

# Näherungsweise Bestimmung der Kraft-Verschiebungskennlinie gerader oder schwachgekrümmter Träger bei großer Verformung

Johannes Beyreuther und Manfred Schumann

## 1. Näherung der Biegelinie durch Kreisbogen

Glatte Kurven können in einfacher Weise grafisch durch Kreisbogenstücke angenähert werden [1]. Diese Methode läßt sich ohne weiteres analytisch beschreiben und führt auf ein numerisches Verfahren zur Ermittlung des Kurvenverlaufes aus gegebenen Krümmungsradien.

Bei der Behandlung des Biegeproblems schlanker Träger (insbesondere im Falle großer Verformungen) bietet dieses Verfahren gewisse Vorteile; denn zum einen ist die Krümmungsänderung des Trägers bei gegebenem Stoffgesetz für jeden Punkt der Trägerachse aus dem Biegemoment berechenbar, zum anderen läßt sich die für die Formulierung der Randbedingungen erforderliche Bogenlänge der Biegelinie auf einfache Weise relativ genau angeben.

### 1.1. Interpolation

Auf einer glatten Kurve seien in gewissen kleinen Abständen die Punkte  $P_i$  mit den Koordinaten  $x_i, y_i$  und den Anstiegswerten  $y'_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) gegeben. Bild 1 zeigt das Kurvenstück zwischen den Punkten  $P_i$  und  $P_{i+1}$  mit den Kurvennormalen  $\overline{P_i Q_1}$  und  $\overline{P_{i+1} Q_1}$ , die sich in  $Q_1$  unter dem Winkel  $\Delta\varphi_i$  schneiden. Mit  $Q_2$  bezeichnen wir den Schnittpunkt des Kreises durch die

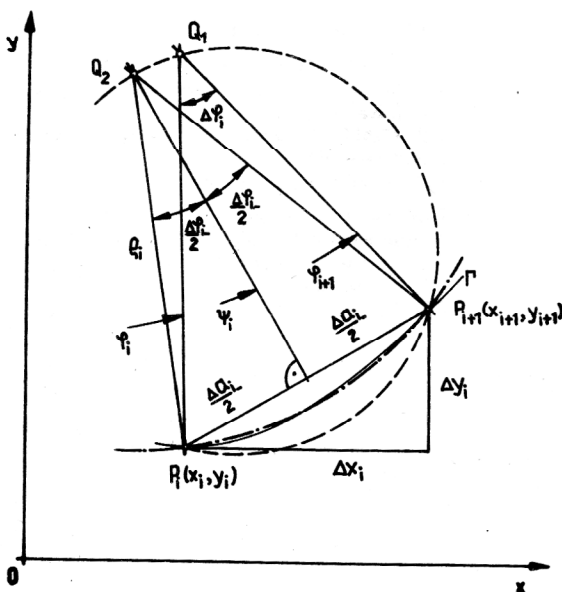


Bild 1  
Interpolation einer Kurve  $\Gamma$  durch Kreisbogen

Punkte  $P_i, P_{i+1}, Q_1$  mit der Mittelsenkrechten der Strecke  $\overline{P_i P_{i+1}}$ .

Zur Interpolation der Kurve zwischen  $P_i$  und  $P_{i+1}$  schlagen wir um den Punkt  $Q_2$  einen Kreisbogen mit dem Radius  $\rho_i = \overline{P_i Q_2}$ . Dieser schneidet bei monotoner Krümmungsabhängigkeit die gegebene Kurve im betrachteten Intervall in mindestens drei Punkten, seine Krümmung  $\kappa_i = \frac{1}{\rho_i}$  liegt zwischen den Krümmungswerten der

Kurve in den Punkten  $P_i$  und  $P_{i+1}$ .

Für die aus Bild 1 ersichtlichen geometrischen Größen gelten folgende Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i &= \arctan y'_i, & \varphi_{i+1} &= \arctan y'_{i+1} \\ \Delta\varphi_i &= \varphi_{i+1} - \varphi_i, \\ \Delta x_i &= x_{i+1} - x_i, & \Delta y_i &= y_{i+1} - y_i \\ \psi_i &= \arctan \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \end{aligned} \right\} (1.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta a_i &= \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \\ \rho_i &= \frac{\Delta a_i}{2 \sin(\Delta\varphi_i/2)} \\ \Delta x_i &= 2 \rho_i \sin(\Delta\varphi_i/2) \cos \psi_i \\ \Delta y_i &= 2 \rho_i \sin(\Delta\varphi_i/2) \sin \psi_i \end{aligned} \right\} (1.2)$$

### 1.2. Einschrittverfahren

Es sei nun  $y = f(x)$  eine gesuchte Funktion mit bekannter stetiger Krümmung

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \kappa(x, y, y') \quad (1.3)$$

und den Anfangswerten

$$y(x_0) = 0 \quad (1.4)$$

$$y'(x_0) = 0. \quad (1.5)$$

Bei geeigneter Wahl des Krümmungsradius  $\rho_i$  und des Winkels  $\psi_i$  für jedes Intervall liefern die Gln. (1.2) bei vorgegebenem Bogenelement  $\Delta s_i$  und daraus folgendem

$\Delta \varphi_i = \frac{\Delta s_i}{\rho_i}$  die Zuwächse der Koordinaten im i-ten Schritt zu

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_i &= 2 \rho_i \sin \frac{\Delta s_i}{2 \rho_i} \cos \psi_i \\ \Delta y_i &= 2 \rho_i \sin \frac{\Delta s_i}{2 \rho_i} \sin \psi_i \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Für die praktische Durchführung der Rechnung genügt es zumeist, wenn gleichgroße Bogenelemente  $\Delta s_i = \Delta s$  verwendet werden, der Krümmungsradius  $\rho_i$  näherungsweise in der Mitte des Intervalles aus

$$\frac{1}{\rho_i} = \kappa_i = \kappa \left( x_i + \frac{\Delta x_{i-1}}{2}, \dots \right) \quad (1.7)$$

berechnet und näherungsweise

$$\psi_i = \varphi_i + \frac{1}{2} \kappa_i \Delta s \quad (1.8)$$

gesetzt wird.

Bessere Ergebnisse erhält man durch

$$\left. \begin{aligned} \kappa_i &= \frac{1}{2} [\kappa(x_i, \dots) + \kappa(x_i + \Delta x_{i-1}, \dots)] \\ \psi_i &= \varphi_i + \frac{\Delta s}{2(1+\alpha)} [\kappa_i + \alpha \kappa(x_i, \dots)] \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

mit einer reellen Zahl  $\frac{1}{2} \leq \alpha = \alpha_{\text{opt}} \leq 2$  bei zweimaliger  $\Delta x$ -,  $\Delta y$ -Bestimmung im Sinne eines Prädiktor-Korrektor-Verfahrens.

## 2. Zusammenhang zwischen Biegemoment und Krümmungsänderung des Trägers

Bei schlanken Trägern ist für den Fall hinreichend kleiner Krümmungsänderung in guter Näherung auch im plastischen Bereich die Bernoullische Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte gültig. Damit stellt sich ein linearer Dehnungsverlauf über den Querschnitt ein, und der Zusammenhang zwischen der Dehnung  $\epsilon$  und der Krümmungsänderung  $\kappa$  lautet

$$\epsilon = \kappa z. \quad (2.1)$$

Hierbei ist  $z$  eine von der neutralen Faser aus gemessene Koordinate in der Querschnittsfläche  $A$ . Ist weiter

$$\sigma = f(\epsilon) \quad (2.2)$$

das nichtlineare Stoffgesetz im einachsigen Spannungszustand, so ergibt sich aus

$$M = \int_A \sigma \cdot z \, dA = \int_A f(\kappa z) z \, dA \quad (2.3)$$

eine nichtlineare Beziehung zwischen dem Biegemoment  $M$  und der Krümmungsänderung  $\kappa$  für monoton veränderliche  $M$ - bzw.  $\kappa$ -Werte.

Im weiteren beziehen wir uns auf Träger mit Rechteckquerschnitt der Breite  $b$  sowie der Höhe  $h$  und wählen als Verknüpfung zwischen der Spannung  $\sigma$  und der Dehnung  $\epsilon$  ein elastisch-plastisches Stoffgesetz mit linearer Verfestigung nach folgender Vorschrift

$$\sigma = \begin{cases} E \cdot \epsilon & \text{für } |\epsilon| \leq \epsilon_s \\ \text{sign} \epsilon \cdot E [\epsilon_s + \frac{1}{p} (|\epsilon| - \epsilon_s)] & \text{für } |\epsilon| > \epsilon_s \end{cases} \quad (2.4)$$

Hierbei bezeichnet  $\epsilon_s = \frac{\sigma_s}{E}$  den Dehnungswert bei Erreichen der Streckgrenze  $\sigma_s$ ,  $E$  den Elastizitätsmodul und  $p$  einen Verfestigungsparameter, der das Verhältnis des Kennlinienanstieges im elastischen und im plastischen Bereich angibt. Wie erkennbar, entspricht  $p = 1$  einem durchgehend elastischem Verhalten, während  $p \rightarrow \infty$  auf das elastisch-plastische Stoffgesetz ohne Verfestigung führt.

Unter Beachtung des linearen Dehnungsverlaufes nach Gl. (2.1) entsteht so ein stückweise linearer Spannungsverlauf im Trägerquerschnitt. Wegen Gl. (2.4) ist hinsichtlich der  $M$ -Bestimmung mit Hilfe von Gl. (2.3) zu unterscheiden, ob man sich im elastischen oder im plastischen Bereich befindet. Die Bereichsgrenze wird durch den querschnitts- und materialabhängigen Grenzwert des Momentes

$$M_{\text{elgr}} = \frac{bh^2 \sigma_s}{6} \quad (2.5)$$

festgelegt, dem ein entsprechender Krümmungsgrenzwert

$$\kappa_{\text{elgr}} = \frac{2 \sigma_s}{h E} \quad (2.6)$$

zugeordnet ist.

Im elastischen Bereich  $|\kappa| < \kappa_{\text{elgr}}$  gilt dann

$$M = \frac{Ebh^3}{12} \kappa$$

im plastischen Bereich  $\kappa_{\text{elgr}} < \kappa$  dagegen

$$M = Eb\kappa \left\{ \frac{h^3}{12p} + \left[ \frac{1}{4} \cdot \frac{\sigma_s h^2}{E\kappa} - \frac{1}{3} \left( \frac{\sigma_s}{E\kappa} \right)^3 \right] \left( 1 - \frac{1}{p} \right) \right\}.$$

Diese Gln. werden unter Benutzung der abkürzenden Bezeichnungen

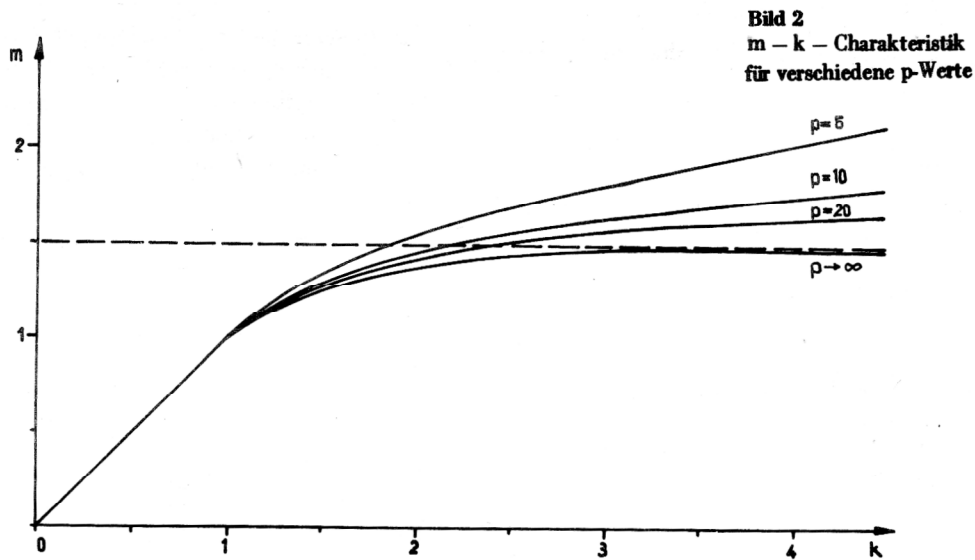
$$m = \frac{M}{M_{\text{elgr}}} \quad \text{und} \quad k = \frac{\kappa}{\kappa_{\text{elgr}}} \quad (2.7)$$

in eine dimensionslose Schreibweise überführt. Es ergeben sich in dem durch  $|k| < 1$  festgelegten elastischen Bereich

$$m = k \quad (2.8)$$

und in dem durch  $k > 1$  festgelegten plastischen Bereich

$$m = \frac{k}{p} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{p} \right) \left( 3 - \frac{1}{k^2} \right). \quad (2.9)$$



Von Gl. (2.9) lassen sich zwei Sonderfälle angeben: Liegt keine Verfestigung vor, ergibt sich mit  $p \rightarrow \infty$

$$m = \frac{3}{2} - \frac{1}{2k^2}, \quad (2.10)$$

und für große k geht Gl. (2.9) näherungsweise über in

$$m \approx \frac{k}{p} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{p}\right). \quad (2.11)$$

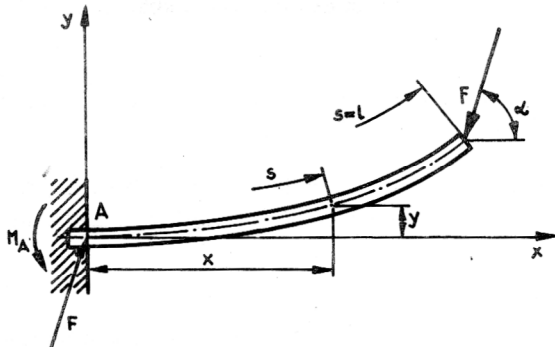
Bild 2 zeigt den funktionalen Zusammenhang zwischen m und k für verschiedene p-Werte.

### 3. Bestimmung der Biegelinie

Wir betrachten nun einen eingespannten schlanken Träger der Länge l gemäß Bild 3, dessen Krümmung im unverformten Zustand als Funktion  $\kappa_u = \kappa_u(s)$  vorgegeben ist, und der durch eine richtungstreue Kraft F am Ende belastet sein möge. Bei bekanntem Einspannmoment  $M_A$  läßt sich das Biegemoment M für jeden Punkt der Trägerachse in der Form

$$M = F(x \sin \alpha - y \cos \alpha) - M_A \quad (3.1)$$

oder in dimensionsloser Schreibweise



**Bild 3**  
vorgekrümmter Kragträger

$$m = \frac{F}{M_{elgr}} (x \sin \alpha - y \cos \alpha) - m_A \quad (3.2)$$

angeben.

Durch Einsetzen des Ausdruckes (3.2) in die Gln. (2.8) bzw. (2.9) und Auflösen nach k (im plastischen Bereich numerisch) ist damit die Krümmungsänderung für jeden Punkt der Trägerachse berechenbar. Die Gesamtkrümmung der Biegelinie ergibt sich dann als Summe der dimensionslos gemachten Anfangskrümmung und der Krümmungsänderung k.

Nummehr kann die unter Abschnitt 1. beschriebene Näherung durch Kreisbogen zum Einsatz kommen. In der Regel führt jedoch die Aufgabenstellung (insbesondere bei großen Verformungen) auf die Lösung eines Randwertproblems mit einer zunächst noch unbekanntem Größe bei  $s = 0$  und einer im Verlaufe der Lösung zu befriedigenden Bedingung am Trägerende. Im Falle des Trägers nach Bild 3 beispielsweise ist das Einspannmoment  $M_A$  bei gegebener Kraft F von der Verschiebung des Kraftangriffspunktes abhängig und muß so bestimmt werden, daß für  $s = l$  die Bedingung

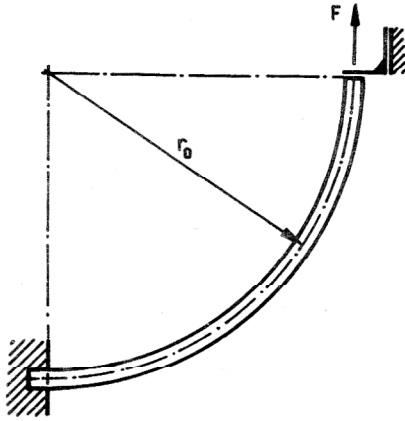
$$M(l) = F(x_1 \sin \alpha - y_1 \cos \alpha) - M_A = 0 \quad (3.3)$$

erfüllt wird, wobei die Größen  $x_1, y_1$  als Koordinaten des Endpunktes von der Wahl des Wertes  $M_A$  selbst abhängen.

Eine zweite Möglichkeit besteht darin, die Krümmung des verformten Trägers an der Einspannstelle (und damit über die Krümmungsänderung das Einspannmoment  $M_A$ ) vorzugeben, und dann die zugehörige Kraft F so zu bestimmen, daß Gl. (3.4) befriedigt wird. In beiden Fällen kann die praktische Lösung des Problems auf iterativem Wege (z. B. nach dem Schießverfahren [2]) erfolgen, indem zunächst ein Näherungswert für die gesuchte Größe vorgegeben und dann unter Berücksichtigung der Bedingung (3.4) verbessert wird.

### 4. Beispiel Viertelkreisträger

Die Untersuchung eines diametral durch  $2F$  gezogenen Kreisringes mit dem mittleren Radius  $r_0$  führt bei Ausnutzung aller Symmetrieeigenschaften auf den in Bild 4



**Bild 4**  
Symmetrieteil des gezogenen Kreisringes

gezeigten eingespannten Viertelkreis mit der Einzelkraft  $F$  und behinderter Drehung des Querschnittes am Ende.

#### 4.1. Näherung durch Korbhogen

Ein auf Zug belasteter Kreisring geht im Verlaufe des Belastungsvorganges in eine ovale Form über, die auch beim Erreichen des plastischen Bereiches zunächst noch zutrifft. Im folgenden wird diese Form durch ein Modell aus je zwei Kreisbögen als Korbhogenring mit einem im Verlaufe der Krafterhöhung veränderlichen Achsenverhältnis  $q = \frac{a}{c}$  aber konstant bleibendem Umfang  $2\pi r_0$  angenähert (Bild 5).

Aus der geometrischen Analyse ergeben sich dann folgende Ausdrücke für die bezogenen Kreisradien:

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{a}{q r_0} Q_0 [1 - Q_1] \quad (4.1)$$

$$\frac{r_2}{r_0} = \frac{a}{r_0} Q_0 [1 + Q_1] \quad (4.2)$$

mit

$$Q_0 = \frac{(1+q)^2}{4q}, \quad Q_1 = \sqrt{1 - \frac{16q^2}{(1+q)^4}} \quad (4.3)$$

und weiterhin

$$\frac{a}{r_0} Q_0 = \left\{ 1 + Q_1 + \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{q} (1 - Q_1) - (1 + Q_1) \right] \arctan [Q_0 (1 + Q_1)] \right\}^{-1} \quad (4.4)$$

Hiermit können nun die dimensionslosen Krümmungsänderungen gemäß

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{r_0 \kappa_{elgr}} \left( \frac{r_0}{r_1} - 1 \right) \\ k_2 &= \frac{1}{r_0 \kappa_{elgr}} \left( \frac{r_0}{r_2} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

und mit Hilfe der Gln. (2.8) bzw. (2.9) die bezogenen Momente  $m_1$  und  $m_2$  berechnet werden. Aus der Gleichgewichtsbedingung an dem zu einem Korbhogen verformten Viertelkreis (Bild 5) erhalten wir

$$m_1 - m_2 - \frac{F r_0}{M_{elgr}} \cdot \frac{1}{q} \left( \frac{a}{r_0} \right) = 0 \quad (4.6)$$

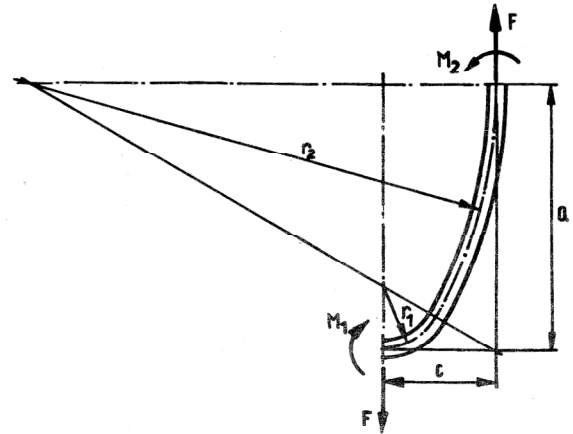
und damit

$$\frac{F r_0}{M_{elgr}} = (m_1 - m_2) q Q_0 \left( Q_0 \frac{a}{r_0} \right)^{-1} \quad (4.7)$$

Die zugehörige relative Verschiebung des Kraftangriffspunktes lautet

$$\frac{\Delta r_0}{r_0} = \frac{a}{r_0} - 1 \quad (4.8)$$

Die numerische Auswertung erfolgt mit  $q$  als Parameter ausgehend von Gl. (4.4).



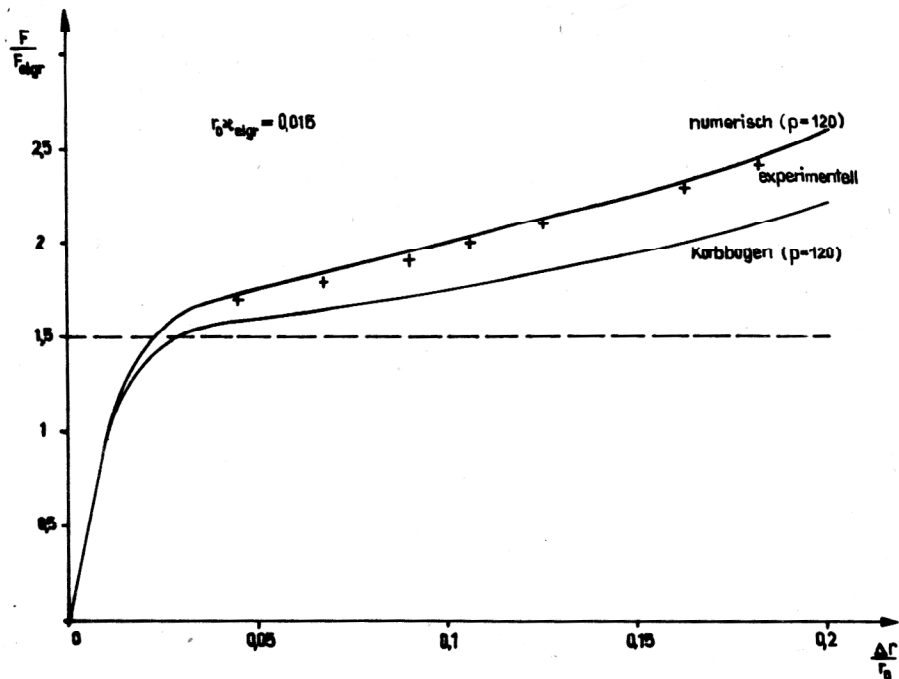
**Bild 5**  
Symmetrieteil des gezogenen Korbhogenringes

#### 4.2. Anwendung des Einschrittverfahrens

Gemäß dem in Abschnitt 3. beschriebenen numerischen Verfahren wurde der Viertelkreis in ca. 100 ... 250 Bogenstücke eingeteilt. Die Belastung erfolgte inkrementell von Null beginnend mit kleinen  $\Delta F$ -Zuwüchsen und iterativer Bestimmung des zugehörigen  $\Delta M_A$ -Wertes. Dabei mußte jetzt anstelle von Gl. (3.4) die Bedingung

$$\Delta \varphi_e = \varphi_e - \frac{\pi}{2} = 0 \quad (4.9)$$

erfüllt werden. In Anwendung des Schießverfahrens wurden zwei Testrechnungen mit dem zuletzt gewonnenen  $M_A$ -Wert und den um das zugehörige  $\Delta M_A$  erhöhten Wert durchgeführt. Mit Hilfe der entsprechenden Größen  $\Delta \varphi_e$  gemäß Gl. (4.9) wurde dann ein Korrekturbeitrag für den  $M_A$ -Wert berechnet. Diese Prozedur wurde solange fortgesetzt, bis Gl. (4.9) mit hinreichender Genauigkeit erfüllt war.



**Bild 6**  
Kraft-Verschiebungs-Kennlinie des gezogenen Kreisringes

#### 4.3. Vergleich mit experimentellen Ergebnissen

Mittels der in den Abschnitten 4.1. und 4.2. beschriebenen Verfahren wurde die Kennlinie eines Ringes aus hochlegiertem Stahl, dessen Verfestigungsparameter  $p \approx 120$  betrug, berechnet und mit experimentell gewonnenen Werten verglichen. Bild 6 zeigt die entsprechenden Ergebnisse. Das Korbbogenmodell weist eine zu tief liegende Kennlinie auf. Da die Momente an den Enden der jeweiligen Kreisbogen eingesetzt wurden, ist das entsprechende Modell generell etwas zu weich.

#### LITERATUR

- [1] Willers, F. A.: Methoden der praktischen Analysis. de Gruyter, Berlin – New York 1971.
- [2] Kiesewetter, Maess: Elementare Methoden der numerischen Mathematik. Akademie-Verlag Berlin 1974.
- [3] Reckling, K. A.: Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme. Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York 1967.
- [4] Oehler, G.: Biegen. Carl Hanser Verlag München 1963.
- [5] Liebold, K.-P.: Dynamische Untersuchungen an plastisch verformbaren Stahlringen. Diplomarbeit TH Karl-Marx-Stadt 1981.

Anschrift der Verfasser  
Dr. rer. nat. Johannes Beyreuther  
Dr.-Ing. Manfred Schumann  
Technische Hochschule  
Sektion Maschinen-Bauelemente  
9010 Karl-Marx-Stadt  
PSF 964