

# Modellierung und Berechnung turbulenter Strömungen und Anwendungen in der Technik

## Teil 3: Anwendung auf technische Probleme und Vergleich mit Experimenten

G. Naue, J. Kohlmann, B. Platzer, W. Schmidt, W. W. Schmidt, R. Scholz

### 1. Einleitung

Im ersten Teil unserer Artikelserie [1] wurden zwei grundlegende Wege der Entwicklung von Modellen zur Berechnung des zeitlich gemittelten Verhaltens turbulenter Strömungen vorgestellt. Bei der Verwendung symmetrischer Ansätze für die turbulente Schubspannung steht im Mittelpunkt der Modellierung die Bestimmung der turbulenten Transportkoeffizienten, speziell der Turbulenzviskosität. Wird für die Gesamtspannung ein unsymmetrischer Tensor verwendet, so tritt neben der Geschwindigkeit als weitere kinematische Variable der Spin  $\beta_k$  auf. Der Spin charakterisiert die mittlere Drehung der Turbulenzelemente. Er besitzt vektorielle Eigenschaften und wird aus dem Impulsmomentensatz ermittelt.

Im zweiten Teil der Artikelreihe [2] wurde gezeigt, daß unter Verwendung der Variablen Wirbelstärke und Stromfunktion alle Differentialgleichungen der beiden Typen von Turbulenzmodellen in einen einheitlichen Differentialgleichungstyp transformiert werden können. Im Mittelpunkt des Artikels [2] stand die Formulierung der Randbedingungen auf den Rändern des Lösungsgebietes für alle Variablen.

Die Zielstellung dieses Beitrages ist, die vorgestellten Turbulenzmodelle auf ein breites Spektrum zweidimensionaler technisch bedeutungsvoller turbulenter Strömungsprozesse anzuwenden und ihre Tragfähigkeit anhand experimenteller Daten zu überprüfen.

Die numerische Lösung der Systeme elliptischer Differentialgleichungen für die einzelnen Aufgabenstellungen erfolgte mit dem „tank and tube“-Differenzenverfahren nach Gosman u. a. [3].

### 2. Anwendung der Turbulenzmodelle mit symmetrischen Spannungsansätzen

#### 2.1. Ebene Strömungen in Räumen mit Strahl Lüftung

In vielen Bereichen der Technik können Strömungen innerhalb geschlossener Räume beobachtet werden. Sie treten beispielsweise in verfahrenstechnischen Apparaten (Staubkammern, Reaktoren usw.), in Feuerräumen, in landwirtschaftlichen Lagerräumen, in Tierhaltungsstätten und bei klimatechnischen Problemen auf. Sehr häufig wird in der Lüftungs- und Klimatechnik die Luftführung so realisiert, daß im Raum eine ebene Strömung entsteht und damit z. B. in Arbeits- und Kulturräumen für alle in der Aufenthaltszone befindlichen Personen behagliche Verhältnisse realisiert werden oder Schadstoff-

konzentrationen im Arbeitsbereich das zulässige Maß nicht überschreiten.

Die Berechnung der ebenen turbulenten Strömung im Raum erfolgt numerisch aus den zeitlich gemittelten Erhaltungssätzen. Die turbulenten Eigenschaften des strömenden Fluids werden durch ein 2-Parameter-Modell der turbulenten Reibung unter Verwendung der Parameter Turbulenzenergie und Dissipationsrate beschrieben. Der Einfluß des Temperaturfeldes auf die Strömung wurde in einem Zusatzterm für die Gleichungen des gemittelten Impulses und in zusätzlichen Termen der Gleichungen der Turbulenzeigenschaften berücksichtigt. Die Ergebnisse, die erzielt wurden, sind in einem Variantenkatalog der ebenen Strömung im Raum systematisch erfaßt und liegen in aufbereiteter Form vor. Die Grundvarianten des Katalogs sind in der Tabelle 1 angegeben.

Tabelle 1  
Grundvarianten der Berechnung von Räumen mit Strahl Lüftung

Variationsparameter	Grundgeometrie
$L/H$	
$h_0/H; Re_0$ $Ar_0; Tu_0; \Delta/h_0$	
Luftführungsarten	
Hörsaalgeometrie	
Werkhallengeometrie	
Lage von Einbauten	

Bei den Berechnungen wurden sowohl die Grundabmessungen der Räume (Länge L, Höhe H, Einströmöffnung  $h_0$ ) als auch die Reynoldszahl, die Archimedeszahl, das Turbulenzniveau und die Luftführungsarten variiert.

Außerdem wurden Strömungen in Räumen mit schrägen Berandungen und rechtwinkligen Einbauten untersucht.

An zwei Modellräumen des Kombiniertes Luft- und Kälte-technik Dresden wurden experimentelle Untersuchungen durchgeführt, die es ermöglichten, Strömungsgeschwindigkeiten und Temperaturen an ausgewählten Querschnitten über der Raumhöhe mit Hilfe der Hitzdrahtmeßtechnik zu ermitteln. Diese experimentellen Ergebnisse gestatten den Vergleich mit den numerisch gewonnenen Feldgrößen.

Zwei Ergebnisse der numerischen Berechnung von ebenen Strömungen sollen hier dargestellt werden:

1. Isotherme Strömung in einem Modellraum mit schrägem Fußboden
2. Strömung in einem Modellraum mit partieller Fußbodenbeheizung

In beiden Fällen wurde ein Modellraum mit den Grundabmessungen

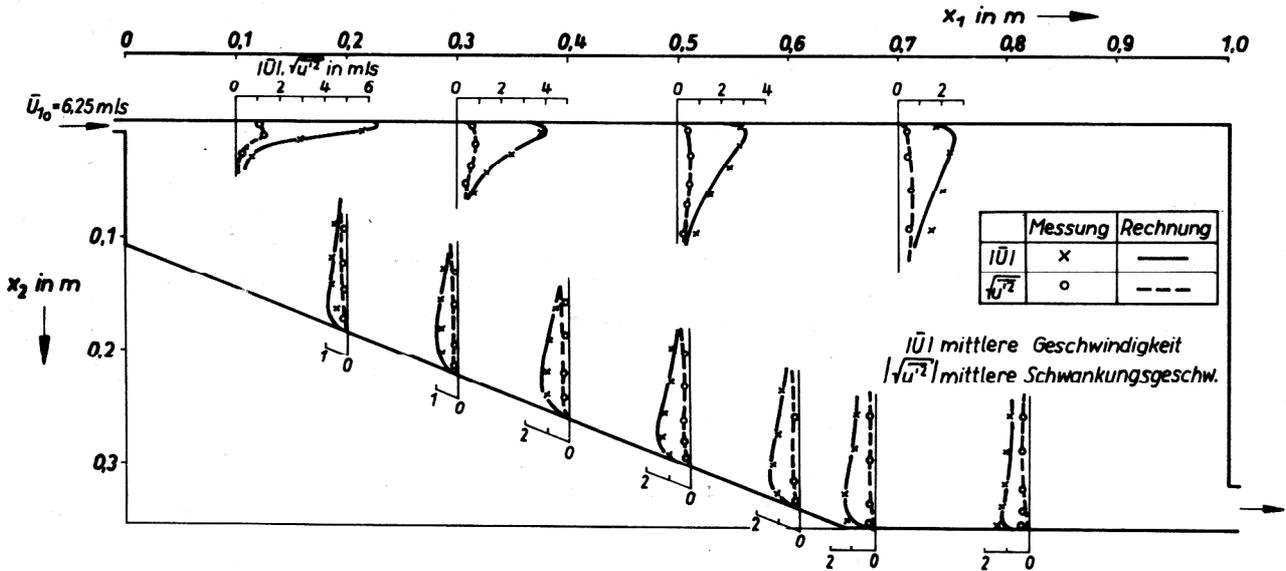
Höhe  $H = 0,36 \text{ m}$

Länge  $L = 1,00 \text{ m}$

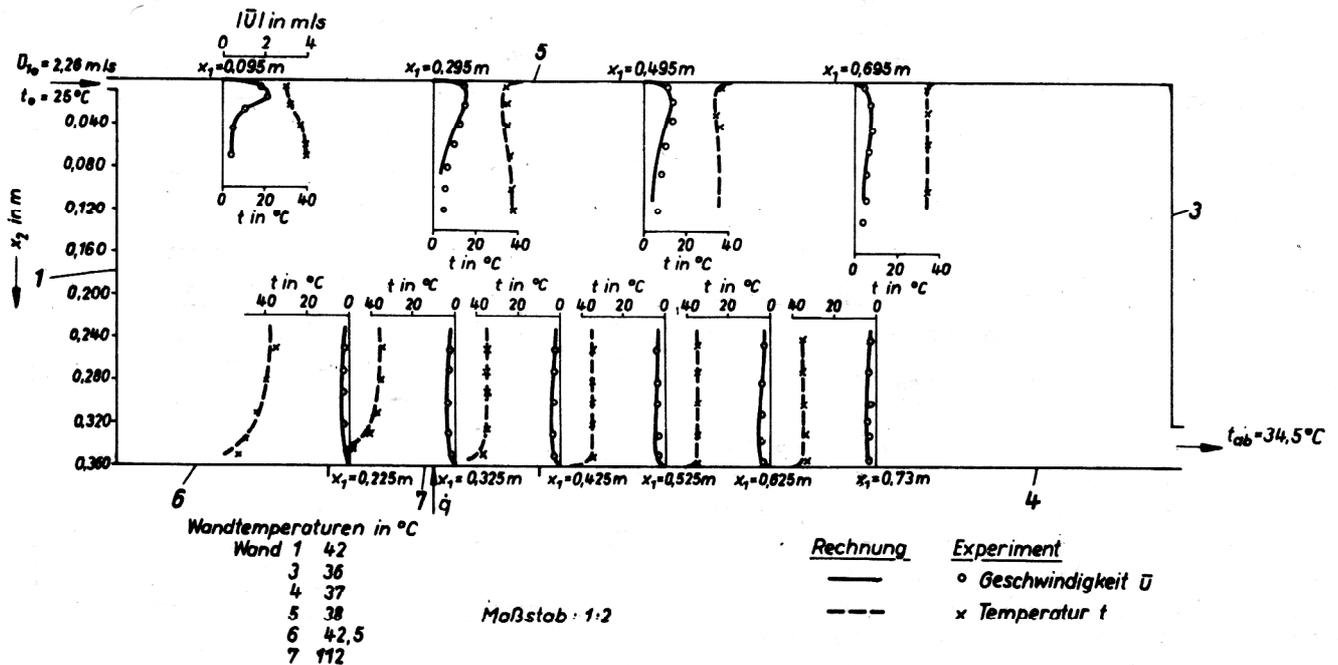
Breite  $B = 0,78 \text{ m}$

Einströmöffnung  $h_0 = 0,009 \text{ m}$   
(ebener Spalt)

verwendet.



**Bild 1**  
Mittlere Geschwindigkeiten und mittlere Schwankungsgeschwindigkeiten im Modellraum mit schrägem Fußboden



**Bild 2**  
Mittlere Geschwindigkeit und mittlere Temperaturen bei nichtisothermer Strömung

Bei der isothermen Strömung wurde die schräge Begrenzungswand bis zu  $x_1/L = 2/3$  und  $x_2/H = 1/3$  realisiert. Die Reynoldszahl der eintretenden Strömung betrug  $Re_o = 3750$ , der Turbulenzgrad  $Tu_o = 0,01$ . Im Bild 1 sind die Ergebnisse der numerischen Berechnung zusammen mit den experimentellen Befunden dargestellt. Es zeigt sich, daß sowohl die Werte der gemittelten Geschwindigkeit als auch die Werte der Schwankungsintensitäten gut übereinstimmen.

Bei dem Fall der Strömung mit partieller Heizung war der Fußboden von  $x_1 = 0,2$  m bis  $x_1 = 0,4$  m mit einer Heizplatte versehen, deren Oberflächentemperatur einstellbar war. Zur Festlegung der thermischen Randbedingungen an den Wänden wurden die Wandtemperaturen an ausgewählten Punkten gemessen. Sie gingen als stückweise konstante Temperaturen in die Rechnung ein. Bei  $Re_o = 1360$  und  $Ar_o = 5,52 \cdot 10^{-4}$  ergaben sich die im Bild 2 dargestellten Ergebnisse. Die Übereinstimmung zwischen Messung und Experiment sowohl für die zeitlich gemittelten Geschwindigkeiten als auch für die zeitlich gemittelten Temperaturen ist gut.

Durch die Überprüfung der Rechnung mit experimentellen Befunden hat sich die gewählte Berechnungsmethode als brauchbar zur Bestimmung von Geschwindigkeits- und Temperaturfeldern bei ebenen Strömungen erwiesen und wird für reale klimatechnische Aufgaben bezüglich der Luftführung eingesetzt.

## 2.2. Vermischungsprobleme in Rohren mit und ohne chemischer Reaktion

In der chemischen Technologie besitzt die Vermischung von Stoffströmen, zum Beispiel zur Aufbereitung von Reaktionsgemischen, bei bestimmten Prozessen eine entscheidende Bedeutung. Dabei interessiert insbesondere die Länge der Mischstrecke (o. a. die Mischzeit bei diskontinuierlichen Abläufen), die Inhomogenität der Mischung und der Einfluß der Vermischung auf die Reaktion bei reagierenden Systemen.

In diesem Abschnitt soll der einfache Fall der Vermischung von Stoffströmen untersucht werden, die aus koaxial angeordneten Düsen austreten. Die Strömung wird rotationssymmetrisch und drallfrei betrachtet.

Die Beschreibung der Transportprozesse erfolgt mit Hilfe der Erhaltungssätze für Masse, Impuls, Stoff und Energie.

Die weitere Modellierung konzentriert sich auf die Auswahl eines geeigneten Modells zur Berechnung der Turbulenzviskosität. Entscheidungskriterien für die Modellwahl sind:

- Genauigkeit des Modells (z. B. im Vergleich zu Messungen),
- Übertragbarkeit auf andere Strömungsformen,
- Rechenaufwand zur Lösung des Modells,
- Informationsgehalt des Modells (zeitliche Mittelwerte o. a. Angaben zur Turbulenzstruktur)

Die Untersuchungen von Richter [4] und Elghobashi [5] zeigen, daß die Zweiparametermodelle (in diesen Fällen das kW- bzw. ke-Modell) geeignet sind, koaxiale und eingeschlossene Strahlen zu beschreiben. Zunächst soll aber

untersucht werden, ob mit einfachen Modellen dieser Vermischungsprozeß hinreichend genau beschrieben werden kann. Die Rechenergebnisse werden anhand experimenteller Resultate von Laimer [6] überprüft. Die geometrischen Abmessungen der Versuchsanordnung sind im Bild 3 angegeben. Die Untersuchungen erfolgten mit Wasser bei einer Temperatur von 284 K. Die Durchsätze betragen für den Zentralstrahl  $\dot{m}_p = 0,1572$  kg/s und für den Ringspalt  $\dot{m}_s = 0,4796$  kg/s.

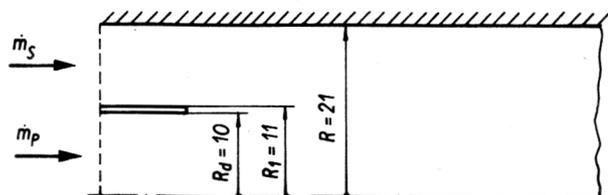


Bild 3  
Strömungsgeometrie bei der Vermischung koaxialer Strahlen nach Laimer [6]

Der Zentralstrahl wurde mit Kochsalz geimpft. Die Reynoldszahl betrug bezogen auf den vermischten Zustand  $Re = 15\,200$ . Von Laimer wurden die Profile der mittleren Kochsalzkonzentration gemessen.

Die Nachrechnung der Meßwerte erfolgte mit dem Prandtlischen Mischungswegansatz, dem k-Modell und dem kW-Modell. Das zentrale Problem bei der Anwendung des Prandtlischen Ansatzes ist die Bestimmung des Mischungsweges. Im Bild 4 ist die Verteilung des Mischungsweges angegeben. Bei der angenommenen Verteilung wurde davon ausgegangen, daß der Mischungsweg der eintretenden Strahlen eine Strecke erhalten bleibt, danach der Mischungsweg des Freistrahls (o. a. der Mischungsschicht) dominiert und von der Rohrwand aus der Mischungsweg der ausgebildeten Rohrströmung bestimmt wird.

In den einzelnen Gebieten der Mischstrecken werden damit die Mischungswege wie folgt berechnet

$$\begin{aligned} L_1 &= R_d \cdot f(r/R_d), & L_2 &= 0,0296 \cdot z \\ L_3 &= H \cdot f(r'/H), & L_4 &= R \cdot f(r/R) \end{aligned} \quad (1)$$

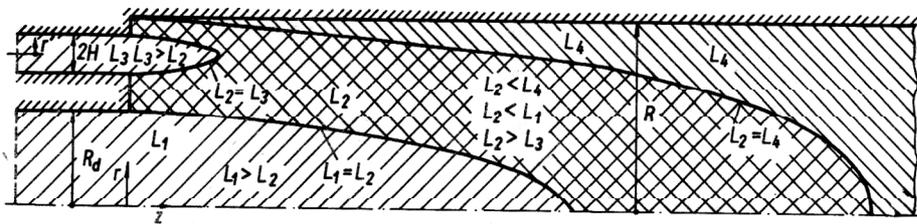
Die Funktion  $f(r/R)$  ist die Verteilung des Mischungsweges im Rohr nach Nikuradse

$$f(r/R) = 0,14 - 0,08 (r/R)^2 - 0,06 (r/R)^4 \quad (2)$$

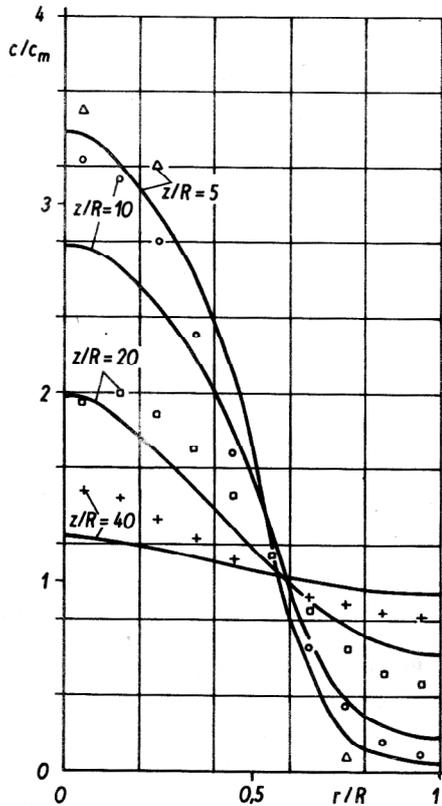
Die mit Hilfe des Prandtlischen Mischungswegansatzes berechneten Konzentrationsprofile sind im Bild 5 dargestellt.

Zur Rechnung mit dem k-Modell wurde als Turbulenzmaßstab der Prandtlische Mischungsweg verwendet. Die Ergebnisse der Rechnung sind im Bild 6 angegeben. Die Koeffizienten des k-Modells wurden [7] entnommen.

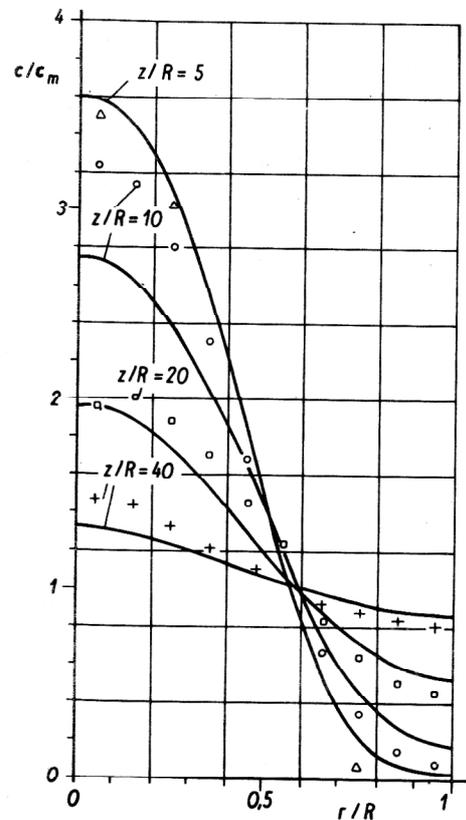
Die Rechnung mit dem kW-Modell wurde mit einem Koeffizientensatz nach [8] durchgeführt. Die berechneten Konzentrationsprofile sind im Bild 7 angegeben. Bei der Testung des kW-Modells mußte festgestellt werden, daß



**Bild 4**  
Verteilung des Prandtl'schen Mischungsweges bei der Mischung koaxialer Strahlen



**Bild 5**  
Dimensionslose Konzentrationsprofile bei der Vermischung koaxialer Strahlen, berechnet nach dem Prandtl'schen Mischungswegansatz  
 $\Delta$ ,  $\circ$ ,  $\square$ ,  $+$  Meßwerte nach [6]



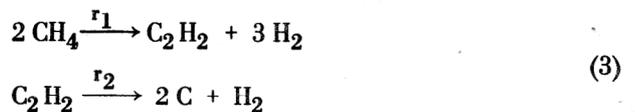
**Bild 6**  
Dimensionslose Konzentrationsprofile bei der Vermischung koaxialer Strahlen, berechnet nach dem k-Modell

für verschiedene Strömungstypen unterschiedliche Koeffizientensätze zu wählen sind. Dieser Mangel ist offensichtlich darin zu suchen, daß mit dem Turbulenzmodell nicht alle Turbulenzeinflüsse erfaßt werden können. Bei der Auswahl des Koeffizientensatzes ist von dem Strömungstyp (z. B. Wandströmung, Strahlströmung) auszugehen, der das Problem bestimmt.

Die durchgeführten Rechnungen zeigen, daß für die Berechnung des Mischungsproblems koaxialer Strahlen ohne oder mit nur kleinen Rezirkulationsgebieten der Prandtl'sche Mischungswegansatz ausreichend genaue Ergebnisse liefert. Eine Verbesserung des Modells kann durch die gezielte Veränderung des Mischungsweges erreicht werden.

Als Beispiel einer koaxialen Vermischung zweier Stoffströme bei gleichzeitig ablaufender Reaktion wird die plasmachemische Pyrolyse von Methan im Wasserstoffplasma untersucht. Das Wasserstoffplasma tritt als zentraler Strahl mit einer mittleren Massentemperatur von 3000 K bis 5000 K, bei Maximaltemperaturen von 10 000 K, in den Reaktor ein. Das Methan wird über

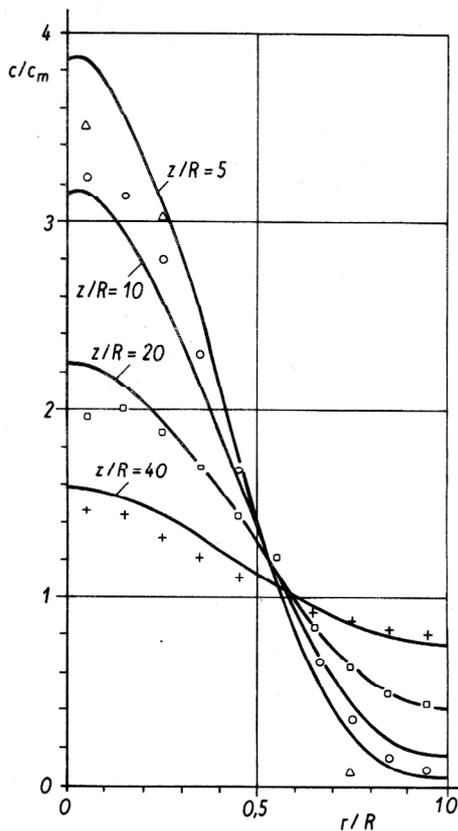
eine Ringdüse mit Umgebungstemperatur oder vorgewärmt zugeführt. Der Mechanismus der Pyrolysereaktion kann mit dem Modell nach Anderson und Case [9]



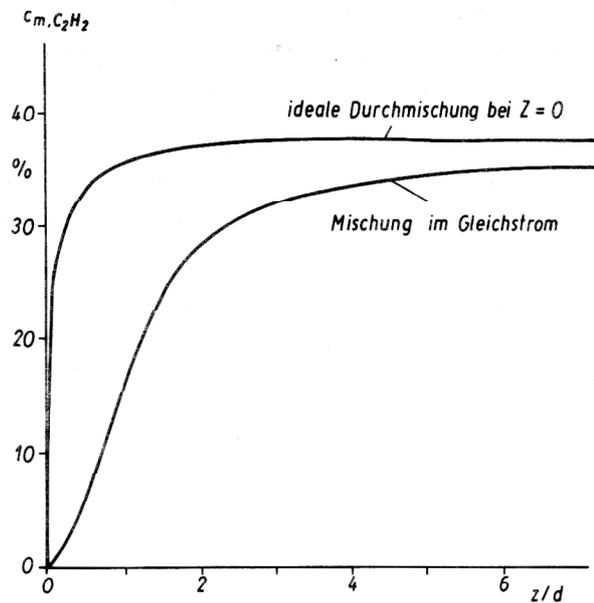
beschrieben werden.

Aufgrund der hohen Temperaturdifferenzen sind in der Strömung starke turbulente Temperatur- und somit auch Dichtefluktuationen zu erwarten. Ihre Wirkungen auf das mittlere Strömungsfeld werden entsprechend einer Arbeit von Szablewski [10] berücksichtigt. Die Ableitung der Erhaltungssätze für das zeitlich gemittelte Feldverhalten unter Berücksichtigung der Dichtefluktuationen erfolgte in [11].

Die Turbulenzviskosität wird nach dem Prandtl'schen Mischungswegansatz mit einer Mischungswegverteilung entsprechend Bild 4 berechnet.



**Bild 7**  
Dimensionslose Konzentrationsprofile bei der Vermischung koaxialer Strahlen, berechnet nach dem kW-Modell

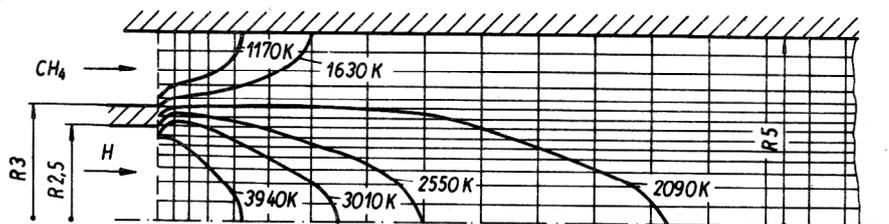


**Bild 10**  
Mittlere Acetylenkonzentration (Masseprozent)

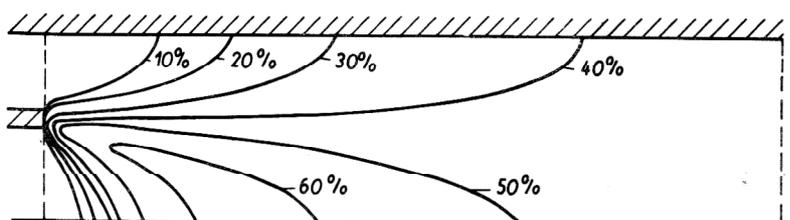
In der Tabelle 2 werden die berechneten Werte mit den experimentellen Ergebnissen aus [12] verglichen.

Die Differenzen zwischen Rechnung und Experiment sind vor allen Dingen in der Unsicherheit im Reaktionsmechanismus und den kinetischen Koeffizienten zu suchen.

**Bild 8**  
Verlauf der Isothermen im Plasmareaktor



**Bild 9**  
Verlauf der Linien konstanter Acetylenkonzentration (Masseprozent) im Plasmareaktor



Für die Überprüfung des Modells wurden experimentelle Daten aus [12] ausgewählt. Die notwendigen Eingangsdaten sind:

Plasmaleistung	20 kW,
Wasserstoffdurchsatz	3,00 Nm <sup>3</sup> /h,
Methandurchsatz	5,16 Nm <sup>3</sup> /h,
mittl. Wasserstofftemperatur	4400 K,
mittl. Methantemperatur	800 K.

Die Abmessungen des Reaktors sind im Bild 8 angegeben.

Als wesentliche Ergebnisse wird in den Bildern 8 und 9 die Verteilung der Temperatur und der Acetylenkonzentration angegeben.

Die Notwendigkeit einer zweidimensionalen Berechnung des Vermischungs- und Reaktionsproblems wird im Bild 10 veranschaulicht. Durch die Berechnung des Plasmareaktors als ideales Strömungsrohr tritt eine wesentliche Verfälschung des Konzentrationsverlaufes auf.

**Tabelle 2**  
Vergleich der Berechnung der Methanpyrolyse mit experimentellen Ergebnissen [12]

	Konzentration in Vol. %				
	H <sub>2</sub>	CH <sub>4</sub>	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	C
Experiment	76	5,8	0,5	15,5	0,0
Rechnung	69,4	14,2	0,0	12,0	4,3

### 2.3. Strömung in bewehrten Behältern mit radialfördernden Rührern

Radialfördernde Rührer (Schaufelrührer, schnellaufende Blattrührer) werden in der Industrie häufig eingesetzt, um in Behältern eine turbulente Strömung zum Zwecke der Intensivierung des Stoff- und Wärmeübergangs bzw. des Homogenisierens, Dispergierens und Begasens zu erreichen. Um die durch die Drehbewegung hervorgerufene Trombe, die oftmals unerwünscht ist, abzubauen, sind diese Behälter oft bewehrt. Obwohl in den letzten Jahren verstärkt Strömungsprofile für diesen technisch interessanten Fall in der Literatur angegeben werden (vgl. [13]), existieren dafür keine Berechnungsmöglichkeiten.

Die Untersuchungen erfolgen für rotationssymmetrische, stationäre Strömung eines homogenen, inkompressiblen, isothermen Mediums.

Zur Beschreibung der turbulenten Strömungsprozesse wird das ke-Modell ausgewählt [1]. Die Verwendung von Turbulenzenergie und Dissipationsrate hat den Vorteil, daß beide Turbulenzparameter für die Kennzeichnung der technischen Prozesse wichtig sind. Andererseits wurden sie unter Beibehaltung ihres Konstantensatzes schon auf andere Strömungsprobleme erfolgreich angewandt.

Bei der Formulierung der Randbedingungen ergeben sich zwei Teilprobleme, die besonders berücksichtigt werden müssen. Die Strömung wird in dem zu beschreibenden Bereich durch die Rotation des Rührers erzeugt. Der „Einströmrand“ (Rührerblattkante) muß somit die in unmittelbarer Rührernähe stark dreidimensionale und periodische Strömung im Mittel richtig erfassen. Dies gelang bei Verwendung des Tangentialstrahlmodells.

$$\bar{v}_r = \frac{A \sigma^{0,5}}{2 r^{1,5}} (r^2 - a^2)^{0,25} \left[ 1 - \tanh^2 \left( \frac{\sigma}{2r} \right) \right] \quad (4)$$

$$\bar{v}_\varphi = \frac{a}{(r^2 - a^2)^{0,5}} v_r \quad (5)$$

$$\bar{v}_z = \frac{A (r^2 - a^2)^{0,25}}{2 \sigma^{0,5} r^{1,5}} \left\{ \frac{2r^2 - a^2}{r^2 - a^2} \tanh \left( \frac{\sigma}{2r} \right) - \frac{\sigma}{2r} \left[ 1 - \tanh^2 \left( \frac{\sigma}{2r} \right) \right] \right\} \quad (6)$$

Für die drei Parameter A, a,  $\sigma$  des Strahlmodells wurden durch Anpassung an bisher vorliegende Meßwerte Korrelationen von Geometrie und Drehzahl ermittelt [13]. Für die Beschreibung der Turbulenzparameter am Eintrittsrand wurde die aus dem Tangentialmodell folgende Turbulenzviskosität

$$\eta_{TS} = \frac{A (2r^2 - a^2)}{2 \sigma^{1,5} r^{0,5} (r^2 - a^2)^{0,75}} \quad (7)$$

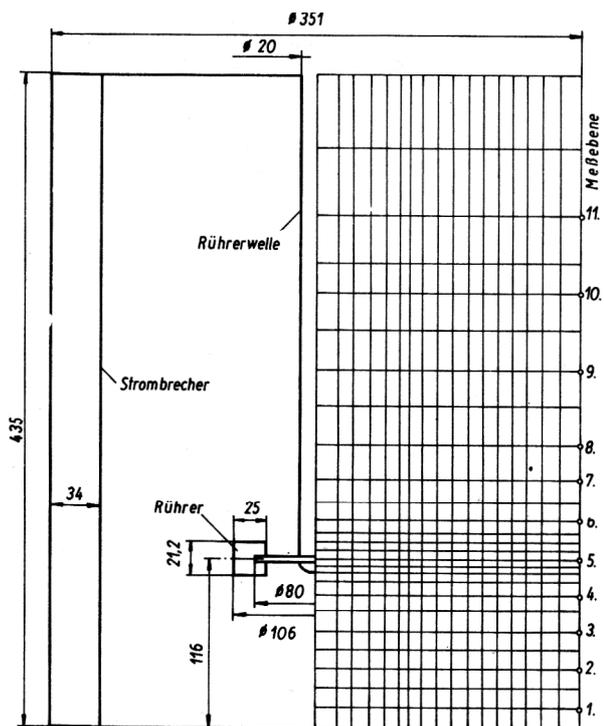
und der Turbulenzgrad, der der Literatur entnommen wurde, vorgegeben.

Um die Wirkung der Strombrecher, die nur diskret auf den Umfang verteilt sind, bei der rotationssymmetri-

schen Nachrechnung der Tangentialgeschwindigkeit erfassen zu können, muß diese auf eine kontinuierliche Wandeingenschaft zurückgeführt werden. Dies wird durch Einführen einer effektiven Viskosität möglich, die über die Diffusionsterme einen verstärkten Abbau der Umfangsgeschwindigkeit in Wandnähe bewirkt und die einer Ersetzung der diskreten Strombrecher durch eine kontinuierliche Rauigkeit entspricht. Eine Abschätzung der Größe dieser effektiven Viskosität wird über die Kopplung der Widerstandskraft, die durch das Umströmen der Strombrecher entsteht, mit der eingebrachten Leistung möglich. Unter Berücksichtigung der Verteilung der Tangentialgeschwindigkeit des Tangentialstrahlmodells ergibt sich

$$\eta_{S,B} = \frac{3,24 \cdot 10^{-3} c_p \rho n^2 d_R^5 D}{a A \sigma^{0,5} H} \quad (8)$$

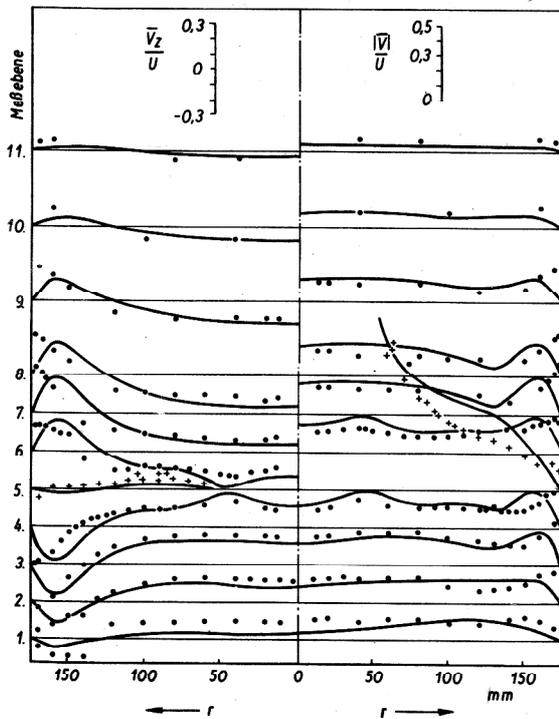
Die anderen Randbedingungen entsprechen den in [2] dargestellten Angaben. Um den Einfluß der Umfangsgeschwindigkeit in Nähe fester Wände auf die Turbulenzparameter berücksichtigen zu können, wurde die Wand Schubspannungsgeschwindigkeit im Wandgesetz mit dem Betrag des Geschwindigkeitsvektors berechnet.



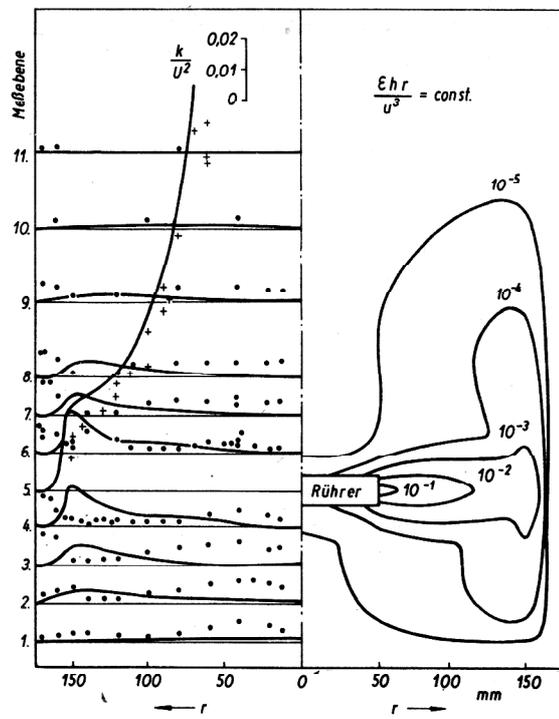
**Bild 11**  
Geometrische Abmessungen des von Helmstädter [14] benutzten Modellrührwerks und Darstellung des zur Berechnung benutzten Gitternetzes

Die numerische Lösung erfolgte mit einem Gitternetz von 27 x 18 Punkten. Die Geometrie des Behälters mit einem 7-Blatt-Schaufelrührer enthält Bild 11. Der für die Rechnung verwendete Parametersatz lautete

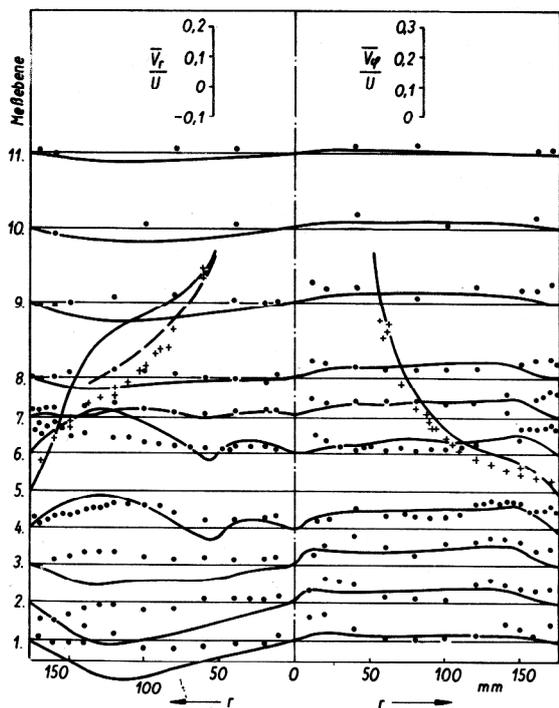
$$A = 0,374 \text{ m}^2/\text{s}; \quad a = 0,0371 \text{ m}; \quad \sigma = 13; \quad Tu = 0,4; \\ \eta_{SB} = 0,04 \text{ kg/ms},$$



**Bild 12**  
Vergleich zwischen rechnerisch und experimentell ermittelten Axialgeschwindigkeiten (links) und dem Betrag des Geschwindigkeitsvektors



**Bild 14**  
Vergleich zwischen rechnerisch und experimentell ermittelter spezifischer Energie der turbulenten Bewegung und Darstellung der Linien konstanter turbulenter Dissipation



**Bild 13**  
Vergleich zwischen rechnerisch und experimentell ermittelten Radial- und Umfangsgeschwindigkeiten (--- Tangentialstrahlmodell)

wobei es sich als günstig erwies,  $Tu$  aus der Literatur auszuwählen, die den periodischen Anteil in Rührernähe mit beinhalten, und  $\eta_{SB}$  gegenüber Gl. (8) noch zu erhöhen.

Die Rechnungen konnten mit bisher z. T. noch unveröffentlichten Daten von Helmstädter [14] verglichen wer-

den, die mit einem Hitzdrahtanemometer erhalten wurden. Die Bilder 12 bis 14 zeigen den Vergleich zwischen Rechen- und Meßwerten (Darstellung als Punkte, 5. Meßebeine als Kreuze). Die Abweichungen in unmittelbarer Wandnähe sind durch den großen Abstand der wandnächsten Gitterlinie bedingt. Infolge der relativ groben Teilung im Rührerstrom gelingt es nur teilweise, die großen Änderungen der 5. Meßebeine wiederzugeben. Durch eine feinere Gitterteilung würde bei beiden Effekten eine Verbesserung möglich sein, jedoch steigt dadurch der numerische Aufwand stark an. Die Verhältnisse im Rührerstrom können auch verbessert werden, wenn das Tangentialstrahlmodell nicht nur an der Rührerblattkante, sondern ebenfalls im Rührerstrom Verwendung findet (unterbrochene Linie für  $\bar{v}_r$ ). Daß nach den numerischen Rechnungen in großen Gebieten oberhalb des Rührers negative Radialgeschwindigkeiten auftreten, stimmt mit Messungen anderer Autoren überein. Obwohl durch den bisher noch zu geringen Kenntnisstand über die Turbulenzparameter größere Unsicherheiten bei den Randbedingungen am Rührer sowie in Wandnähe bestehen, werden auch die Turbulenzgrößen entsprechend der großen Streuung bisheriger Literaturergebnisse gut erfaßt.

Somit kann eingeschätzt werden, daß sowohl das vorgestellte mathematische Modell wie auch das numerische Lösungsverfahren den praktischen Anforderungen für die Auslegung von Rührbehältern genügt. Dies wurde inzwischen auch durch eine ähnliche Arbeit bei etwas modifizierten Beziehungen bestätigt [15].

### 3. Anwendung des Turbulenzmodells mit unsymmetrischen Spannungsansätzen

#### 3.1. Kanalströmung

Zur unbeschleunigten Strömung im ebenen Kanal liegen ausführliche experimentelle und theoretische Untersuchungen vor. Deshalb ist das Mehrvariablenmodell an diesem Beispiel getestet worden. Gleichzeitig dienen die gesicherten empirischen Daten zur Ermittlung der neuen Modellparameter [16].

Ebene Strömungen sind mit der Wirbeltransportgleichung und dem Impulsmomentensatz, die wechselseitig gekoppelt sind, beschreibbar. Die Trägheitsglieder verschwinden für unbeschleunigte Strömungen.

Die analytischen Lösungen mit den natürlichen Randbedingungen ( $v = 0$  und  $\beta = 0$ ) für die kinematischen Zustandsvariablen sind:

$$\beta = \frac{v_0 a}{2Hb} \frac{y - \frac{\text{sh}(\alpha y)}{\text{sh}(\alpha)}}{\frac{\text{ch}(\alpha) - 1}{\text{sh}(\alpha)} - \gamma} \quad (9)$$

$$v = v_0 \left[ 1 - y^2 - \frac{\text{ch}(\alpha y) - 1 - y^2 (\text{ch}(\alpha) - 1)}{\text{ch}(\alpha) - 1 - \gamma \alpha \text{sh}(\alpha)} \right] \quad (10)$$

Die Modellparameter  $\alpha$  und  $\gamma$  sind wie folgt definiert.

$$\alpha = \sqrt{\frac{4bH^2}{c} \left( \frac{\rho n}{4a} - 1 \right)} \quad (11)$$

$$\gamma = \frac{2a}{\rho n^1} \quad (12)$$

Aus dem Verhältnis der mittleren zur Mittengeschwindigkeit und aus dem Anstieg der Gesamtschubspannungsverteilung auf der Symmetrieachse des Kanals ergeben sich für den untersuchten Reynoldszahlbereich die Para-

meter  $\alpha$  und  $\gamma$  (Tabelle 3). Der Re-Bereich wird begrenzt durch die Gültigkeit der empirischen Beziehungen (Widerstandsgesetz, Geschwindigkeitsverhältnis). Mit konstanten Koeffizienten  $a$  und  $b$  im Spannungsansatz und dem einfachen Ansatz für die Induktion enthält der einzige verbleibende Modellkoeffizient  $n^1$  den Re-Einfluß.

Das aus (10) berechnete Geschwindigkeitsprofil stimmt von der viskosen Unterschicht bis zur turbulenten Kernströmung mit den Vergleichsdaten überein (Bild 15). Es ergibt sich ein direkter Zusammenhang zwischen Reynoldsspannung und Spin.

$$\tau_{121} = -\rho \overline{v_1' v_2'} = 2b\beta \quad (13)$$

#### 3.2. Ebener Freistrah

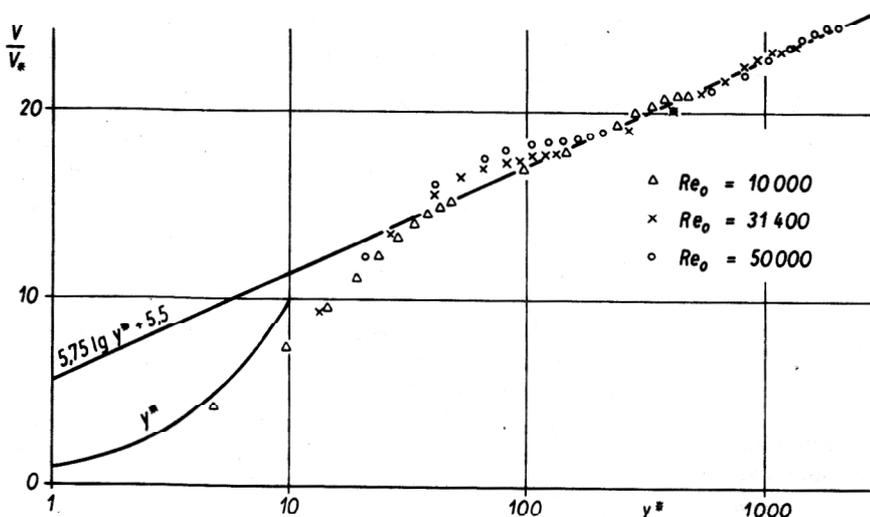
Zur numerischen Berechnung der ebenen Freistrahströmung werden die konvektiven Glieder der Spingleichung 1. Stufe näherungsweise vernachlässigt. Für das auf die Volumeneinheit bezogene Induktionsmoment wird der Ansatz

$$\frac{1}{n\omega} = -2l v_{1m} \omega \quad (14)$$

benutzt [15]. Am Abström- und am freien Strahlrand werden für die Variablen homogene Randbedingungen 2. Art vorgegeben. Der Geschwindigkeitsverlauf auf der Strahlachse ist in Bild 16 dargestellt. Im Bereich  $0 \leq \bar{x}_1/h_0 \leq 3$  ist die Kernzone ausgebildet und im voll-

**Tabelle 3**  
Koeffizienten der Lösung des Turbulenzmodells mit unsymmetrischem Spannungsansatz für die Kanalströmung

$Re_0$	$\alpha$	$\gamma$	$\frac{n^1}{v}$
10 000	33	-,01346	-148,6
25 000	72	-,00723	-276,6
31 400	87	-,006073	-329,3
50 000	130	-,004341	-460,7



**Bild 15**  
Dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung der unbeschleunigten ebenen Kanalströmung

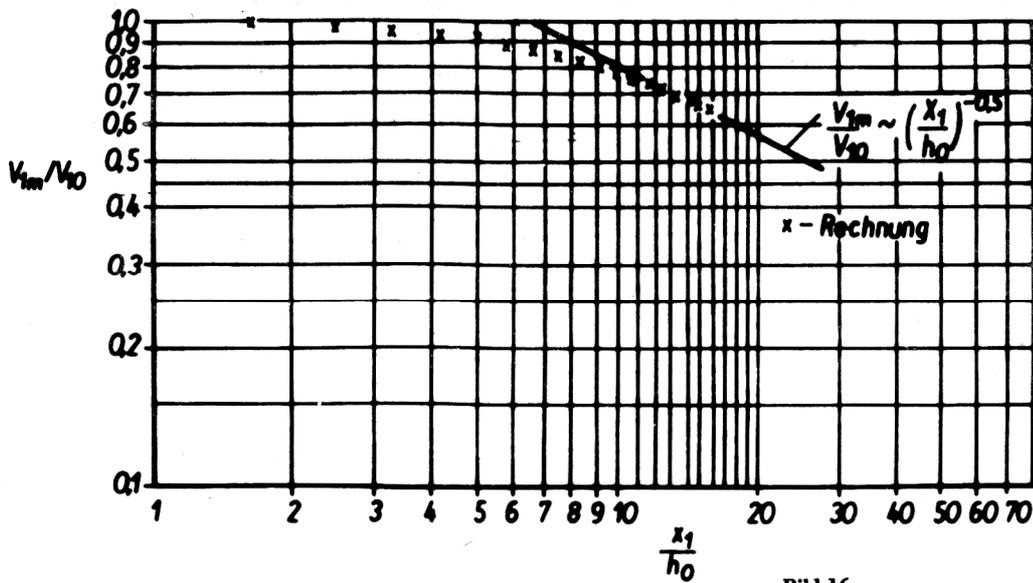


Bild 16  
Geschwindigkeit auf der Achse des ebenen Freistrahls

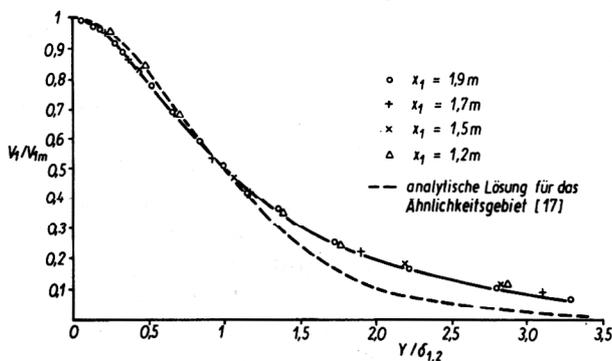


Bild 17  
Dimensionsloses Geschwindigkeitsprofil des ebenen Freistrahls im Ähnlichkeitsgebiet

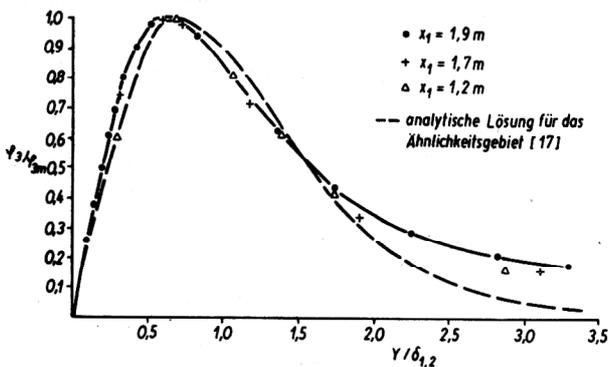


Bild 18  
Dimensionsloses Profil des Spins eines ebenen Freistrahls im Ähnlichkeitsgebiet

turbulenten Bereich ( $X_1/h_0 > 11$ ) erfolgt der Geschwindigkeitsabbau auf der Strahlachse nach dem Gesetz

$$\frac{v_{1m}}{v_{10}} \left( \frac{\bar{x}_1}{h_0} \right)^{-0.5} \quad (15)$$

Aus der dimensionslosen Darstellung des Geschwindigkeitsprofils im Ähnlichkeitsbereich (Bild 17) ist für  $\bar{x}_2/\delta_{1,2} < 1,2$  eine gute Übereinstimmung des numerisch berechneten Profils mit den experimentellen Wer-

ten festzustellen. Im Bild 18 wird für den Ähnlichkeitsbereich das numerisch bestimmte dimensionslose Profil des Spins gezeigt.

### 3.3. Ebene Raumströmung

Die aus der Untersuchung der unbeschleunigten Kanalströmung gewonnenen Modellparameter des Mehrvariablenmodells werden auf zweidimensionale Strömungsfelder übertragen [17].

Die Koeffizienten des Impulsmomentensatzes lauten:

$$\frac{1}{n} = \frac{4}{\rho} \left( \frac{d}{2\gamma} - c \right) \quad (16)$$

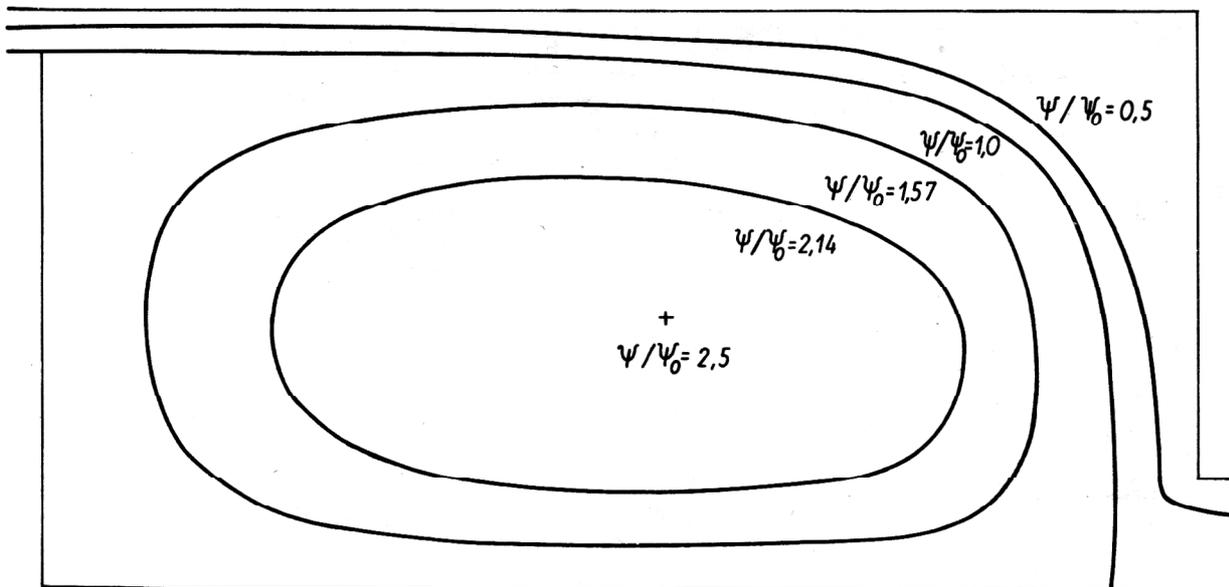
$$d = 4 \frac{bh^2}{\alpha^2} \left( 1 - \frac{1}{2\gamma} \right) \quad (17)$$

Unter der Größe  $h$  ist eine charakteristische Abmessung des Strömungsfeldes zu verstehen. Beim turbulent durchströmten Raum wird die Grobstruktur der Turbulenz im wesentlichen durch die Raumhöhe bestimmt. In diesem Fall soll  $h$  die halbe Raumhöhe sein. Zur Berechnung des auf die Masseinheit bezogenen Trägheitsmomentes  $I$  der Grobstrukturen der Turbulenz wird angenommen, daß im Strömungsgebiet zylindrische Wirbelballen existieren. Aus den Abmessungen der Grobstruktur (größte Wirbelballen) kann dann das spezifische Trägheitsmoment  $I$  berechnet werden

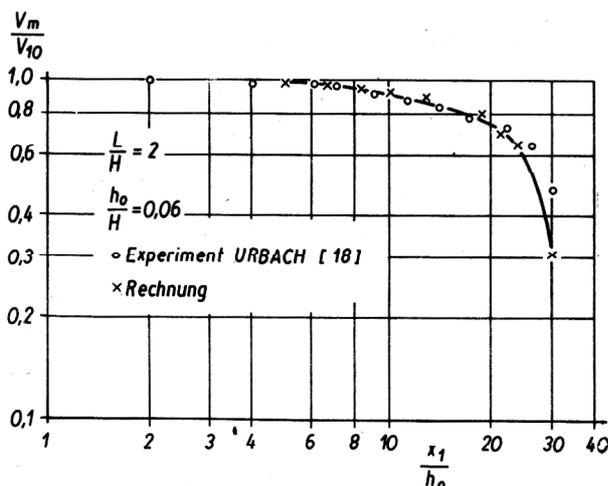
$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{m} \int_{(m)} r^2 dm \\ &= \frac{1}{8} l^2 \end{aligned} \quad (18)$$

wobei unter  $l$  der Durchmesser des größten Wirbels zu verstehen ist. Die Abmessungen der Grobstruktur der Turbulenz lassen sich aus halbempirischen Modellvorstellungen bestimmen.

Befriedigende Übereinstimmung zwischen Experiment und Rechnung wird bereits mit einem konstanten Trägheitsmoment erreicht.



**Bild 19**  
Verlauf der Stromlinien im ebenen Raum mit Strahl Lüftung



**Bild 20**  
Geschwindigkeitsabbau des Wandstrahls

Die berechneten Stromlinien (Bild 19) besitzen prinzipielle Ähnlichkeit mit Messungen von Urbach [18].

Die berechneten Isotachen zeigen das typische Verhalten des Wandstrahls an der Nordwand des Raumes. In der Mitte des Strömungsfeldes wird ein Primärwirbel sichtbar, und an der Südwand wird wieder ein Wandstrahl angedeutet, der durch das Rückströmgebiet entsteht. Bild 20 zeigt, daß der Geschwindigkeitsabbau bis etwa  $\frac{\bar{x}_1}{h_0} = 25$  mit experimentellen Werten übereinstimmt.

Im hinteren Teil des Raumes klingt die errechnete Geschwindigkeit stärker ab als die gemessene Geschwindigkeit. In der Nähe fester Wände erinnert die Spinverteilung an die des Kanals, da wandparallele Strömung vorherrscht.

#### 4. Schlußfolgerungen

Mit den berechneten Beispielen konnte gezeigt werden, daß die Modelle mit symmetrischen Spannungsansätzen und hierbei insbesondere die Zwei-Parametermodelle und das Turbulenzmodell mit unsymmetrischen Spannungsansätzen geeignet sind, zweidimensionale Strömungsprobleme mit technischer ausreichender Genauigkeit zu beschreiben. Unbefriedigend ist dabei aber die Tatsache, daß teilweise für verschiedene Strömungstypen unterschiedliche Koeffizientensätze verwendet werden müssen, so daß die Anwendung der vorgestellten Turbulenzmodelle auf völlig unbekannte Strömungstypen mit Unsicherheiten behaftet ist.

Das Hauptproblem bei der Anwendung beider Typen von Turbulenzmodellen liegt in der Ermittlung des Makromassstabes der Turbulenz. Hierauf ist der weitere Schwerpunkt der Modellierung gerichtet.

Das Ziel wird darin bestehen, Turbulenzmodelle zu entwickeln, die viele Strömungsklassen mit einem einheitlichen Satz von Turbulenzparametern beschreiben. Durch die Berücksichtigung einer weiteren kinematischen Variablen im Modell mit unsymmetrischen Spannungsansätzen besitzt dieses Modell eine größere Variabilität.

#### Symbolverzeichnis

- a, A Parameter des Tangentialstrahlmodells
- Ar Archimedeszahl
- a, b, c, d Koeffizienten des Modells mit unsymmetrischen Spannungsansätzen
- B Raumbreite
- c Konzentration
- $c_\eta$  Koeffizient des Turbulenzmodells mit symmetrischen Spannungsansätzen
- $c_p$  Leistungsbeiwert
- d Reaktordurchmesser
- $d_R$  Rührerdurchmesser
- D Durchmesser des Rührbehälters
- $h_0$  Höhe des Eintrittspaltes am Modellraum
- H Höhe des Ringspaltes; Kanalhöhe, Füllhöhe des Rührbehälters

$h_R$	Rührerhöhe
$I$	Trägheitsmoment
$k$	Turbulenzenergie
$L$	Länge des Modellraumes
$l$	Makromaßstab der Turbulenz
$m$	Masse
$\dot{m}$	Massestrom
$\bar{n}$	Koeffizient des Turbulenzmodells mit unsymmetrischen Spannungsansätzen
$r, z$	Koordinatenrichtung der Zylinderkoordinaten
$R$	Rohrradius
$Re$	Reynoldszahl
$t$	Temperatur in °C
$Tu$	Turbulenzgrad
$\bar{u}$	Geschwindigkeitskomponente in $\bar{x}_1$ -Richtung
$\bar{v}$	Geschwindigkeit
$v_*$	Schubspannungsgeschwindigkeit
$W$	Turbulenzcharakteristik
$x_1, x_2,$	Koordinatenrichtungen der kartesischen Koordinaten
$x_3$	
$y$	Querkoordinate
$\alpha, \gamma$	Koeffizienten des Turbulenzmodells mit unsymmetrischen Spannungsansätzen
$\beta_k, \beta$	kinematische Variable
$\epsilon$	Dissipationsrate
$\eta_{SB};$	dynamische Viskosität bei Berücksichtigung der Strombrecher und des Tangentialstrommodells
$\eta_{TS}$	
$\Lambda$	Makromaßstab der Turbulenz
$\nu$	kinematische Viskosität
$\rho$	Dichte
$\sigma$	Parameter des Tangentialstrahlmodells
$\tau$	Schubspannung
$\psi$	Stromfunktion
$\omega$	Wirbelstärke

#### Indizes

$m$	Mittelwert; Mittenwert
$r, z, \varphi$	Werte in der Koordinatenrichtung der Zylinderkoordinate
$t$	Turbulenz
$o$	Mittelwert; Eintrittswert
$1,2$	Werte in den Koordinatenrichtungen der kartesischen Koordinaten

#### LITERATUR

- [1] Naue, G., Schmidt, W. W., Scholz, R., Wolf, P.: Modellierung und Berechnung turbulenter Strömungen und Anwendungen in der Technik. Technische Mechanik 1 (1980) 1, S. 89 – 94.
- [2] Naue, G.; Kohlmann, J., Schmidt, W., Scholz, R., Wolf, P.: Modellierung und Berechnung turbulenter Strömungen und Anwendungen in der Technik. Teil 2: Formulierung der Randbedingungen. Technische Mechanik 3 (1982) 1, S. 5 – 10.
- [3] Gosman, A. D., Pun, W. M., Runchal, A. K., Spalding, D. B., Wolfshtein, M.: Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows. Academic Press, London and New York, 1969.
- [4] Richter, W.: Mathematische Modelle Technischer Flammen. Grundlagen und Anwendungen für achsensymmetrische Systeme. Dissertation Universität Stuttgart 1978.
- [5] Elghobashi, S. E., Pun, W. M., Spalding, D. B.: Concentration Fluctuations in Isothermal Turbulent Confined Coaxialjets. Chem. Eng. Sci., 32 (1977) 2, S. 161 – 166.
- [6] Laimer, F.: Statistische Analyse der turbulenten Vermischung in Rohren. Dissertation, TH Zürich 1974.
- [7] Prandtl, L.: Gesammelte Abhandlungen zur angewandten Mechanik, Hydro- und Aerodynamik, Bd. 2. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1961.
- [8] Spalding, D. B.: A Two-equation Model of Turbulence. VDI-Forschungsheft 549, S. 5 – 16, 1972.
- [9] Anderson, J. E., Case, L. K.: An Analytical Approach to Plasma Torch Chemistry, Ind. and Chem. Proc. Design and Develop., 1 (1962), S. 161 – 165.
- [10] Szablewski, W.: Turbulente Vermischung heißer Gasstrahlen mit umgebender Luft. Ingenieur-Archiv, 34 (1965) 2, S. 69 – 79.
- [11] Kohlmann, J.: Berechnung turbulenter Strömungen mit starken Dichte- und Temperaturänderungen am Beispiel von Transportprozessen in plasmachemischen Reaktoren, Dissertation Technische Hochschule „Carl Schorlemmer“ Leuna-Merseburg, 1976.
- [12] Kinetika i termodinamika chemiceskich reakcij v niskotemperaturnoj plazme. Izd. Nauka, Moskva 1965.
- [13] Platzer, B.: Beitrag zur Berechnung der turbulenten Strömung in bewehrten Behältern mit Rührern radialer Hauptförderrichtung. Dissertation, Technische Hochschule „Carl Schorlemmer“ Leuna-Merseburg, 1979.
- [14] Helmstädter, E.: Experimentelle Untersuchungen im Rührsystem Schaufelrührer mit Strombrechern. Unveröffentlichte Meßwerte des Zentralinstitutes für Mathematik und Mechanik der Akademie der Wissenschaften der DDR, Berlin 1979.
- [15] Placek, J.: Hydrodynamik mechanischer Mischsysteme (tschech.), Dissertation, Tschechoslowakische Akademie der Wissenschaften Prag 1980.
- [16] Schmidt, W. W.: Modellierung des Impuls- und Energietransportes auf der Grundlage eines strukturierten Kontinuums. Dissertation, Technische Hochschule „Carl Schorlemmer“ Leuna-Merseburg, 1979.
- [17] Schmidt, W.: Ein Beitrag zur Theorie und Anwendung des Mehrvariablenmodells der Turbulenz. Dissertation, Technische Hochschule „Carl Schorlemmer“ Leuna-Merseburg, 1981.
- [18] Urbach, D.: Modelluntersuchungen zur Strahlflüftung. Dissertation RW TH Aachen 1971.

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr.-Ing. habil. G. Naue  
 Dr.-Ing. J. Kohlmann  
 Dr.-Ing. B. Platzer  
 Dr.-Ing. W. Schmidt  
 Dr.-Ing. W. W. Schmidt  
 Dr.-Ing. R. Scholz

Technische Hochschule „Carl Schorlemmer“  
 Leuna-Merseburg  
 4200 Merseburg, Geusaer Str.