

# Über eine Cosseratsche Theorie für elastische Platten

Wladimir A. Palmow, Holm Altenbach

## 0. Einleitung

Der verstärkte Einsatz von mehrschichtigen Konstruktionen bzw. von Konstruktionen mit kontinuierlich veränderlichen Querschnittseigenschaften erfordert eine kritische Durchsicht der bisher geschaffenen Schalen- und Plattentheorien. Diese liefern für bestimmte Konstruktionen ungenaue Lösungen bzw. Lösungen, die mit einem erheblichen Rechenaufwand verbunden sind. Daher tritt in letzter Zeit erneut die Forderung nach der Schaffung neuer theoretischer Modelle zur Berechnung von Schalen und Platten auf.

In der Arbeit wird eine direkte Methode zur Formulierung der Grundgl. einer Biegetheorie für elastische Platten beschrieben, die nicht auf der Integration der Gl. der dreidimensionalen Elastizitätstheorie beruht. Die Platte wird als zweidimensionales Cosserat-Kontinuum betrachtet. Diese Vorgehensweise kann man bereits in den Cosseratschen Arbeiten [1] finden. In einer Arbeit von Ericksen und Truesdell [2] ist die „moderne“ Darstellungsform der Cosseratschen Flächentheorie zu finden. Betrachtet werden jedoch nur die Gleichgewichtsgl. und die kinematischen Gl. Die konstitutiven Gl. in der linearen Näherung für elastische Platten sind in [3] angeführt. Eine allgemeine nichtlineare Deformationstheorie für elastische Cosserat-Flächen kann man in [4] finden. Diesem Kreis von Arbeiten läßt sich auch die in [5] beschriebene Theorie zuordnen.

## 1. Die kinematischen und die statischen Gleichungen

Betrachten wir zuerst ein zweidimensionales, ebenes Cosserat-Kontinuum. Im Falle der Biegeaufgabe reicht es aus, die Verschiebungen der einzelnen Punkte des Kontinuums durch eine normalgerichtete Verschiebung  $w$  und

einen Vektor  $\underline{\Phi}$  kleiner Verdrehwinkel zu beschreiben. Dieser Vektor liegt in der Referenzebene der Platte. Der Spannungszustand in der Platte ist durch den ebenen Vektor  $\underline{Q}$  der Querkräfte und den Momententensor  $\underline{G}$  gekennzeichnet. Auf Bild 1 sind die Einheitsvektoren  $\underline{i}_\alpha$  der Koordinatenachsen  $x_\alpha$  und die Komponenten des Querkraftvektors  $Q_\alpha$  und des Momententensors  $G_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ) dargestellt.

Die Werte der Randquerkraft  $Q_n$  und des Randmomentenvektors  $\underline{G}_n$  für einen Abschnitt der Berandung mit dem Normalenvektor  $\underline{n} = n_\alpha \underline{i}_\alpha$  lassen sich folgendermaßen bestimmen

$$Q_n = \underline{n} \cdot \underline{Q}, \quad \underline{G}_n = \underline{n} \cdot \underline{G} \quad (1.1)$$

Diese Beziehungen sind analog den Cauchyschen Gl. in der Elastizitätstheorie.

Die eingeführten Kräfte und Momente stellen Belastungen je Längeneinheit einer beliebigen, in der Plattenebene liegenden geschlossenen Kurve dar. Weiterhin führen wir Flächenlasten ein: die normalgerichtete Flächenlast  $q$  und den Flächenmomententensor  $\underline{m}$ .

Als nächstes formulieren wir die Gleichgewichtsbeziehungen für die Platte. Dazu schreiben wir die statischen Gleichgewichtsbedingungen für einen durch eine geschlossene Kurve begrenzten Abschnitt der Platte auf:

$$\oint \underline{n} \cdot \underline{Q} \, ds + \iint q \, dA = 0, \quad (1.2)$$

$$\oint [(\underline{n} \cdot \underline{G} - \underline{n} \cdot \underline{Q} \, \underline{k} \times \underline{r})] \, ds + \iint (\underline{m} - \underline{q} \, \underline{k} \times \underline{r}) \, dA = 0. \quad (1.3)$$

Hierbei sind  $\underline{k}$  der Einheitsvektor in Richtung der  $z$ -Achse und  $\underline{r}$  der Radiusvektor der Referenzfläche der Platte. Nach Umformung der Kurvenintegrale nach der Greenschen Formel erhalten wir, da die geschlossene Kurve beliebig gewählt ist, folgende Beziehung

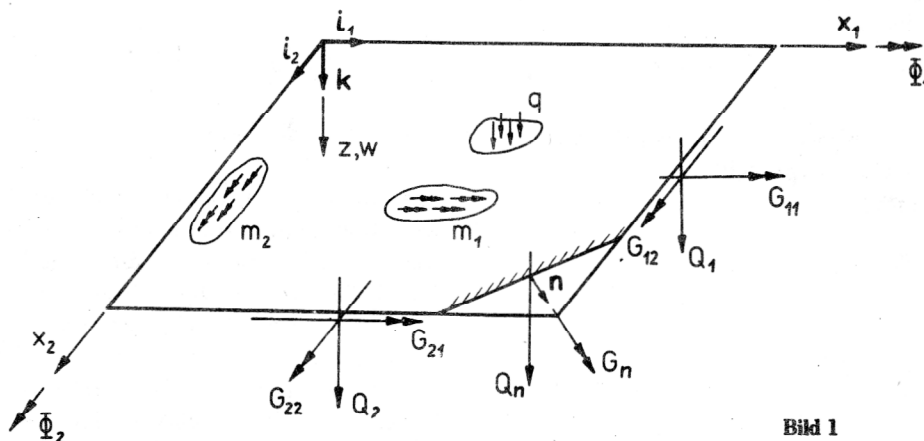


Bild 1  
Kinematische und statische Größen für die Cosserat-Platte

$$\nabla \cdot \underline{Q} + \underline{q} = 0, \quad (1.4)$$

$$\nabla \cdot \underline{G} - \nabla \cdot (\underline{Q} \underline{k} \times \underline{r}) + \underline{m} - \underline{q} \underline{k} \times \underline{r} = 0. \quad (1.5)$$

$\nabla = \underline{i}_\alpha \frac{\partial}{\partial x}$  ist der Hamiltonsche Operator.

Die Gl. (1.4) stellt eine der gesuchten Gleichgewichtsgln. dar. Die zweite Gl. erhalten wir nach entsprechender Umformung der Gl. (1.5)

$$\nabla \cdot \underline{G} + \underline{m} - \underline{Q}_x = 0, \quad (1.6)$$

wobei  $\underline{Q}_x$  ein Vektor ist, den man aus dem Vektor  $\underline{Q}$  erhält:

$$\underline{Q}_x = \underline{k} \times \underline{Q}. \quad (1.7)$$

Die mit (1.7) beschriebene Regel der Umformung eines Ausgangsvektors wird auch bei anderen Vektoren verwendet. Es sei noch bemerkt, daß im Falle einer Darstellung der Gln. (1.4) und (1.6) in Komponentenschreibweise diese mit den Gln. in [6] zusammenfallen. Unterschiede treten nur bei der Bezeichnung der Momente auf.

## 2. Deformationsenergie für elastische Platten

Die Gln. (1.1) – (1.7) gelten für beliebige Platten. Im weiteren betrachten wir elastische Platten. Zur Herleitung der Beziehungen zwischen kinematischen Größen  $w$  und  $\Phi$  und den Kraftgrößen  $\underline{Q}$  und  $\underline{G}$  wenden wir das Prinzip der virtuellen Verrückungen an.

Ausgehend von der Existenz einer Energiedichtefunktion  $U$  der potentiellen Energie wenden wir dieses Prinzip auf einen beliebigen Teil der Platte an

$$\iint (\underline{q} \delta w + \underline{m} \cdot \delta \underline{\Phi} - \delta U) dA + \oint (\underline{n} \cdot \underline{Q} \delta w + \underline{n} \cdot \underline{G} \cdot \delta \underline{\Phi}) ds = 0. \quad (2.1)$$

Hier stellen  $\delta w$  und  $\delta \underline{\Phi}$  die virtuellen Verschiebungen und Verdrehwinkel dar.

Nach Anwendung der Greenschen Formel erhalten wir

$$\delta U = \underline{q} \delta w + \underline{m} \cdot \delta \underline{\Phi} + \nabla \cdot (\underline{Q} \delta w + \underline{G} \cdot \delta \underline{\Phi}) \quad (2.2)$$

Eine Vereinfachung der rechten Seite unter Verwendung der Gleichgewichtsgln. (1.4) und (1.6) ergibt

$$\delta U = \underline{Q} \cdot \delta \nabla w + \underline{Q}_x \cdot \delta \underline{\Phi} + \underline{G} \cdot \delta (\nabla \underline{\Phi})^*. \quad (2.3)$$

Dabei wird durch \* der transponierte Tensor bezeichnet und durch  $\cdot \cdot$  das Doppelskalarprodukt.

Auf Grund der Identität

$$\underline{Q}_x \cdot \delta \underline{\Phi} = - \underline{Q} \cdot \delta \underline{\Phi}_x \quad (2.4)$$

erhalten wir

$$\delta U = \underline{Q} \cdot \delta \underline{\Lambda} + \underline{G} \cdot \delta \underline{M}^*. \quad (2.5)$$

Hierbei bedeuten

$$\underline{\Lambda} = w - \underline{\Phi}_x \quad \text{und} \quad \underline{M} = \nabla \underline{\Phi}. \quad (2.6)$$

Der Vektor  $\underline{\Lambda}$  kennzeichnet die Querschubdeformation, der Tensor  $\underline{M}$  die Biege- und Torsionsdeformationen der Platte.

Die Form des Ausdruckes für  $U$  verdeutlicht, daß die potentielle Energie nur vom Vektor  $\underline{\Lambda}$  und Tensor  $\underline{M}$  abhängt:

$$U = U(\underline{\Lambda}, \underline{M}). \quad (2.7)$$

Wenn wir den allgemeinen Ausdruck (2.7) variieren und das Ergebnis mit der Gl. (2.5) vergleichen, so erhalten wir einen allgemeinen Ausdruck für das elastische Deformationsgesetz der Platte

$$\underline{Q} = \frac{\partial U}{\partial \underline{\Lambda}}, \quad \underline{G} = \frac{\partial U}{\partial \underline{M}}. \quad (2.8)$$

Im Falle kleiner Deformationen ist die Energiedichte  $U$  eine homogene quadratische Form der Komponenten des Vektors  $\underline{\Lambda}$  und des Tensors  $\underline{M}$ . Die Anzahl der Komponenten ist 6, folglich muß die Dichte der potentiellen Energie der beliebigen anisotropen Platte 21 unabhängige Elastizitätsmoduli enthalten. Diese Anzahl geht auch in das Elastizitätsgesetz (2.8) ein. Für eine isotrope Platte mit Spiegelsymmetrie der elastischen Eigenschaften reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Moduli auf 4. Dabei hängt die Dichte der potentiellen Energie nur vom Modul des Vektors  $\underline{\Lambda}$  und den invarianten Formen des Tensors  $\underline{M}$  (auch der Vektorinvarianz) ab.

Im allgemeinen Falle erhalten wir für die quadratische Form  $U$  die Gl. (2.9)

$$U = \frac{1}{2} A \underline{\Lambda} \cdot \underline{\Lambda} + \frac{1}{2} B (\underline{I} \cdot \cdot \underline{M}^S)^2 + \Gamma \underline{M}^S \cdot \cdot \underline{M}^S - F \underline{M}^A \cdot \cdot \underline{M}^A. \quad (2.9)$$

Die hochgestellten Buchstaben  $S$  und  $A$  kennzeichnen den symmetrischen und den antisymmetrischen Teil der jeweiligen Tensoren,  $\underline{I}$  ist der Einheitstensor  $\underline{i}_\alpha \underline{i}_\alpha$ , die Koeffizienten  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  und  $F$  stellen die Elastizitätsmoduli dar.

Nach Einsetzen von Gl. (2.9) in Gl. (2.8) erhalten wir eine dem Hookeschen Gesetz analoge Form für die hier betrachtete Klasse von Platten

$$\underline{Q} = A \underline{\Lambda}, \quad (2.10)$$

$$\underline{G} = B \underline{I} \nabla \cdot \underline{\Phi} + 2 \Gamma \underline{M}^S + 2 F \underline{M}^A. \quad (2.11)$$

Dabei wurde die Identität  $\underline{I} \cdot \cdot \underline{M}^S = \nabla \cdot \underline{\Phi}$  berücksichtigt.

Aus der Gl. (2.10) ist erkennbar, daß die Querschubdeformation in der formulierten Theorie berücksichtigt wurde. Somit schließt sie die Biegetheorie für Platten von E. Reissner ein. Es sei hervorgehoben, daß hier die allgemeinste Form einer Biegetheorie dargelegt wurde mit den Kraftgrößen Biegemomente, Torsionsmomente und Querkräfte und den kinematischen Größen Durchbiegung und Verdrehwinkel. Eine weitere Verallgemeinerung wäre nur bei Einführung neuer Kraftgrößen und kinematischer Größen möglich.

### 3. System der Differentialgleichungen in den kinematischen Größen

Jetzt können wir die zu lösenden Gln. der Theorie ermitteln. Dazu stellen wir den Vektor der Verdrehwinkel  $\underline{\Phi}$  durch zwei skalare Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  dar

$$\underline{\Phi} = \nabla\varphi + \nabla_x\psi. \quad (3.1)$$

Wenn wir die Beziehung (3.1) in Gl. (2.6) und anschließend in (2.10) und (2.11) einsetzen, so erhalten wir

$$\underline{Q} = A[\nabla(w + \psi) - \nabla_x\varphi], \quad (3.2)$$

$$\underline{G} = B \underline{I} \nabla^2\varphi + 2\Gamma \nabla\nabla\varphi + (\Gamma + F)\nabla\nabla_x\psi + (\Gamma - F)\nabla_x\nabla\psi. \quad (3.3)$$

Wenn wir weiterhin das Flächenmoment  $\underline{m}$  analog der Gl. (3.1) darstellen

$$\underline{m} = \nabla\alpha + \nabla_x\beta, \quad (3.4)$$

so erhalten wir nach Einsetzen der Gln. (3.2), (3.3), (3.4) in die Gleichgewichtsgln. (1.4) und (1.6) folgende Beziehungen

$$A\nabla^2(w + \psi) + q = 0, \quad (3.5)$$

$$\nabla[(B + 2\Gamma)\nabla^2\varphi - A\varphi + \alpha] + \nabla_x[(\Gamma + F)\nabla^2\psi - A(w + \psi) + \beta] = 0. \quad (3.6)$$

Der zweiten Gl. können wir nur genügen, wenn wir die eckigen Klammern Null setzen

$$(B + 2\Gamma)\nabla^2\varphi - A\varphi + \alpha = 0, \quad (3.7)$$

$$(\Gamma + F)\nabla^2\psi - A(w + \psi) + \beta = 0.$$

Die Gln. (3.5) und (3.7) stellen das entsprechende Gleichungssystem der zu lösenden Differentialgl. in den kinematischen Größen dar. Dieses läßt sich am günstigsten in folgender Form darstellen

$$(\Gamma + F)\nabla^2\nabla^2\psi + q + \nabla^2\beta = 0, \quad (3.8)$$

$$(B + 2\Gamma)\nabla^2\varphi - A\varphi + \alpha = 0, \quad (3.9)$$

$$w = -\psi + \frac{\Gamma + F}{A}\nabla^2\psi + \frac{\beta}{A}. \quad (3.10)$$

Das Gleichungssystem (3.8) und (3.9) ist ein System 6. Ordnung und läßt damit die Formulierung von 3 Randbedingungen zu. Im Falle von statischen Bedingungen müssen  $Q_n$  und  $G_n$  nach Gl. (1.1) gegeben sein, bei kinematischen Bedingungen  $w$  und  $\underline{\Phi}$  usw..

### 4. Bestimmung der elastischen Moduli

Im Zusammenhang mit der dargestellten Cosseratschen Biegetheorie für Platten taucht ähnlich wie in [5] die Frage nach der Bestimmung der Elastizitätsmoduli auf. Generell sind diese Moduli wie z. B. der Youngsche Modul, der Gleitmodul und die Querkontraktionszahl der

klassischen Elastizitätstheorie, experimentell zu bestimmen. In unserem Fall kann man an Stelle von physikalischen Experimenten auch mathematische Überlegungen durchführen. Dabei werden gewisse Testaufgaben unter Verwendung von Lösungen der klassischen Elastizitätstheorie für eine Schicht bei verschiedenen, einfachen Belastungsfällen betrachtet.

Auf die Frage, welche Testaufgaben zu untersuchen sind, gibt es keine eindeutige Antwort. Man sollte jedoch möglichst einfache Aufgaben betrachten. Außer den hier vorgestellten mathematischen „Experimenten“ kann man in [7] andere mögliche Testaufgaben finden. Diese sind zwar auf die in [5] beschriebene Theorie zugeschnitten, besitzen jedoch, wie auch die hier vorgestellten Aufgaben, allgemeingültigen Charakter.

Eine erste Testaufgabe, auf die man nicht verzichten kann, ist die reine Biegung. Dabei nimmt die Cosseratsche Fläche, die die Platte repräsentiert, folgende Form an

$$w = x_1^2/2R, \quad \underline{\Phi} = -\nabla_x w. \quad (4.1)$$

Unter Verwendung der Beziehung (3.1) gilt für die reine Biegung

$$\psi = -w, \quad \varphi = 0. \quad (4.2)$$

Nach Einsetzen der Gln. (4.1), (4.2) in (3.2), (3.3) erhalten wir

$$\underline{Q} = 0, \quad G_{11} = G_{22} = 0, \quad G_{12} = -(\Gamma + F)/R, \quad G_{21} = (F - \Gamma)/R. \quad (4.3)$$

Betrachten wir dazu eine inhomogene elastische Schicht der Dicke  $h$ . Dabei gehen wir davon aus, daß der Youngsche Modul  $E$ , der Gleitmodul  $G$  und die Querkontraktionszahl  $\nu$  für das entsprechende Material sich nur über die Plattendicke ändern. Dabei soll das Änderungsgesetz eine gerade Funktion der Koordinate  $z$  sein. Diese Voraussetzung ist notwendig, um die Biegeaufgabe vom ebenen Spannungszustand abzukoppeln.

Bei zylindrischer Biegung hat das Verschiebungsfeld  $w$  der neutralen Ebene entsprechend der Gl. (4.1) folgende Deformationen in der Schichtebene

$$\epsilon_1 = -z/R, \quad \epsilon_2 = 0. \quad (4.4)$$

Die Normalspannungen betragen bei der zylindrischen Biegung

$$\sigma_1 = -\frac{E}{1-\nu^2} \frac{z}{R}, \quad \sigma_2 = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \frac{z}{R}, \quad \sigma_3 = 0. \quad (4.5)$$

Dies führt zu folgenden Ausdrücken für die Momente

$$G_{11} = G_{22} = 0, \quad G_{12} = -D/R, \quad G_{21} = \tilde{\nu} D/R, \quad (4.6)$$

wobei

$$D = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Ez^2}{1-\nu^2} dz, \quad \tilde{\nu} = \frac{1}{D} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\nu Ez^2}{1-\nu^2} dz \quad (4.7)$$

mit  $D$  als zylindrische Biegesteifigkeit der Platte und  $\tilde{\nu}$  als einem der Querkontraktionszahl analogen Ausdruck. Nach Gegenüberstellung der Ausdrücke (4.3) und (4.6) erhalten wir

$$\Gamma + F = D, \quad F - \Gamma = \tilde{\nu}D, \quad (4.8)$$

woraus u. a.

$$\Gamma = \int_{-h/2}^{h/2} Gz^2 dz \quad (4.9)$$

folgt.

Zur Bestimmung der Moduli  $A$  und  $B$  lösen wir folgende Testaufgabe. Wir betrachten eine Kreisplatte mit dem Radius  $a$  und einem am Rand  $r = a$  wirkenden konstanten Torsionsmoment. Dabei setzen wir

$$w = \psi = 0, \quad \varphi = \varphi(r), \quad (4.10)$$

womit die Gln. (3.8) und (3.10) identisch erfüllt werden und die Gl. (3.9) folgende im Plattenzentrum begrenzte Lösung besitzt

$$\varphi = \frac{c}{\lambda} I_0(\lambda r), \quad \lambda^2 = \frac{A}{B + 2\Gamma}. \quad (4.11)$$

Dabei ist  $I_0$  die Besselfunktion für rein imaginäre Argumente.

Nach Einsetzen der Gl. (4.11) in (3.1) erhalten wir

$$\Phi_r = \frac{d\varphi}{dr} = c I_1(\lambda r), \quad \Phi_\Theta = 0. \quad (4.12)$$

Somit wird jeder „Punkt“ der Cosseratschen Platte nur um die Richtung des Plattenradius gedreht, jedoch nicht verschoben. Als Wert für das Torsionsmoment  $G_{rr}$ , welches an der Stelle  $r = \text{konst}$  wirkt, erhalten wir nach Einsetzen der Ausdrücke (4.10), (4.11) in Gl. (3.3):

$$G_{rr} = c(B + 2\Gamma) \left[ \lambda I_0(\lambda r) - \frac{2\Gamma}{B + 2\Gamma} \frac{1}{r} I_1(\lambda r) \right]. \quad (4.13)$$

Zu der erhaltenen Lösung formulieren wir die Lösung für eine elastische Schicht der Dicke  $h$ , die durch eine Zylindermantelfläche  $r = a$  begrenzt ist und freie Deckflächen besitzt. Dazu setzen wir die Verschiebungen in der Schicht wie folgt

$$u = w = 0, \quad v = v(r, z). \quad (4.14)$$

Dabei seien  $u, v, w$  die Komponenten des Verschiebungsvektors im zylindrischen Koordinatensystem  $r, \Theta, z$ . In diesem Fall sind nur folgende Spannungen im zylindrischen Koordinatensystem von Null verschieden [8]

$$\tau_{z\Theta} = G \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \tau_{r\Theta} = G \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right). \quad (4.15)$$

Nach Einsetzen in die Gleichgewichtsgl. [8]

$$\frac{\partial \tau_{z\Theta}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{r\Theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\Theta}}{r} = 0$$

erhalten wir folgende Gl. für  $v$ :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial v}{\partial z} \right) + G \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) = 0. \quad (4.16)$$

Die Lösung dieser Gl. bei belastungsfreien Deckflächen lautet

$$v(r, z) = V(z) I_1(\mu r), \quad (4.17)$$

wobei  $I_1$  die Besselfunktion des rein imaginären Argumentes ist und  $V(z)$  und  $\mu$  sich aus folgender Sturm-Liouvilleschen Aufgabe bestimmen lassen

$$\frac{d}{dz} \left[ G(z) \frac{dV}{dz} \right] + \mu^2 G(z) V = 0,$$

$$z = \pm h/2 : \frac{dV}{dz} = 0. \quad (4.18)$$

Aus der Lösungsvielfalt wählen wir die Lösung aus, die dem kleinsten nichttrivialen  $\mu$ -Wert entspricht. Den mittleren Verdrehwinkel  $\Phi_r$  über die Dicke finden wir aus der Bedingung

$$\int_{-h/2}^{h/2} G(v - z\Phi_r)^2 dz = \min_{\Phi_r}. \quad (4.19)$$

Als Ergebnis erhalten wir

$$\Phi_r = c I_1(\mu r), \quad c = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} V(z) z G(z) dz}{\int_{-h/2}^{h/2} G(z) z^2 dz}. \quad (4.20)$$

Die dem Verschiebungsfeld (4.17) entsprechende Tangentialspannung lautet

$$\tau_{r\Theta} = G \left[ \mu I_0(\mu r) - \frac{2}{r} I_1(\mu r) \right] V(z). \quad (4.21)$$

Damit bekommen wir für das dem Spannungssystem äquivalente Torsionsmoment nach der Gl.

$$G_{rr} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{r\Theta} z dz$$

und unter Einbeziehung des Ausdrucks (4.21)

$$G_{rr} = \left[ \mu I_0(\mu r) - \frac{2}{r} I_1(\mu r) \right] c \int_{-h/2}^{h/2} Gz^2 dz. \quad (4.22)$$

Damit die Gln. (4.17), (4.22) mit den Gln. (4.12), (4.13) zusammenfallen, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein

$$\lambda = \mu, \quad B + 2\Gamma = \int_{-h/2}^{h/2} Gz^2 dz, \quad \frac{2\Gamma}{B + 2\Gamma} = 2. \quad (4.23)$$

Daraus folgt unter Beachtung von (4.9), (4.11)

$$B = -\Gamma, \quad A = \mu^2 \Gamma. \quad (4.24)$$

Das Einsetzen der erhaltenen Moduli in die Gln. (3.1) – (3.3), (3.8), (3.9), (3.11) ergibt folgendes Endergebnis

$$\begin{aligned} D \nabla^2 \nabla^2 \psi + q + \nabla^2 \beta &= 0, \\ \nabla^2 \varphi - \mu^2 \varphi + \alpha / \Gamma &= 0, \\ w &= -\psi + D / \mu^2 \Gamma \nabla^2 \psi + \beta / \mu^2 \Gamma, \\ \underline{\Phi} &= \nabla \varphi + \nabla_x \psi, \\ \underline{Q} &= -\mu^2 \Gamma \nabla_x \varphi + \nabla (D \nabla^2 \psi + \beta), \\ \underline{G} &= -\Gamma \underline{I} \nabla^2 \varphi + 2 \Gamma \nabla \nabla \varphi + D \nabla \nabla_x \psi - \\ &\quad - \tilde{\nu} D \nabla_x \nabla \psi. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Man kann leicht überprüfen, daß die erste invariante Form des Momententensors Null wird. Das bedeutet, daß für die erhaltenen Ausdrücke der Elastizitätsmoduli die Torsionsmomente in zueinander orthogonalen Schnitten dem Betrag nach gleich und dem Vorzeichen nach entgegengesetzt sind, so wie dies auch in den Theorien von Kirchhoff und Reissner gilt.

Im Falle homogener einschichtiger Platten erhalten wir

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \Gamma = \frac{G h^3}{12}, \quad \mu^2 = \frac{\pi^2}{h^2}. \quad (4.26)$$

In der Theorie von Reissner [9] beträgt der Wert für  $\mu^2 = 10/h^2$ , d. h. er fällt praktisch mit (4.26) zusammen.

Wenn die Koeffizienten  $D$ ,  $\Gamma$ ,  $\mu$  für abschnittsweise konstante  $E(z)$ ,  $G(z)$ ,  $\nu(z)$  über die Plattendicke ermittelt werden, so stellt (4.25) das Gleichungssystem für mehrschichtige Platten mit starr verbundenen Schichten dar. Beispielsweise erhalten wir durch dreischichtige Platten mit relativ weicher Kernschicht und dünnen Außenschichten folgende Beziehungen:

$$D = \frac{E_1 h^2 t}{12(1-\nu_1^2)}, \quad \Gamma = \frac{G_1 h^2 t}{12}, \quad (4.27)$$

$$\tilde{\nu} = \nu_1, \quad \mu^2 = \frac{2G_2}{G_1 h t}.$$

Hierbei bedeuten  $h$  – die Gesamtdicke der Platte,  $t$  – die Dicke jeder Außenschicht,  $G_1$ ,  $E_1$ ,  $\nu_1$  – die Elastizitätscharakteristika der Außenschichten,  $G_2$  – der Schubmodul der Kernschicht. Diese Parameter fallen vollständig mit den in der Arbeit [10], empfohlenen zusammen.

Abschließend noch einige Bemerkungen zu den in [5] und [7] dargestellten Ergebnissen. Aus der Theorie einfacher Schalen kann man eine entsprechende Biegetheorie für Platten ableiten, die der hier vorgestellten Theorie entspricht. Die Elastizitätsmoduli für einschichtige homogene Platten (4.26) treten in der Theorie einfacher Schalen nur in anderen Kombinationen auf, stimmen jedoch wertmäßig vollständig überein. Der letzte Wert in

(4.27) ist mit entsprechender Vorsicht zu betrachten, was ein Vergleich mit experimentellen Arbeiten in [5] zeigte.

**Anmerkung:** Die in dem Artikel verwendeten Rechenregeln der Tensorrechnung und Tensoranalysis entsprechen [5] und [7]. Darüberhinaus sind die wichtigsten Regeln für die Kontinuumsmechanik z. B. in [8] und [11] enthalten.

#### LITERATUR

- [1] Cosserat E. F.: Theorie des corps deformables, Paris, 1909
- [2] Ericksen I. L., Truesdell C. Exact theory of rods and shells, Arch. Rational Mech. Anal., 1958, 1.
- [3] Serbin H.: Quadratic invariants of surface deformations and the strain energy of thin elastic shells, Journ. Math. Phys., 1963, vol. 4, 6.
- [4] Green A. E., Naghdy P. M., Waniwright W. L.: A general theory of a Cosserat surface, Arch. Rational Mech. Anal., 1965, 4
- [5] Altenbach H., Shilin P. A.: Eine nichtlineare Theorie dünner Dreischichtschalen und ihre Anwendung auf die Stabilitätsuntersuchung eines dreischichtigen Streifens, Techn. Mechanik, 3 (1982), H. 2.
- [6] Тимошенко С. П.: Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки, Физматгиз, Москва, 1963.
- [7] Altenbach H., Shilin P. A.: Die Bestimmung der Deformationsenergie für dreischichtige, dünne Schalen mit unsymmetrischem Aufbau und konstanter Dicke aus orthotropen Materialien. Wiss. Z. Techn. Hochsch. Magdeburg 26 (1982), H. 4.
- [8] Лурье А. И.: Теория упругости, Наука, Москва, 1970.
- [9] Reissner E.: On the theory of bending of elastic plates, Journ. Math. Phys., 1944, vol. 23, p. 184 – 191.
- [10] Reissner E.: On bending of elastic plates, Quart. Appl. Math., vol. 5, 1.
- [11] Лурье А. И.: Нелинейная теория упругости, Наука, Москва, 1980.

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr. sc. nat. Wladimir A. Palmow  
Leningrader Polytechnisches Institut  
„M. I. Kalinin“  
Lehrstuhl für Mechanik und Regelungsprozesse  
Leningrad/UdSSR  
Polytechnitscheskaja ul. 29  
Dipl.-Ing. Holm Altenbach  
Technische Hochschule „Otto von Guericke“  
Sektion Dieselmotoren, Pumpen und Verdichter  
3010 Magdeburg  
PSF 124