonst bei Wlassow vernachlässigten Querdehnungen in den Wandelementen Berücksichtigung finden, als auch stationäre Temperaturfelder in die verallgemeinerten äußeren Belastungen mit einbezogen werden.



**Bild 1**  
Typische Formen versteifter dünnwandiger Systeme  
a) Schiffbau  
b) Brückenbau

## 2. Grundlagen einer verallgemeinerten halbmomentenfreien Schalentheorie

Es werden nur dünnwandige geschlossene Konstruktionen betrachtet, die aus ebenen, in den Kanten biegesteif verbundenen Wandelementen bestehen und die in einer Richtung (Längsrichtung) deutlich größere Ausdehnungen besitzen. Die Wandelemente können in Längs- und Querrichtung versteift sein, Bild 1.

Die Längsbiegemomente und Torsionsmomente in den Wandelementen werden gegenüber den Querbiegemomenten vernachlässigt, Bild 2.  $\sigma_z$  und  $\tau_{zs}$  sind damit gleichmäßig und  $\sigma_s$  linear über die Wanddicke  $\delta$  verteilt.

Neben den Schubverformungen der Wandmittelflächen und den Längsdehnungen werden hier entgegen den Annahmen Wlassows [1] die Querdehnungen der Wandelemente einbezogen. Dies erscheint insbesondere bei Betrachtung der in Längs- und Querrichtung gleich großen Temperaturdehnungen erforderlich.

Äußere Belastungen treten nur in den Ebenen der Wandelemente auf. Stationäre Temperaturfeldbelastungen sind möglich. Das Temperaturfeld wird dabei als Differenzfeld gegenüber einem spannungslosen Ausgangszustand verstanden. Über die Wanddicke werden die Temperaturen als gleichmäßig verteilt angenommen.

Zur Beschreibung des Systems wird nach Bild 2 ein Koordinatensystem  $z, s$  verwendet. Der Anfangspunkt der Umlaufkoordinate  $s$  und damit die Lage der Längsachse  $z$  sind beliebig. Bedingungen, wie die Übereinstimmung mit der Lage spezieller Querschnittpunkte, wie Schwerpunkt und Schubmittelpunkt sind hier nicht zu stellen.

Für die Formulierung der Längs- und Querverschiebungen der Mittelflächen werden nach Wlassow endliche Reihen von Produktansätzen in der Form

$$u(z, s) = \sum_{i=1}^m U_i(z) \cdot \varphi_i(s); \quad v(z, s) = \sum_{k=1}^n V_k(z) \psi_k(s) \quad (1)$$

eingeführt. Der Ansatz derartiger Produkte aus Funktionen von je einer Veränderlichen führt zu einer Separation des zweidimensionalen Problems und ermöglicht seine Beschreibung durch gewöhnliche DGLn.

Die  $\varphi_i(s)$  und  $\psi_k(s)$  werden darin als verallgemeinerte Koordinaten der Längs- und Querverschiebungen und die  $U_i(z)$  und  $V_k(z)$  als die zugehörigen verallgemeinerten Längs- bzw. Querverschiebungen bezeichnet. Die verallgemeinerten Koordinaten sind vorzugebende Formfunktionen für die Längs- und Querverschiebungen, sie müssen die Kontinuität des Querschnitts bei diesen Verformungen beinhalten, können im übrigen aber in beliebiger Form und Anzahl angesetzt werden. Die  $U_i(z)$  und  $V_k(z)$  sind dann als zugehörige Betonungsfunktionen anzusehen.

Sofern beispielsweise für die Längsverformungen zwischen den Kanten in jedem Wandelement ein linearer Verlauf vorausgesetzt wird, ist die Anzahl  $m$  der einzuführenden verallgemeinerten Koordinaten  $\varphi_i(s)$  gleich der Kantenanzahl im Querschnitt. Bild 3 a zeigt ein Beispiel für derartige verallgemeinerte Koordinaten. Durch das Zulassen auch gekrümmter Verläufe der Längsverformungen zwischen den Kanten erhöht sich die Anzahl der Freiheitsgrade entsprechend, wie dies in Bild 3 b exemplarisch für ein Wandelement dargestellt ist.

Durch die verallgemeinerten Koordinaten  $\psi_k(s)$  werden die Formen der Querverschiebungen beschrieben. Bei vernachlässigten Querdehnungen zeigen diese bereichsweise konstanten Verlauf, Bild 4 a. Die Anzahl  $n$  der unter diesen Voraussetzungen anzusetzenden verallgemeinerten Koordinaten  $\psi_k(s)$  entspricht den Freiheitsgraden des Querrahmenmechanismus. Bei Einbeziehen der Querdehnung in den Wandelementen erhöht sich diese Anzahl entsprechend. So wird beispielsweise bei Voraussetzung einer konstanten Querdehnung in jedem Wandelement für dieses ein zusätzlicher Anteil gemäß Bild 4 b erforderlich. Auch kompliziertere Dehnungsansätze sind möglich, Bild 4 c.

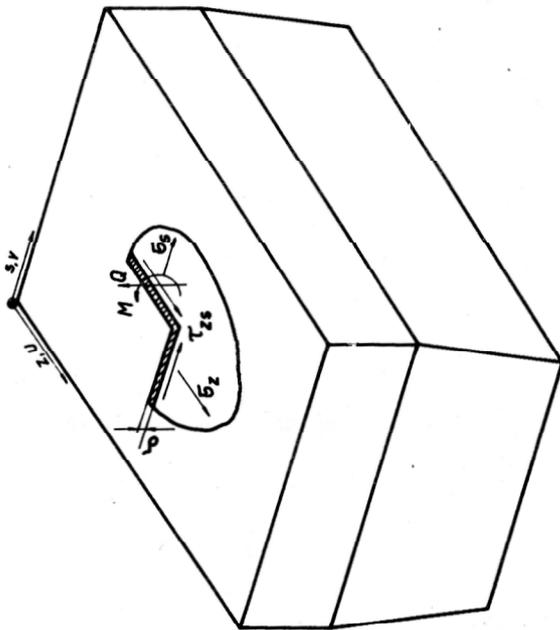
Bei der Formulierung des elastischen Potentials für die halbmomentenfreie Schale ist dem ebenen Spannungszustand in den Wandelementen nur der aus den Querbiegemomenten resultierende Biegespannungszustand hinzuzufügen. Man hat durch die Einbeziehungen der Temperaturdehnungen zu berücksichtigen, daß die Normalspannungen nur längs der elastischen Dehnungen Formänderungsenergie speichern. Unter diesen Voraussetzungen erhält man das auch in [3] angegebene elastische Potential.

$$\pi = \int_{(L)} \int \left\{ \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \nu \frac{\partial v}{\partial s} \right) \frac{\partial u}{\partial z} + \left( \frac{\partial v}{\partial s} + \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial s} \right] - \frac{E}{1-\nu} \alpha_t T \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial s} - \alpha_t T \right] + \frac{E}{4(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\} \delta(s) + \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} - pu - qv \Big] ds dz \quad (2)$$

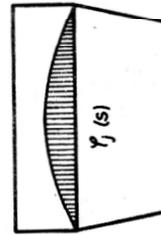
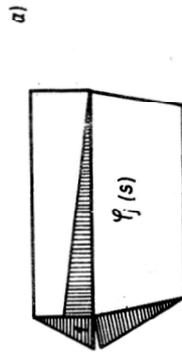
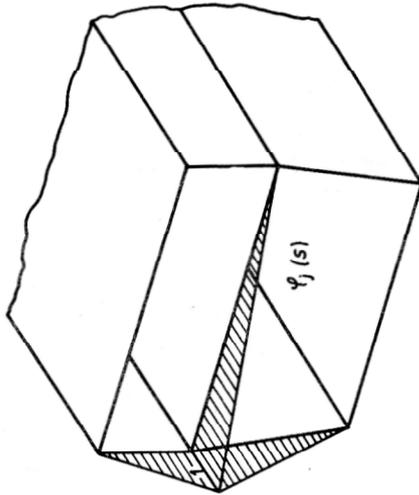
Darin sind  $p$  und  $q$  die in den Wandelementebenen in Längs- und Querrichtung wirkenden verteilten Belastungen.

Für das im Energieanteil des Biegespannungszustandes stehende  $I$  ist das auf die Längeneinheit bezogene Trägheitsmoment einzusetzen.

$$I = \frac{\delta^3}{12} \quad (3)$$

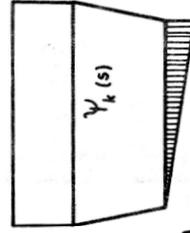
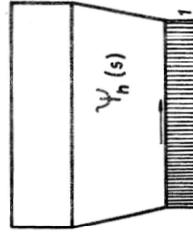
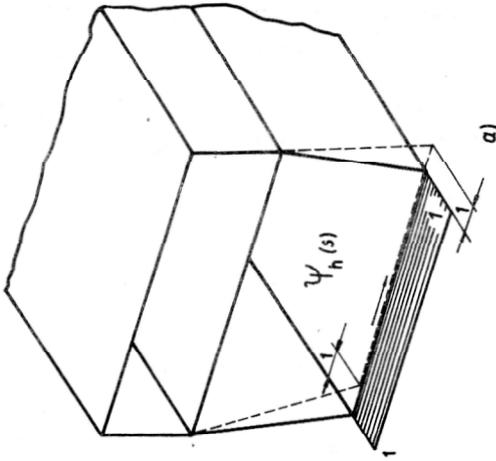


**Bild 2**  
Halbmomentenfreies Schalenmodell

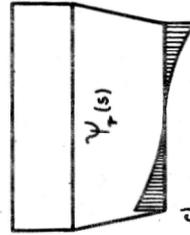


b)

**Bild 3**  
Verallgemeinerte Koordinaten der Längsverschiebungen  
a) linearer Verlauf der Längsverschiebungen zwischen den Kanten  $m = 6$   
b) gekrümmter Verlauf der Längsverschiebungen zwischen den Kanten  $m > 6$



b)



**Bild 4**  
Verallgemeinerte Koordinaten der Querverschiebungen  
a) ohne Querdehnung der Wandelemente  $n = 5$   
b) und c) mit Querdehnung der Wandelemente  $n > 5$

Bei regelmäßig querversteiften Systemen wird  $I$  aus dem Trägheitsmoment  $I'$  eines Streifens der Breite  $b$  einschließlich der in  $b$  enthaltenen Versteifungen ermittelt, Bild 5.

$$I = \frac{I'}{b} \quad (3')$$

Im Querschnitt angeordnete Längssteifen können auf zweierlei Weise Berücksichtigung finden. Einmal können sie abschnittsweise flächenwirksam auf eine fiktive Blechdicke  $\delta'$  umgerechnet werden. Zu empfehlen ist dies bei zahlreichen sehr regelmäßig angeordneten Längssteifen, etwa bei den in Bild 1 a dargestellten Decksunterzügen. Die in die Quersteifigkeit (3) eingehende Wanddicke wird hiervon nicht berührt.

Für wenige Längsversteifungen mit relativ großen Querschnittsflächen, wie etwa in Bild 1 b sind bei der Ausführung der aus (2) abgeleiteten Integrationen an den entsprechenden Stellen diskrete Summanden mit den Stringerflächen  $A_i$  anstelle  $\delta$  ds hinzuzufügen.

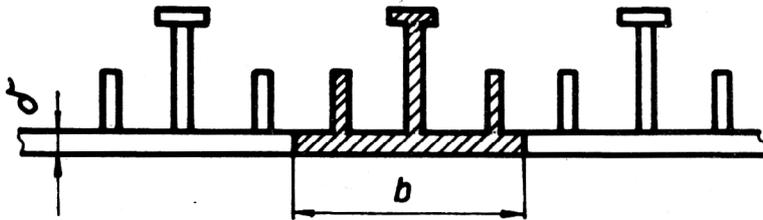


Bild 5  
Querversteifungen

In das elastische Potential (2) werden für  $u$  und  $v$  die Ansätze (1) eingesetzt. In gleicher Weise werden die Querbiegemomente mit

$$M(z, s) = \sum_{k=1}^n V_k(z) \cdot M_k(s) \quad (4)$$

durch die verallgemeinerten Querverschiebungen ausgedrückt. Dabei ist unter  $M_k(s)$  das Querbiegemoment im elementaren Querrahmen infolge  $V_k = 1$  zu verstehen. Sein Verlauf kann mit baustatischen Mitteln bestimmt werden. Hiermit wird das elastische Potential in folgender Form erhalten:

$$\begin{aligned} \Pi = \int_{(L)} \delta \left\{ \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[ \left( \sum_{i=1}^m U_i'(z) \varphi_i(s) + \nu \sum_{k=1}^n V_k(z) \psi_k'(s) \right) \cdot \sum_{i=1}^m U_i(z) \varphi_i(s) \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \sum_{k=1}^n V_k(z) \psi_k'(s) + \nu \sum_{i=1}^m U_i'(z) \varphi_i(s) \right) \sum_{k=1}^n V_k(z) \psi_k(s) \right] \right. \\ \left. - \frac{E}{1-\nu} \alpha_t T \left[ \sum_{i=1}^m U_i'(z) \varphi_i(s) + \sum_{k=1}^n V_k(z) \psi_k'(s) - \alpha_t T(z, s) \right] \right. \\ \left. + \frac{E}{4(1+\nu)} \cdot \left[ \sum_{i=1}^m U_i(z) \varphi_i'(s) + \sum_{k=1}^n V_k'(z) \psi_k(s) \right]^2 \right\} \delta(s) \\ \left. + \frac{1}{2EI} \left[ \sum_{k=1}^n V_k(z) M_k(s) \right]^2 \right. \\ \left. - p(z, s) \sum_{i=1}^m U_i(z) \varphi_i(s) - q(z, s) \sum_{k=1}^n V_k(z) \psi_k(s) \right\} ds dz \quad (5) \end{aligned}$$

Die Striche bei  $U_i$  und  $V_k$  kennzeichnen darin die Ableitung nach  $z$  und die bei  $\varphi_i$  und  $\psi_k$  die nach der Umlaufkoordinate  $s$ .

Das Prinzip vom Minimum des elastischen Potentials führt auf das Variationsproblem

$$\Pi = \int_{(L)} F(z, U_i(z), U_i'(z), V_k(z), V_k'(z)) dz \Rightarrow \text{Min.} \quad (6)$$

Die zugehörigen Eulerschen DGLn. führen auf ein System von  $m + n$  DGLn. Es wird in [3] angegeben.

Bei Verwendung der Methode der Anfangsparameter lassen sich querschnittsspezifisch allgemeine Lösungen dieses DGL-Systems angeben. Jedoch bereits bei Querschnitten mit zahlreichen Freiheitsgraden  $m$  und  $n$  werden diese Lösungen sehr umfangreich.

Treten außerdem in den realen oder fiktiven Blechdicken  $\delta$  bzw.  $\delta'$  Veränderlichkeiten entlang der Stabachse  $z$  auf, ist eine analytische Lösung kaum noch vertretbar, so daß für praktische Anwendungen der Übergang auf numerische Verfahren zwingend erscheint.

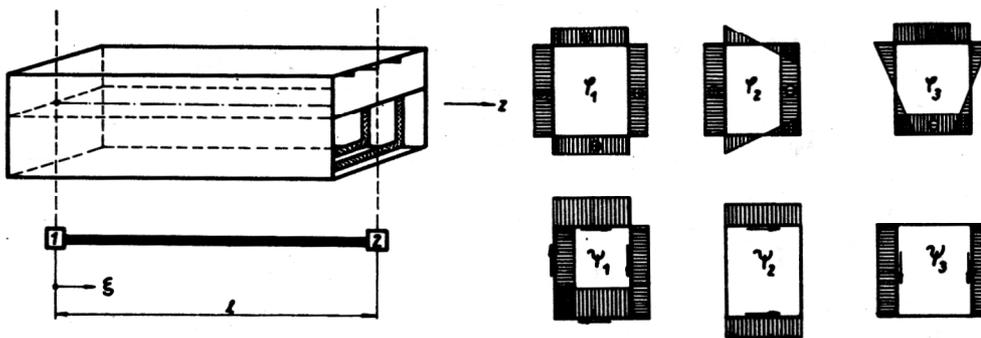
### 3. Finite-Elemente-Formulierung des Variationsproblems

Es wird ein prismatischer Abschnitt der Schale von der Länge  $l$  als ein eindimensionales finites Element definiert. Seine lokale Koordinate sei  $\xi = z/l$ , Bild 6.

Der Unterschied zum traditionellen räumlichen Balkenelement besteht darin, daß dieses gegenüber dem hier definierten Element nur eingeschränkte Verformungsmöglichkeiten besitzt. So sind für das traditionelle Balkenelement die Voraussetzungen einer starren Querschnittskontur sowie des Ebenbleibens des Querschnittes getroffen, d. h. unter dem Blickwinkel der hier vorliegenden Theorie, daß nur drei verallgemeinerte Koordinaten der Längsverschiebungen und ebenfalls nur drei Koordinaten der Querverschiebungen zugelassen sind. Es sind dies nach Bild 7 die gleichmäßige Längsverschiebung ( $\varphi_1$ ), die Drehungen des Querschnittes um seine beiden Hauptachsen ( $\varphi_2, \varphi_3$ ), die Gesamtverdrehung des Querschnittes um die Stabachse ( $\psi_1$ ) und die Querverschiebungen in beide Hauptachsenrichtungen ( $\psi_2, \psi_3$ ).

Auf Grund der wesentlich erweiterten Beschreibung der Längs- und Querverschiebungen (Abschn. 2) erhalten die hier definierten finiten Elemente erheblich komplexere Knotenvektoren.

Zur Formulierung des elastischen Potentials für das Einzelement in Matrixschreibweise werden definiert:  
Der Vektor der verallgemeinerten Verschiebungen



**Bild 6**  
Eindimensionales finites Element

**Bild 7**  
Verallgemeinerte Koordinaten des traditionellen Balkenelementes

$$\mathbf{u}(\xi) = \begin{bmatrix} \underline{u}_m(\xi) \\ \underline{u}_n(\xi) \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \underline{u}_m^T(\xi) &= [U_1(\xi) \dots U_m(\xi)] \\ \underline{u}_n^T(\xi) &= [V_1(\xi) \dots V_n(\xi)] \end{aligned} \quad (7)$$

und der Vektor der verallgemeinerten Koordinaten

$$\mathbf{w}(\xi) = \begin{bmatrix} \underline{\varphi}(\xi) \\ \underline{\psi}(\xi) \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \underline{\varphi}^T(\xi) &= [\varphi_1(\xi) \dots \varphi_m(\xi)] \\ \underline{\psi}^T(\xi) &= [\psi_1(\xi) \dots \psi_n(\xi)] \end{aligned} \quad (7)$$

der Vektor der Querbiegemomente

$$\mathbf{m}^T(\xi) = [M_1(\xi) \dots M_n(\xi)], \quad (8)$$

der Vektor der verallgemeinerten Knotenverschiebungen

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{v}_1^T = [U_{11} \dots U_{m1} \quad V_{11} \dots V_{n1}]$$

$$\mathbf{v}_2^T = [U_{12} \dots U_{m2} \quad V_{12} \dots V_{n2}],$$

die Matrix der Ansatzfunktionen

$$G(\xi) = [G_1(\xi) \mathbf{I} \quad G_2(\xi) \mathbf{I}], \quad (10)$$

in der  $\mathbf{I}$  Einheitsmatrizen mit  $m+n$  Zeilen und Spalten und  $G_1(\xi)$  sowie  $G_2(\xi)$  die gewählten Ansatzfunktionen sind, und mit der näherungsweise der Verlauf der verallgemeinerten Verschiebungen im Element beschrieben wird

$$\mathbf{u}(\xi) = G(\xi) \mathbf{v}, \quad (10')$$

sowie die Matrizen

$$L_{10} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad L_{01} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (11)$$

wobei die Einheitsmatrizen in  $L_{10}$   $m$  und in  $L_{01}$   $n$  Zeilen und Spalten haben. Hiermit wird dann das Potential des Elementes zu

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{E}{2(1-\nu^2)} \cdot \mathbf{v}^T \int_0^1 \oint [G^T L_{10} L_{10}^T \mathbf{w} \mathbf{w}^T L_{10} L_{10}^T G' + G^T L_{01} L_{01}^T \mathbf{w}' \mathbf{w}'^T L_{01} L_{01}^T G \\ & + \nu G^T L_{10} L_{10}^T \mathbf{w} \mathbf{w}'^T L_{01} L_{01}^T G + \nu G^T L_{01} L_{01}^T \mathbf{w}' \mathbf{w}^T L_{10} L_{10}^T G'] \delta ds l d \xi \mathbf{v} \\ & + \frac{E}{4(1+\nu)} \mathbf{v}^T \int_0^1 \oint [G^T L_{10} L_{10}^T \mathbf{w}' \mathbf{w}^T L_{10} L_{10}^T G + G^T L_{10} L_{10}^T \mathbf{w} \mathbf{w}'^T L_{01} L_{01}^T G' \\ & + G^T L_{01} L_{01}^T \mathbf{w} \mathbf{w}^T L_{10} L_{10}^T G + G^T L_{01} L_{01}^T \mathbf{w}' \mathbf{w}'^T L_{01} L_{01}^T G'] \delta ds l d \xi \mathbf{v} \\ & + \frac{1}{2E} \cdot \mathbf{v}^T \int_0^1 \oint \frac{1}{I} G^T L_{01} \mathbf{m} \mathbf{m}^T L_{01}^T G ds l d \xi \mathbf{v} \\ & - \frac{E \alpha_t}{1-\nu} \mathbf{v}^T \int_0^1 \oint [G^T L_{10} L_{10}^T \mathbf{w} + G^T L_{01} L_{01}^T \mathbf{w}'] T \delta ds l d \xi \\ & - \mathbf{v}^T \int_0^1 \oint [G^T L_{10} L_{10}^T \mathbf{w} p + G^T L_{01} L_{01}^T \mathbf{w} q] ds l d \xi \\ & + \frac{E \alpha_t^2}{1-\nu} \cdot \int_0^1 \oint T^2 ds l d \xi \end{aligned} \quad (12)$$

erhalten.

Die Minimalbedingung für das Potential im Element führt auf die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{f} = 0 \\ \mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{f} \end{aligned} \quad (13)$$

mit der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  und dem Belastungsvektor  $\mathbf{f}$ .

Letzterer ist durch

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & \frac{E \alpha_t}{1-\nu} \int_0^1 \oint [G^T L_{10} L_{10}^T \mathbf{w} + G^T L_{01} L_{01}^T \mathbf{w}'] T \delta ds l d \xi + \\ & + \int_0^1 \oint [G^T L_{10} L_{10}^T \mathbf{w} p + G^T L_{01} L_{01}^T \mathbf{w} q] ds l d \xi \end{aligned} \quad (14)$$

bestimmt. Seine Ermittlung hängt außer von den konkreten Belastungsfunktionen  $p(\xi, s)$ ,  $q(\xi, s)$  bzw. dem Temperaturfeld  $T(\xi, s)$  auch von den gewählten Ansatzfunktionen  $G_1(\xi)$  und  $G_2(\xi)$  ab.

Zur vereinfachten Darstellung der Steifigkeitsmatrix

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} = & \frac{E}{1-\nu^2} \int_0^1 [\mathbf{G}^T \mathbf{L}_{10} \mathbf{A} \mathbf{L}_{10}^T \mathbf{G}' + \mathbf{G}^T \mathbf{L}_{01} \mathbf{H} \mathbf{L}_{01}^T \mathbf{G} + \nu \mathbf{G}^T \mathbf{L}_{10} \mathbf{D} \mathbf{L}_{01}^T \mathbf{G} + \nu \mathbf{G}^T \mathbf{L}_{01} \mathbf{D}^T \mathbf{L}_{10}^T \mathbf{G}'] l d\xi \\
 & + \frac{E}{2(1+\nu)} \int_0^1 [\mathbf{G}^T \mathbf{L}_{10} \mathbf{B} \mathbf{L}_{10}^T \mathbf{G} + \mathbf{G}^T \mathbf{L}_{01} \mathbf{R} \mathbf{L}_{01}^T \mathbf{G}' + \mathbf{G}^T \mathbf{L}_{10} \mathbf{C} \mathbf{L}_{01}^T \mathbf{G}' + \mathbf{G}^T \mathbf{L}_{01} \mathbf{C}^T \mathbf{L}_{10}^T \mathbf{G}] l d\xi \\
 & + E \int_0^1 \mathbf{G}^T \mathbf{L}_{01} \mathbf{S} \mathbf{L}_{01}^T \mathbf{G} l d\xi
 \end{aligned} \tag{15}$$

wurden die folgenden Matrizen von verallgemeinerten Querschnittswerten eingeführt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \int \mathbf{L}_{10}^T \mathbf{w} \mathbf{w}^T \mathbf{L}_{10} \delta ds & a_{ji} &= \int \varphi_j \varphi_i \delta ds \\
 \mathbf{B} &= \int \mathbf{L}_{10}^T \mathbf{w}' \mathbf{w}'^T \mathbf{L}_{10} \delta ds & b_{ji} &= \int \varphi_j' \varphi_i' \delta ds \\
 \mathbf{C} &= \int \mathbf{L}_{10}^T \mathbf{w}' \mathbf{w}^T \mathbf{L}_{01} \delta ds & c_{jh} &= \int \varphi_j' \psi_h \delta ds \\
 \mathbf{D} &= \int \mathbf{L}_{10}^T \mathbf{w} \mathbf{w}'^T \mathbf{L}_{01} \delta ds & d_{jh} &= \int \varphi_j \psi_h' \delta ds \\
 \mathbf{H} &= \int \mathbf{L}_{01}^T \mathbf{w}' \mathbf{w}'^T \mathbf{L}_{01} \delta ds & h_{hk} &= \int \psi_h' \psi_k' \delta ds \\
 \mathbf{R} &= \int \mathbf{L}_{01}^T \mathbf{w} \mathbf{w}^T \mathbf{L}_{01} \delta ds & r_{hk} &= \int \psi_h \psi_k \delta ds \\
 \mathbf{S} &= \frac{1}{E} \int \frac{\mathbf{m} \mathbf{m}^T}{EI} ds & s_{hk} &= \frac{1}{E} \int \frac{M_h M_k}{EI} ds
 \end{aligned} \tag{16}$$

Die Elemente dieser Matrizen entsprechen in der jeweils nebenstehenden Form den in [1] und in [3] eingeführten Querschnittsgrößen. Bei ihrer Ermittlung können zur Erfassung einzelner Längsversteifungen, wie in Abschnitt 2 dargelegt, auch diskrete Summanden auftreten.

Die Struktur der obigen Matrizen wird durch die Auswahl der verallgemeinerten Koordinaten entscheidend beeinflusst. Vollständig orthogonale Koordinaten  $\varphi_i$  und  $\psi_k$  bewirken beispielsweise, daß  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{R}$  Diagonalmatrizen werden.

## 4. Aufbau von Steifigkeitsmatrix und Lastvektor

### 4.1. Allgemeine Ansatzfunktionen

Um die folgenden Matrizenoperationen allgemein durchführen zu können, werden die Einheitsmatrizen aus (10) in Untermatrizen mit den Formaten  $(m, m)$  und  $(n, n)$  zerlegt.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G} &= \left[ \mathbf{G}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right] \\
 \mathbf{G}' &= \frac{1}{l} \cdot \frac{d\mathbf{G}}{d\xi} = \frac{1}{l} \left[ \mathbf{G}'_1 \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}'_2 \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right]
 \end{aligned} \tag{17}$$

Mit (17) kann man beispielsweise den ersten Anteil der Steifigkeitsmatrix (15) ausdrücken:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{E}{1-\nu^2} \int_0^1 \mathbf{G}^T \mathbf{L}_{10} \mathbf{A} \mathbf{L}_{10}^T \mathbf{G}' l d\xi$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{E}{1-\nu^2} \int_0^1 \frac{1}{l} \begin{bmatrix} G_1' \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ G_2' \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{l} \begin{bmatrix} G_1' \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & G_2' \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{bmatrix} l d\xi \\
&= \frac{E}{l(1-\nu^2)} \int_0^1 \begin{bmatrix} G_1'^2 A & 0 & G_1' G_2' A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_1' G_2' A & 0 & G_2'^2 A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\xi
\end{aligned}$$

Werden in gleicher Weise alle weiteren Anteile von (15) entwickelt, so wird nach Zusammenfassung die Steifigkeitsmatrix in allgemeiner Form erhalten. Sie hat stets das Format  $(2m + 2n, 2m + 2n)$  und läßt sich aus den Untermatrizen  $U_{ij}$  zusammensetzen

$$K = \frac{E}{2l(1-\nu^2)} \cdot [U_{ij}] \quad i, j = 1, \dots, 4$$

$$U_{ij} = U_{ji}^T$$

(18)

$$K = \frac{E}{2l(1-\nu^2)} \int_0^1 \begin{bmatrix}
\begin{array}{c} 2 G_1'^2 A \\ + (1-\nu) l^2 G_1'^2 B \end{array} &
\begin{array}{c} 2 \nu l G_1' G_1' D \\ + (1-\nu) l G_1' G_1' C \end{array} &
\begin{array}{c} 2 G_1' G_2' A \\ + (1-\nu) l^2 G_1' G_2' B \end{array} &
\begin{array}{c} 2 \nu l G_1' G_2' D \\ + (1-\nu) l G_1' G_2' C \end{array} \\
\begin{array}{c} 2 \nu l G_1' G_1' D^T \\ + (1-\nu) l G_1' G_1' C^T \end{array} &
\begin{array}{c} 2 l^2 G_1'^2 H \\ + (1-\nu) G_1'^2 R \\ + 2(1-\nu^2) l^2 G_1'^2 S \end{array} &
\begin{array}{c} 2 \nu l G_1' G_2' D^T \\ + (1-\nu) l G_1' G_2' C^T \end{array} &
\begin{array}{c} 2 l^2 G_1' G_2' H \\ + (1-\nu) G_1' G_2' R \\ + 2(1-\nu^2) l^2 G_1' G_2' S \end{array} \\
\begin{array}{c} 2 G_1' G_2' A \\ + (1-\nu) l^2 G_1' G_2' B \end{array} &
\begin{array}{c} 2 \nu l G_1' G_2' D \\ + (1-\nu) l G_1' G_2' C \end{array} &
\begin{array}{c} 2 G_2'^2 A \\ + (1-\nu) l^2 G_2'^2 B \end{array} &
\begin{array}{c} 2 \nu l G_2' G_2' D \\ + (1-\nu) l G_2' G_2' C \end{array} \\
\begin{array}{c} 2 \nu l G_1' G_2' D^T \\ + (1-\nu) l G_1' G_2' C^T \end{array} &
\begin{array}{c} 2 l^2 G_1' G_2' H \\ + (1-\nu) G_1' G_2' R \\ + 2(1-\nu^2) l^2 G_1' G_2' S \end{array} &
\begin{array}{c} 2 \nu l G_2' G_2' D^T \\ + (1-\nu) l G_2' G_2' C^T \end{array} &
\begin{array}{c} 2 l^2 G_2'^2 H \\ + (1-\nu) G_2'^2 R \\ + 2(1-\nu^2) l^2 G_2'^2 S \end{array}
\end{bmatrix} d\xi$$

(19)

Ebenso wird der Lastvektor  $f$  aus (14) mit (17) sowie nach Einsetzen von (7) in die Form

$$f = \frac{E \alpha_t}{1-\nu} \int_0^1 \int \begin{bmatrix} G_1' \underline{\varphi} \\ l G_1' \underline{\psi}' \\ G_2' \underline{\varphi} \\ l G_2' \underline{\psi}' \end{bmatrix} T(\xi, s) \delta(s) ds d\xi$$

$$+ \int_0^1 \int \begin{bmatrix} G_1 p(\xi, s) \underline{\varphi} \\ G_1 q(\xi, s) \underline{\psi} \\ G_2 p(\xi, s) \underline{\varphi} \\ G_2 q(\xi, s) \underline{\psi} \end{bmatrix} ds l d\xi$$

gebracht.

(20)

Der Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix ist bei den vorliegenden eindimensionalen finiten Elementen recht einfach, so daß hier darauf nicht eingegangen wird.

Nach Ermittlung aller verallgemeinerten Knotenverschiebungen kann die Spannungsberechnung im Einzelement vorgenommen werden.

Ausgangspunkt dazu ist das Hookesche Gesetz, in das für  $u(z, s)$  und  $v(z, s)$  die Produktansätze (1) eingesetzt werden. Mit (7) ÷ (11) erhält man daraus in Matrizenform

$$\sigma_z(\xi, s) = \frac{E}{1-\nu^2} \mathbf{v}^T [G^T L_{10} L_{10}^T \mathbf{w} + \nu G^T L_{01} L_{01}^T \mathbf{w}'] - \frac{E \alpha_t}{1-\nu} \cdot T$$

$$\sigma_{sm}(\xi, s) = \frac{E}{1-\nu^2} \mathbf{v}^T [\nu G^T L_{10} L_{10}^T \mathbf{w} + G^T L_{01} L_{01}^T \mathbf{w}'] - \frac{E \alpha_t}{1-\nu} \cdot T$$

$$\tau_{zs}(\xi, s) = \frac{E}{2(1+\nu)} \mathbf{v}^T [G^T L_{10} L_{10}^T \mathbf{w}' + G^T L_{01} L_{01}^T \mathbf{w}]$$

Den Querspannungen  $\sigma_{sm}$  sind noch die Spannungen  $\sigma_{sb}$  aus den Querbiegemomenten

$$M(\xi, s) = \mathbf{v}^T G^T L_{01} \mathbf{m}$$

zu überlagern.

Nach Berücksichtigung von (17) erhält man dann die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \sigma_z(\xi, s) &= \frac{E}{1(1-\nu^2)} \mathbf{v}^T \cdot \begin{bmatrix} G_1' \varphi \\ \nu l G_1 \psi' \\ G_2' \varphi \\ \nu l G_2 \psi' \end{bmatrix} - \frac{E \alpha_t}{1-\nu} T(\xi, s) \\ \sigma_{sm}(\xi, s) &= \frac{E}{1(1-\nu^2)} \mathbf{v}^T \cdot \begin{bmatrix} \nu G_1' \varphi \\ l G_1 \psi' \\ \nu G_2' \varphi \\ l G_2 \psi' \end{bmatrix} - \frac{E \alpha_t}{1-\nu} T(\xi, s) \\ \tau_{zs}(\xi, s) &= \frac{E}{2(1+\nu)} \mathbf{v}^T \cdot \begin{bmatrix} G_1 \varphi' \\ G_1 \psi \\ G_2 \varphi' \\ G_2 \psi \end{bmatrix} \\ \sigma_{sb_{max}}(\xi, s) &= \pm \frac{\delta}{2l} \mathbf{v}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ G_1 \mathbf{m} \\ 0 \\ G_2 \mathbf{m} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

#### 4.2. Lineare Ansatzfunktionen

Das elastische Potential (2) enthält nur erste Ableitungen der Verschiebungen. Es sind deshalb für die Funktionen  $G_1$  und  $G_2$  mindestens lineare Ansätze zu verwenden, vgl. hierzu [4].

Hier wird zunächst von dieser einfachsten Ansatzform Gebrauch gemacht.

$$G_1 = 1 - \xi ; \quad G_2 = \xi \quad (22)$$

Es gilt deshalb:

$$\int_0^1 G_1^2 d\xi = \int_0^1 G_2^2 d\xi = \frac{1}{3}; \quad \int_0^1 G_1 G_2 d\xi = \frac{1}{6}$$

$$\int_0^1 G_1'^2 d\xi = \int_0^1 G_2'^2 d\xi = 1; \quad \int_0^1 G_1' G_2' d\xi = -1$$

$$\int_0^1 G_1 G_1' d\xi = \int_0^1 G_1' G_2 d\xi = -\int_0^1 G_1 G_2' d\xi = -\int_0^1 G_2 G_2' d\xi = -\frac{1}{2},$$

und damit werden die Steifigkeitsmatrix und der Lastvektor in der folgenden Form erhalten:

$$K = \frac{E}{12l(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 12A & -6l\nu D & -12A & -6l\nu D \\ +2l^2(1-\nu)B & -3l(1-\nu)C & +l^2(1-\nu)B & +3l(1-\nu)C \\ -6l\nu D^T & 4l^2H & 6l\nu D^T & 2l^2H \\ -3l(1-\nu)C^T & +6(1-\nu)R & -3l(1-\nu)C^T & -6(1-\nu)R \\ & +4l^2(1-\nu^2)S & & +2l^2(1-\nu^2)S \\ -12A & 6l\nu D & 12A & 6l\nu D \\ +l^2(1-\nu)B & -3l(1-\nu)C & +2l^2(1-\nu)B & +3l(1-\nu)C \\ -6l\nu D^T & 2l^2H & 6l\nu D^T & 4l^2H \\ +3l(1-\nu)C^T & -6(1-\nu)R & +3l(1-\nu)C^T & +6(1-\nu)R \\ & +2l^2(1-\nu^2)S & & +4l^2(1-\nu^2)S \end{bmatrix} \quad (19')$$

$$f = \frac{E\alpha_t}{1-\nu} \int_0^1 \phi \begin{bmatrix} -\varphi \\ 1(1-\xi)\psi' \\ \varphi \\ 1\xi\psi' \end{bmatrix} T(\xi, s) \delta ds d\xi + \int_0^1 \phi \begin{bmatrix} (1-\xi)p(\xi, s)\varphi \\ (1-\xi)q(\xi, s)\psi \\ \xi p(\xi, s)\varphi \\ \xi q(\xi, s)\psi \end{bmatrix} ds l d\xi \quad (20')$$

Bei Ansatzfunktionen höherer Ordnung ist entsprechend vorzugehen, jedoch sollen derartige Ansätze vorerst zurückgestellt werden.

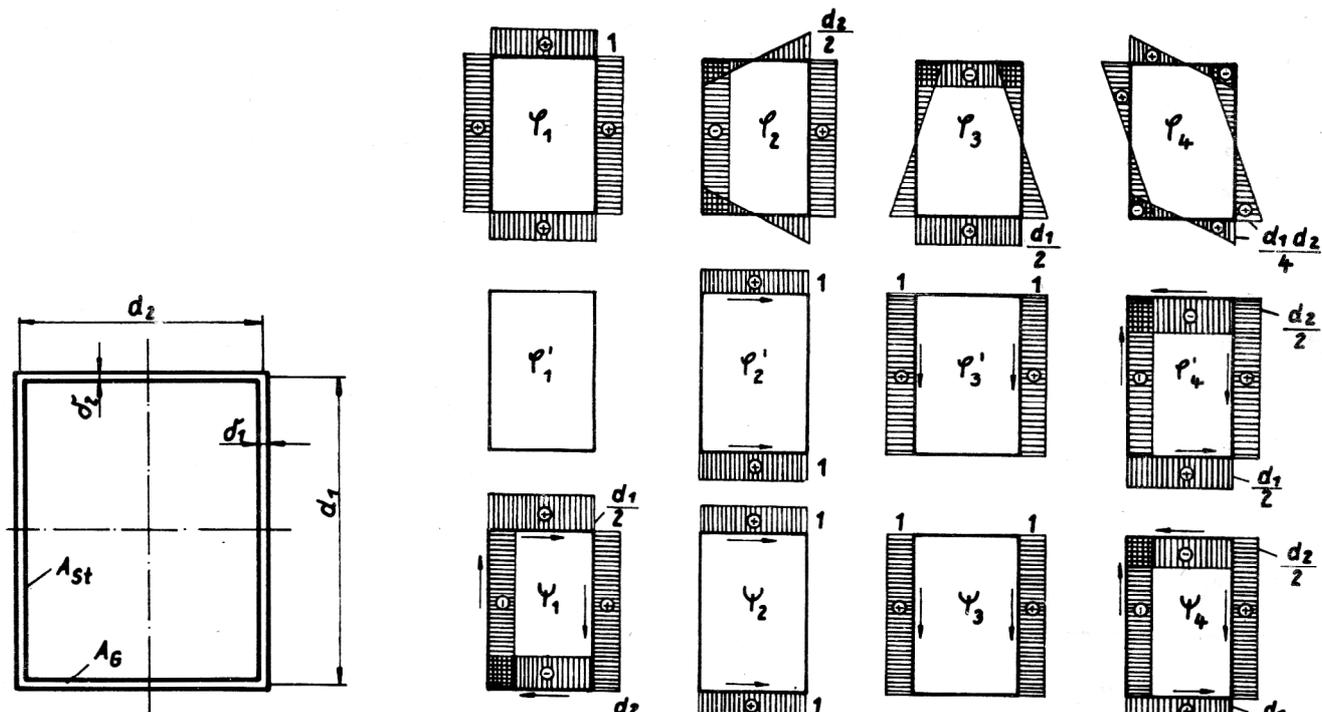
## 5. Beispiele

Es soll für eine Auswahl von Querschnitten der Aufbau der Steifigkeitsmatrix sowie des Belastungsvektors für einige Standardlastfälle gezeigt werden.

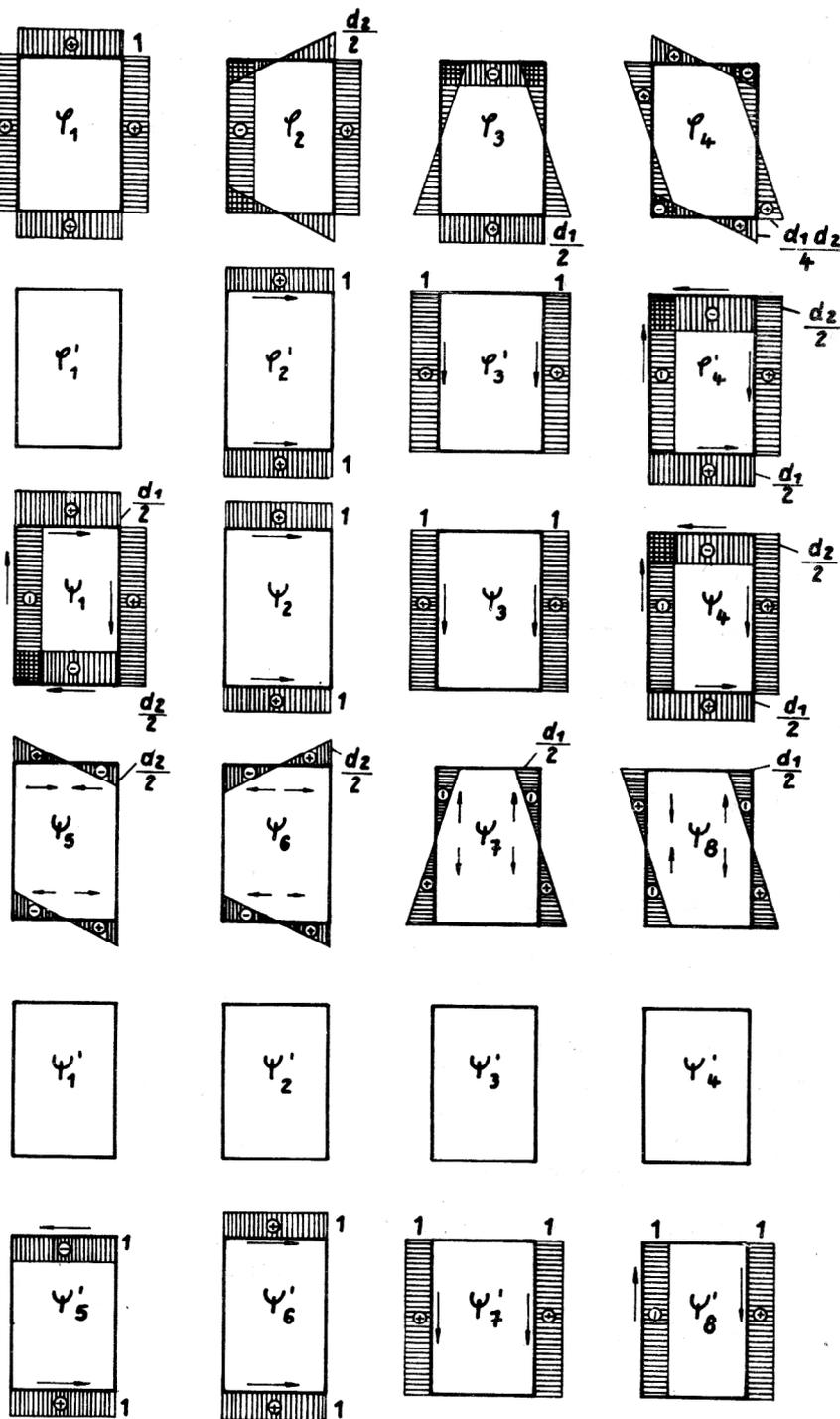
### 5.1. Einzelliger Kastenquerschnitt mit Querdehnung

Für den in Bild 8 dargestellten doppelsymmetrischen Kastenquerschnitt soll davon ausgegangen werden, daß die Längsdehnungen zwischen den Kanten linear verlaufen. Es sind aus diesem Grunde  $m = 4$  verallgemeinerte Koordinaten der Längsverschiebungen festzulegen. Hier werden dazu die in Bild 9 dargestellten Funktionen  $\varphi_1 - \varphi_4$  gewählt. Sie entsprechen bis auf  $\varphi_4$  den Formfunktionen der technischen Biegelehre nach Bild 7. Die Koordinate  $\varphi_4(s)$  beschreibt eine Verwölbung des Querschnittes.

Für die verallgemeinerten Koordinaten der Querverschiebungen  $\psi_k$  werden hier  $n = 8$  Funktionen angesetzt. Es sind dies zunächst die den 4 Freiheitsgraden des Querrahmenmechanismus zugeordneten Funktionen  $\psi_1 - \psi_4$ , die keine



**Bild 8**  
Einzelliger Kastenquerschnitt



**Bild 9**  
Verallgemeinerte Koordinaten für den einzelligen Kastenquerschnitt

Querdehnungen in den Wandelementen beinhalten und von denen die ersten drei die in Bild 7 bereits dargestellten Anteile der auch in der technischen Biegelehre enthaltenen Starrkörperverschiebung beschreiben. Die Funktion  $\psi_4$  beinhaltet die Verformung gegenüber der rechteckigen Querschnittskontur.

Für die Querdehnungen in den Wandelementen wird hier vom Ansatz konstanter Dehnungen ausgegangen, und demzufolge werden lineare  $\psi$ -Verläufe angesetzt. Diese werden jeweils für gegenüberliegende Wandelemente zu symmetrischen und antisymmetrischen Formfunktionen zusammengesetzt. Bild 9 enthält außer den verallgemeinerten Koordinaten deren Ableitungen nach der Koordinate  $s$ .

Hiermit lassen sich alle Elemente der Matrizen der verallgemeinerten Querschnittsgrößen nach (16) berechnen. Nur die verallgemeinerten Querverschiebungen  $V_4$ ,  $V_5$  und  $V_8$  ergeben Biegemomente im elementaren Querrahmen, so daß hier der Vektor (8) der Querbiegemomente das Aussehen

$$m^T = [0 \ 0 \ 0 \ M_4 \ M_5 \ 0 \ 0 \ M_8]$$

hat. Die Verläufe  $M_4(s)$ ,  $M_5(s)$  und  $M_8(s)$  werden mit baustatischen Methoden am elementaren Querrahmen ermittelt. Mit den Querschnittswerten und Abkürzungen

$$A = (A_{St} + A_G) 2 ;$$

$$b_{44} = \frac{d_1 d_2}{2} \cdot (d_1 \delta_2 + d_2 \delta_1)$$

$$I_{xx} = \frac{d_1^2}{6} \cdot (A_{St} + 3 A_G) ;$$

$$c_{41} = \frac{d_1 d_2}{2} \cdot (-d_1 \delta_2 + d_2 \delta_1)$$

$$I_{yy} = \frac{d_2^2}{6} \cdot (3 A_{St} + A_G) ;$$

$$r_{55} = \frac{d_2^2 A_G}{6}$$

$$a_{44} = \frac{A}{48} \cdot d_1^2 d_2^2 ;$$

$$r_{88} = \frac{d_1^2 A_{St}}{6}$$

$$s_{44} = \frac{96}{\frac{d_1}{I_1} + \frac{d_2}{I_2}} ;$$

$$I_1 = \frac{\delta_1^3}{12} ; \quad I_2 = \frac{\delta_2^3}{12}$$

$$s_{55} = \frac{2 d_1^2 \left( 3 \frac{d_2}{\delta_2} + \frac{d_1 \delta_2^2}{\delta_1^3} \right)}{\left( \frac{d_1^3 \delta_2}{d_2 \delta_1^3} + 3 \frac{d_1^2}{\delta_2^2} \right)^2} ;$$

$$s_{88} = \frac{2 d_2^2 \left( 3 \frac{d_1}{\delta_1} + \frac{d_2 \delta_1^2}{\delta_2^3} \right)}{\left( \frac{d_2^3 \delta_1}{d_1 \delta_2^3} + 3 \frac{d_2^2}{\delta_1^2} \right)^2} ,$$

$$n_1 = 1 - \nu$$

$$n_2 = 1 - \nu^2$$

(23)

erhält man die Matrizen der verallgemeinerten Querschnittswerte:

$$A = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2A_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2A_{St} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2A_G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2A_{St} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & 0 & 0 & b_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2A_G & 2A_{St} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_2 A_{St} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 A_G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2A_G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2A_{St} \end{bmatrix} ; \quad R = \begin{bmatrix} b_{44} & 0 & 0 & c_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2A_G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2A_{St} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & 0 & 0 & b_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{88} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{88} \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{88} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Nach (19') läßt sich damit die Gesamtsteifigkeitsmatrix K bilden. Ihr Format ist (24, 24). Sie besteht entsprechend (18) aus den Untermatrizen:

$$U_{11} = U_{33} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 12 A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 I_{yy} + 4 l^2 n_1 A_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 I_{xx} + 4 l^2 n_1 A_{St} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 a_{44} + 2 l^2 n_1 b_{44} \end{bmatrix}$$

$$U_{22} = U_{44} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 n_1 b_{44} & 0 & 0 & 6 n_1 c_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 n_1 A_G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 n_1 A_{St} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 n_1 c_{41} & 0 & 0 & 6 n_1 b_{44} + 4 l^2 n_2 s_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 l^2 A_G + 6 n_1 r_{55} + 4 l^2 n_2 s_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 n_1 r_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 n_1 r_{88} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 l^2 A_{St} + 6 n_1 r_{88} + 4 l^2 n_2 s_{88} & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{12} = U_{21}^T = -U_{34} = -U_{43}^T =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 l \nu A_G & -12 l \nu A_{St} & 0 \\ 0 & -6 l n_1 A_G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 l \nu d_2 A_{St} \\ 0 & 0 & -6 l n_1 A_{St} & 0 & -6 l \nu d_1 A_G & 0 & 0 & 0 \\ -3 l n_1 c_{41} & 0 & 0 & -3 l n_1 b_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{14} = U_{41}^T = -U_{32} = -U_{23}^T =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12\nu A_G & -12\nu A_{St} & 0 \\ 0 & 6I n_1 A_G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6I\nu d_2 A_{St} \\ 0 & 0 & 6I n_1 A_{St} & 0 & -6I\nu d_1 A_G & 0 & 0 & 0 \\ 3I n_1 c_{41} & 0 & 0 & 3I n_1 b_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{13} = U_{31} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -12 A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 I_{yy} + 2I^2 n_1 A_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 I_{xx} + 2I^2 n_1 A_{St} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 a_{44} + I^2 n_1 b_{44} \end{bmatrix}$$

$$U_{24} = U_{42} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -6 n_1 b_{44} & 0 & 0 & -6 n_1 c_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 n_1 A_G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 n_1 A_{St} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 n_1 c_{41} & 0 & 0 & -6 n_1 b_{44} + 2I^2 n_2 s_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4I^2 A_G - 6 n_1 r_{55} + 2I^2 n_2 s_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 n_1 r_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 n_1 r_{88} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4I^2 A_{St} - 6 n_1 r_{88} + 2I^2 n_2 s_{88} \end{bmatrix}$$

(25)

Der Lastvektor  $f$  wird für zwei Standardlastfälle verteilter Querbelastung und einen Temperaturlastfall entwickelt. In Längsrichtung sollen in allen 3 Fällen konstante Größen vorliegen. Entsprechend Bild 10 liegt im Lastfall 1 eine gleichmäßige Querbelastung im linken Stegblech und im Lastfall 2 eine solche im oberen Gurtblech vor. Als Temperaturlastfall wird eine Erwärmung über Eck angenommen.

$$f^{(1)T} = \frac{q_1 d_1 l}{4} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -d_2 \ 0 \ 2 \ -d_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -d_2 \ 0 \ 2 \ -d_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$f^{(2)T} = \frac{q_2 d_2 l}{4} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ d_1 \ 2 \ 0 \ -d_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ d_1 \ 2 \ 0 \ -d_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$f^{(\vartheta)T} = \frac{E \alpha_t T_o}{2(1-\nu)} \left[ \begin{array}{cccc|cccc} -A & I_{yy} & I_{xx} & -2a_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1A_G & 1A_G & 1A_{St} & -1A_{St} \\ \frac{A}{2} & -\frac{I_{yy}}{d_2} & -\frac{I_{xx}}{d_1} & \frac{2a_{44}}{d_1 d_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1A_G & 1A_G & 1A_{St} & -1A_{St} \end{array} \right] \quad (26)$$

## 5.2. Einzelliger Kastenquerschnitt ohne Querdehnung

In diesem Falle entfallen die verallgemeinerten Koordinaten  $\psi_5 - \psi_8$ , und die Matrizen der verallgemeinerten Querschnittswerte werden hier mit reduzierten Formaten erhalten, wobei die verwendeten Größen und Abkürzungen bereits in (23) festgelegt sind.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}; & B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2A_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2A_{St} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{bmatrix} \\ D &= [0]; & H &= [0]; & C &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2A_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2A_{St} & 0 \\ c_{41} & 0 & 0 & b_{44} \end{bmatrix} \\ R &= \begin{bmatrix} b_{44} & 0 & 0 & c_{41} \\ 0 & 2A_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2A_{St} & 0 \\ c_{41} & 0 & 0 & b_{44} \end{bmatrix}; & S &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

Mit (25) und  $\nu = 0$  kann dann nach (19) die Gesamtsteifigkeitsmatrix gewonnen werden. Ihr Format ist (16, 16), sie besteht entsprechend (18) aus den folgenden Untermatrizen:

$$\begin{aligned} U_{11} &= \begin{bmatrix} 12A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12I_{yy} & 0 & 0 \\ & +4l^2 A_G & & \\ 0 & 0 & 12I_{xx} & 0 \\ & & +4l^2 A_{St} & \\ 0 & 0 & 0 & 12a_{44} \\ & & & +2l^2 b_{44} \end{bmatrix}; & U_{22} &= \begin{bmatrix} 6b_{44} & 0 & 0 & 6c_{41} \\ 0 & 12A_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12A_{St} & 0 \\ 6c_{41} & 0 & 0 & 6b_{44} \\ & & & +4l^2 s_{44} \end{bmatrix} \\ = U_{33} = \frac{1}{6} & & = U_{44} = \frac{1}{6} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{12} &= U_{21}^T = -U_{14} = -U_{41}^T = \\
&= U_{32} = U_{23}^T = -U_{34} = -U_{43}^T = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6I_{AG} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6I_{A_{St}} & 0 \\ -3I_{c_{41}} & 0 & 0 & -3I_{b_{44}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$U_{13} = U_{31} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -12A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12I_{yy} + 2I^2 A_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12I_{xx} + 2I^2 A_{St} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12a_{44} + I^2 b_{44} \end{bmatrix}$$

$$U_{24} = U_{42} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -6b_{44} & 0 & 0 & -6c_{41} \\ 0 & -12A_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12A_{St} & 0 \\ -6c_{41} & 0 & 0 & -6b_{44} + 2I^2 s_{44} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Der Lastvektor  $f$  nimmt für die drei Standardlastfälle entsprechend Bild 10 hier die folgende Form an:

$$f^{(1)T} = \frac{q_1 d_1 l}{4} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -d_2 \ 0 \ 2 \ -d_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -d_2 \ 0 \ 2 \ -d_2]$$

$$f^{(2)T} = \frac{q_2 d_2 l}{4} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ d_1 \ 2 \ 0 \ -d_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ d_1 \ 2 \ 0 \ -d_1]$$

$$f^{(\vartheta)T} = \frac{E \alpha_t T_o}{2} \left[ \begin{array}{cccccccccccc} -A & I_{yy} & I_{xx} & -2a_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{2} & -\frac{I_{yy}}{d_2} & -\frac{I_{xx}}{d_1} & \frac{2a_{44}}{d_1 d_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (29)$$

### 5.3. Einzelliger Kastenquerschnitt mit Schubverwölbung

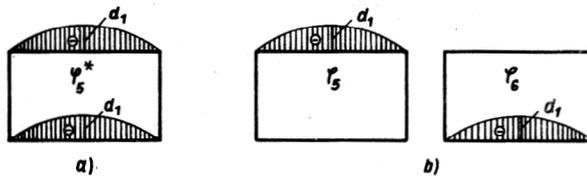
Bei der Behandlung von sehr breiten Kastenträgern ( $d_2 > 2d_1$ ) wird es erforderlich, zumindest in den Gurtwänden von der Annahme eines linearen Verlaufes der Längsdeformationen zwischen den Kanten abzugehen. Bleibt die Beanspruchung vorwiegend auf Biegebeanspruchungen des Gesamtträgers in der Stegeebene beschränkt, so kann dies durch Hinzufügen einer antimetrischen verallgemeinerten Längsverschiebungsordinate  $\varphi_5^*$  entsprechend Bild 11 a Berücksichtigung finden. Für allgemeinere Belastungen sind zwei unabhängige zusätzliche verallgemeinerte Koordinaten  $\varphi_5$  und  $\varphi_6$  nach Bild 11 b anzusetzen. Dieser Weg soll hier gegangen werden, wobei auf eine vollständige Orthogonalisierung aller Koordinaten einschließlich  $\varphi_5$  und  $\varphi_6$  verzichtet wird. Gleichzeitig sollen die Querdehnungen der Wandelemente unberücksichtigt bleiben.

Es ist demzufolge mit den verallgemeinerten Koordinaten  $\varphi_1 - \varphi_4$  und  $\psi_1 - \psi_4$  nach Bild 9 sowie  $\varphi_5$  und  $\varphi_6$  nach Bild 11 b zu rechnen. Werden zusätzlich zu (23) noch die Querschnittsgrößen

$$a_{55} = \frac{8}{15} d_1^2 A_G; \quad a_{15} = \frac{2}{3} d_1 A_G; \quad b_{55} = \frac{16}{3} \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2 A_G \quad (30)$$



**Bild 10**  
Standardlastfälle



**Bild 11**  
Verallgemeinerte Koordinaten für Schubverwölbungen mit quadratischem Ansatz  
a) antisymmetrische Verwölbung von Ober- und Untergurt  
b) voneinander unabhängige Verwölbung von Ober- und Untergurt

vereinbart, dann erhält man hier die folgenden Matrizen der verallgemeinerten Querschnittswerte:

$$A = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & a_{15} & -a_{15} \\ 0 & I_{yy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx} & 0 & -\frac{8}{5} a_{55} & -\frac{8}{5} a_{55} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ a_{15} & 0 & -\frac{8}{5} a_{55} & 0 & a_{55} & 0 \\ -a_{15} & 0 & -\frac{8}{5} a_{55} & 0 & 0 & a_{55} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2A_G & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2A_{St} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2A_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2A_{St} & 0 \\ c_{41} & 0 & 0 & b_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = [0]; \quad H = [0]$$

$$R = \begin{bmatrix} b_{44} & 0 & 0 & c_{41} \\ 0 & 2A_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2A_{St} & 0 \\ c_{41} & 0 & 0 & b_{44} \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Hiermit wird nach (19') mit  $\nu = 0$  die Steifigkeitsmatrix aufgebaut. Ihr Format ist (20, 20), sie besteht entsprechend (18) aus folgenden Untermatrizen:

$$U_{11} = U_{33} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{bmatrix} 12 A & 0 & 0 & 0 & 12 a_{15} & -12 a_{15} \\ 0 & 12 I_{yy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & +4l^2 A_G & & & & \\ 0 & 0 & 12 I_{xx} & 0 & -\frac{96}{5} a_{55} & -\frac{96}{5} a_{55} \\ & & +4l^2 A_{St} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 12 a_{44} & 0 & 0 \\ & & & +2l^2 b_{44} & & \\ 12 a_{15} & 0 & -\frac{96}{5} a_{55} & 0 & 12 a_{55} & 0 \\ & & & & +2l^2 b_{55} & \\ -12 a_{15} & 0 & -\frac{96}{5} a_{55} & 0 & 0 & 12 a_{55} \\ & & & & & +2l^2 b_{55} \end{bmatrix}$$

$$U_{13} = U_{31} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{bmatrix} -12 A & 0 & 0 & 0 & -12 a_{15} & 12 a_{15} \\ 0 & -12 I_{yy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & +2l^2 A_G & & & & \\ 0 & 0 & -12 I_{xx} & 0 & \frac{96}{5} a_{55} & \frac{96}{5} a_{55} \\ & & +2l^2 A_{St} & & & \\ 0 & 0 & 0 & -12 a_{44} & 0 & 0 \\ & & & +l^2 b_{44} & & \\ -12 a_{15} & 0 & \frac{96}{5} a_{55} & 0 & -12 a_{55} & 0 \\ & & & & +l^2 b_{55} & \\ 12 a_{15} & 0 & \frac{96}{5} a_{55} & 0 & 0 & -12 a_{55} \\ & & & & & +l^2 b_{55} \end{bmatrix}$$

$$U_{23} = U_{32}^T = U_{21} = U_{12}^T = -U_{41} = -U_{14}^T =$$

$$= -U_{43} = -U_{34}^T = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3lc_{41} & 0 \\ 0 & -6lA_G & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6lA_{St} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3lb_{44} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{22} = U_{44} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{bmatrix} 6b_{44} & 0 & 0 & 6c_{41} \\ 0 & 12A_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12A_{St} & 0 \\ 6c_{41} & 0 & 0 & 6b_{44} + 4l^2 s_{44} \end{bmatrix}$$

$$U_{24} = U_{42} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -6b_{44} & 0 & 0 & -6c_{41} \\ 0 & -12A_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12A_{St} & 0 \\ -6c_{41} & 0 & 0 & -6b_{44} \\ & & & +2I^2 s_{44} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Für die drei Standardlastfälle nach Bild 10 wird hier der Lastvektor  $f$ :

$$f(1)^T = \frac{q_1 d_1 l}{4} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -d_2 \ 0 \ 2 \ -d_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -d_2 \ 0 \ 2 \ -d_2]$$

$$f(2)^T = \frac{q_2 d_2 l}{4} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ d_1 \ 2 \ 0 \ -d_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ d_1 \ 2 \ 0 \ -d_1]$$

$$f(\vartheta)^T = \frac{E \alpha_t T_0}{2} \left[ \begin{array}{cccccccccccccccc} -A & I_{yy} & I_{xx} & -2a_{44} & -2d_1 A_G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{2} & -\frac{I_{yy}}{d_2} & -\frac{I_{xx}}{d_1} & \frac{2a_{44}}{d_1 d_2} & \frac{2d_1 A_G}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (33)$$

#### 5.4. Zweizelliger Kastenquerschnitt

Der in Bild 12 dargestellte einfachsymmetrische zweizellige Kastenquerschnitt erfordert, sofern die Querdehnungen in den Wandelementen unberücksichtigt bleiben können und keine Schubverwölbungen der Wandelemente einbezogen werden sollen (linearer Verlauf der Längsdeformationen zwischen den Kanten), das Ansetzen von  $m = 6$  und  $n = 5$  verallgemeinerten Koordinaten der Längs-, bzw. Querverschiebungen. Es werden dazu die Funktionensysteme nach Bild 13 ausgewählt.

Auch hier werden jeweils drei verallgemeinerte Koordinaten  $\varphi$  ( $\varphi_1 \div \varphi_3$ ), bzw. drei verallgemeinerte Koordinaten  $\psi$  ( $\psi_1 - \psi_3$ ) verwendet, die einen ebenbleibenden Querschnitt, bzw. eine starre Querschnittskontur beinhalten. Querschnittsverwölbungen werden durch die Koordinaten  $\varphi_4 - \varphi_6$ , und zwar in symmetrischen und antisymmetrischen Formen, beschrieben.

Da nur die den verallgemeinerten Koordinaten  $\psi_4$  und  $\psi_5$  entsprechenden Verformungszustände von Querschnittskonturdeformationen begleitet sind, existieren nur die Querbiegemomente  $M_4(s)$  und  $M_5(s)$ , d. h. deren Vektor (8) hat hier das Aussehen:

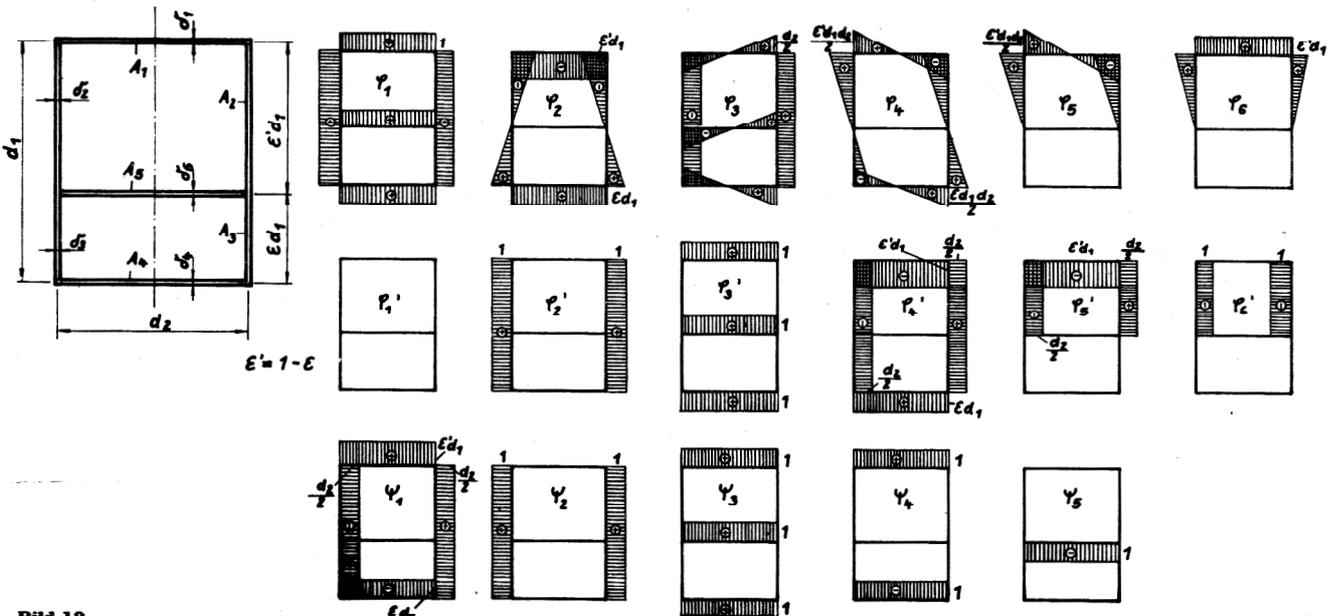


Bild 12  
Zweizelliger Kastenquerschnitt

Bild 13  
Verallgemeinerte Koordinaten für den zweizelligen Kastenquerschnitt

$$\mathbf{m}^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad M_4(s) \quad M_5(s)]$$

Eine vollständige Orthogonalisierung der  $\varphi_i$  und  $\psi_k$  würde einen vereinfachten Aufbau der Steifigkeitsmatrix bewirken, aber gleichzeitig die mechanische Anschaulichkeit der verallgemeinerten Verschiebungen z. T. wesentlich verringern. Aus diesem Grunde wird hier keine weitere Orthogonalisierung vorgenommen.

Man erhält dann die Matrizen der verallgemeinerten Querschnittsgrößen in der folgenden Form:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & a_{26} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 \\ 0 & 0 & a_{34} & a_{44} & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & a_{35} & a_{45} & a_{55} & 0 \\ a_{16} & a_{26} & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 & 0 & b_{26} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} & b_{35} & 0 \\ 0 & 0 & b_{34} & b_{44} & b_{45} & 0 \\ 0 & 0 & b_{35} & b_{45} & b_{55} & 0 \\ 0 & b_{26} & 0 & 0 & 0 & b_{66} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & 0 & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & 0 & c_{43} & c_{44} & 0 \\ c_{51} & 0 & c_{53} & c_{54} & 0 \\ 0 & c_{62} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = [0]; \quad \mathbf{H} = [0]$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & r_{13} & r_{14} & 0 \\ 0 & r_{22} & 0 & 0 & 0 \\ r_{13} & 0 & r_{33} & r_{34} & r_{35} \\ r_{14} & 0 & r_{34} & r_{44} & 0 \\ 0 & 0 & r_{35} & 0 & r_{55} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & s_{45} \\ 0 & 0 & 0 & s_{45} & s_{55} \end{bmatrix}$$

(34)

Alle darin enthaltenen Größen sind durch die nachstehenden Beziehungen festgelegt.

$$a_{11} = A = A_1 + 2A_2 + 2A_3 + A_4 + A_5$$

$$a_{12} = d_1 [-\epsilon' (A_1 + A_2) + \epsilon (A_3 + A_4)]$$

$$a_{16} = \epsilon' d_1 (A_1 + A_2)$$

$$a_{22} = \frac{d_1^2}{3} [\epsilon'^2 (3A_1 + 2A_2) + \epsilon^2 (2A_3 + 3A_4)]$$

$$a_{33} = I_{yy} = \frac{d_2^2}{12} \cdot (A_1 + 6A_2 + 6A_3 + A_4 + A_5)$$

$$a_{34} = \frac{d_1 d_2^2}{12} [-\epsilon' (A_1 + 3A_2) + \epsilon (3A_3 + A_4)]$$

$$a_{35} = -\frac{d_1 d_2^2}{12} \epsilon' (A_1 + 3A_2)$$

$$a_{44} = \frac{d_1^2 d_2^2}{12} [\epsilon'^2 (A_1 + 2A_2) + \epsilon^2 (2A_3 + A_4)]$$

$$a_{45} = a_{55} = \frac{d_1^2 d_2^2}{12} \epsilon'^2 (A_1 + 2A_2)$$

$$a_{66} = -a_{26} = \frac{\epsilon'^2 d_1^2}{3} (3A_1 + 2A_2)$$

$$b_{22} = c_{22} = r_{22} = 2(A_2 + A_3)$$

$$b_{26} = -b_{66} = c_{62} = -2A_2$$

$$b_{33} = c_{33} = r_{33} = A_1 + A_4 + A_5$$

$$b_{34} = -c_{31} = c_{43} = -r_{13} = d_1 (-\epsilon' A_1 + \epsilon A_4)$$

$$b_{35} = c_{53} = c_{54} = -d_1 \epsilon' A_1$$

$$b_{44} = r_{11} = d_1^2 (\epsilon'^2 A_1 + \epsilon^2 A_4) + \frac{d_2^2}{2} (A_2 + A_3)$$

$$b_{45} = b_{55} = \epsilon'^2 d_1^2 A_1 + \frac{d_2^2}{2} A_2$$

$$c_{34} = r_{34} = A_1 - A_4$$

$$c_{35} = r_{35} = -r_{55} = -A_5$$

$$c_{41} = -d_1^2 (\epsilon'^2 A_1 + \epsilon^2 A_4) + \frac{d_2^2}{2} (A_2 + A_3)$$

$$c_{44} = -r_{14} = -d_1 (\epsilon' A_1 + \epsilon A_4)$$

$$c_{51} = -\epsilon'^2 d_1^2 A_1 + \frac{d_2^2}{2} A_2$$

$$r_{44} = 2(A_1 + A_4)$$

(35)

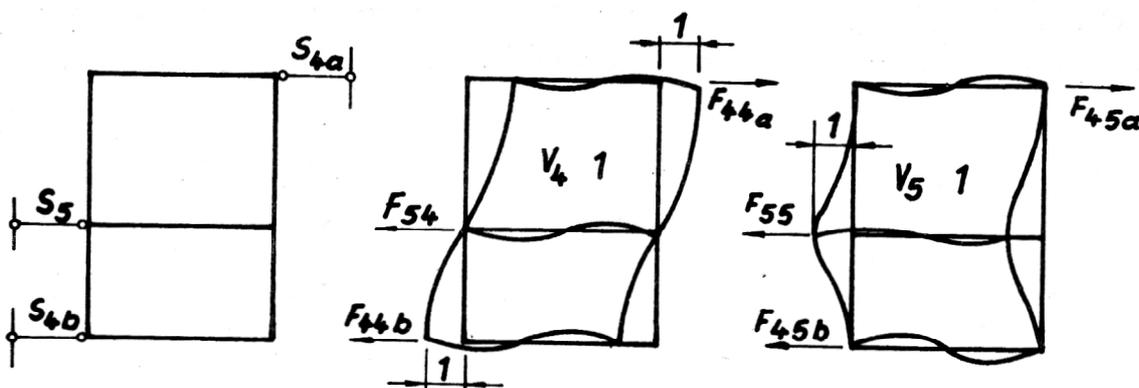


Bild 14  
Ermittlung der Koeffizienten  $s_{44}$ ,  $s_{45}$  und  $s_{55}$

$$s_{44} = \frac{1}{E} (F_{44a} + F_{44b}); \quad s_{45} = \frac{1}{E} (F_{45a} + F_{45b}) = \frac{1}{E} F_{54}; \quad s_{55} = \frac{1}{E} F_{55}$$

Bei der Bestimmung der Koeffizienten  $s_{44}$ ,  $s_{45}$  und  $s_{55}$  wird davon ausgegangen, daß  $s_{hk}$  auf Grund der Gleichsetzung innerer und äußerer Arbeiten am elementaren Querrahmen auch als  $\frac{1}{E}$ -fache Stützkraft in einem Stützstab  $S_h$  infolge  $V_k = 1$  gedeutet werden kann [1]. Hier ergibt sich daraus ein Vorgehen nach Bild 14. Die Berechnung der Teilzustände  $V_4 = 1$  und  $V_5 = 1$  erfolgt zweckmäßig mit der Deformationsmethode der Baustatik. Man erhält dabei auch in einfacher Weise die Momentenverläufe  $M_4(s)$  und  $M_5(s)$ . Auf die weitere Zusammenstellung der Untermatrizen der Elementsteifigkeitsmatrix entsprechend (18), bzw. (19') soll hier verzichtet werden. Ihr Format ist (22, 22).

## 6. Zusammenfassung

Zur Berechnung der Spannungen und Formänderungen von stabförmigen dünnwandig geschlossenen Systemen, die sowohl längs als auch quer ausgesteift sein können, werden spezielle finite Elemente entwickelt. Als Grundlage dazu dient eine erweiterte halbmomentenfreie Schalentheorie.

Gegenüber ihrer bisherigen, durch Wlassow begründeten Form werden hier auch die Querdehnungen in den Wandelementen einbezogen und außerdem stationäre Temperaturfelder als Belastungen zugelassen.

Ausgehend vom elastischen Potential dieses erweiterten Schalenmodells wird die Finite-Elemente-Formulierung des Variationsproblems vorgenommen und Elementsteifigkeitsmatrix und Lastvektor für einen als finites Element definierten Schalenabschnitt allgemein entwickelt.

Durch die Annahme von Formfunktionen für die Längs- und Querverschiebungen in Gestalt der verallgemeinerten Koordinaten werden sehr komplexe Knotenvektoren für das im Prinzip eindimensionale finite Element erhalten.

Als Ansatzfunktionen im Element gelangen lineare Funktionen zur Verwendung. Unter dieser Voraussetzung wird der Aufbau der Elementsteifigkeitsmatrix aus 7 Matrizen verallgemeinerter Querschnittsgrößen sowie der des Lastvektors entwickelt.

Als Anwendungsbeispiele sind die Elementsteifigkeitsmatrizen für den einzelligen Kastenquerschnitt mit und ohne Querdehnungseinfluß sowie mit Berücksichtigung von Schubverwölbungen in einzelnen Wandelementen angegeben. Für 3 Standardlastfälle werden jeweils die Lastvektoren dargestellt.

Der Aufbau der Matrizen der verallgemeinerten Querschnittsgrößen erfolgt auch für einen einfachsymmetrischen zweizelligen Kastenquerschnitt.

Bei allen vorggeführten Beispielen wurden sowohl vollorthogonale als auch nicht orthogonale Systeme verallgemeinerter Koordinaten verwendet. Der mechanischen Anschaulichkeit der verallgemeinerten Verschiebungen wird gegenüber der einfacheren Struktur der Steifigkeitsmatrix der Vorzug gegeben.

Im vorliegenden Beitrag wurde eine Beschränkung auf die Darstellung der allgemeinen Gleichungen vorgenommen. Über die Ergebnisse von Vergleichsrechnungen wird in einer weiteren Arbeit berichtet.

## LITERATUR

- [1] Wlassow, W. S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Akademie-Verlag Berlin 1958.
- [2] Postnov, V. A.: Torsion der Schiffe. Schiffbautechnisches Symposium 1980 Hauptvortrag Schiffbauforschung 20 2/1981.
- [3] Kissing, W.: Zur Behandlung dünnwandig geschlossener Konstruktionen mit einer verallgemeinerten halbmomentenfreien Schalentheorie nach Wlassow. Z. Technische Mechanik Heft 1/1982.
- [4] Altenbach, J. und Sacharow, A. (Herausgeber): Die Methode der Finiten Elemente in der Festkörpermechanik. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1982.

### Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr. sc. techn. Johannes 'Altenbach  
Technische Hochschule „Otto von Guericke“  
Sektion Maschinenbau  
3010 Magdeburg  
PSF 124

Doz. Dr. sc. techn. Wolfgang Kissing  
Ingenieurhochschule  
2400 Wismar  
Philipp-Müller-Straße