

Ein Differenzenverfahren zur Berechnung nichtisothermer Strömungen hochviskoser Medien in gerade berandeten Durchströmbauteilen

Chr. Plichta

1. Einführung

In den vergangenen Jahren gingen von der Plastikverarbeitungsindustrie entscheidende Impulse für die Ermittlung nichtisothermer Strömungsfelder in hochviskosen Medien aus. Die Strömungsvorgänge bei der Herstellung von Plasterzeugnissen sind mitbestimmend für die Effektivität der Verarbeitungsprozesse und die Qualität der Enderzeugnisse. Die Kenntnis der Temperatur-, Druck- und Geschwindigkeitsverteilung in strömenden Plastschmelzen hilft die Produktivität der Maschinen zu steigern, den Energiebedarf zu reduzieren und thermische Schädigung des Materials zu vermeiden.

Bei den in den Werkzeugen auftretenden Fließvorgängen spielt die starke Temperaturabhängigkeit der den Strömungsprozeß charakterisierenden Stoffgrößen sowie das nicht-Newtonsche Stoffverhalten der Plastschmelzen eine dominierende Rolle. Außerdem muß die Dissipation bei den hohen Druckverlusten Berücksichtigung finden. Obwohl die Trägheitskräfte für die vorliegenden Strömungsparameter ($Re \ll 1$) vernachlässigt werden können, bedingen die genannten Besonderheiten erhebliche Schwierigkeiten bei der Lösung der gestellten Aufgabe. Zwischen Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld liegt eine gegenseitige Beeinflussung bzw. Kopplung vor. Einerseits hängt das Geschwindigkeitsfeld über die Zähigkeitskräfte von der Temperatur ab, andererseits übt das Geschwindigkeitsfeld über die konvektive Wärmeleitung sowie über die Dissipation eine Rückwirkung auf das Temperaturfeld aus.

Für diese nichtlineare Problematik lassen sich keine geschlossenen Lösungen finden. Nachfolgend wird eine numerische Lösung für spezielle Randbedingungen und reinviskoses Stoffverhalten auf der Grundlage eines Differenzenverfahrens vorgestellt.

2. Mathematisches Modell

Das entwickelte Lösungsverfahren beschränkt sich auf stationäre Strömungen bei kleinen Re-Zahlen in ebenen bzw. rotationssymmetrischen gerade berandeten Durchströmbauteilen. Die Auswahl der geometrischen, rheologischen und thermischen Strömungsparameter erfolgt im Hinblick auf den Plastextrusions-Prozeß [2].

Die den Strömungsvorgang beschreibenden Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik besitzen unter Beachtung der genannten Voraussetzungen folgende Gestalt

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1)$$

Bewegungsgleichungen

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (2)$$

Energiegleichung

$$\rho c_p v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \epsilon T v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + S_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (3)$$

Bezüglich des Stoffverhaltens wurden ebenfalls vereinfachende Annahmen getroffen [2].

Die Plastschmelze verhalte sich wie eine reinviskose homogene isotrope Flüssigkeit ohne Normalspannungseffekte, sie genüge also dem rheologischen Stoffgesetz

$$S_{ij} = \eta_s \dot{D}_{ij}; \quad \dot{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

Die scheinbare Viskosität η_s ist eine Funktion der 2. Invarianten Π_D des Deformationsgeschwindigkeitstensors \dot{D}_{ij} und ändert sich mit Druck und Temperatur

$$\eta_s = \eta_s (\Pi_D, T, p).$$

Die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit wird ebenfalls berücksichtigt.

$$\lambda = \lambda(T).$$

Der thermische Volumenausdehnungskoeffizient ϵ , die spezifische Wärmekapazität c_p und die Dichte ρ werden als konstant angesetzt, die Expansionsarbeit wird jedoch in der Energiegleichung erfaßt.

Als hydrodynamische Randbedingung wird die Gültigkeit der Haftbedingung vorausgesetzt.

Die geometrischen Berandungen müssen dergestalt sein, daß im gesamten Strömungsgebiet die Hauptströmungsrichtung mit einer Koordinatenrichtung übereinstimmt. Für diesen Fall lassen sich die Quergeschwindigkeiten in der Bewegungsgleichung näherungsweise vernachlässigen. Bild 1 enthält eine Zusammenstellung von Bauteilen, die dieser Bedingung bei Wahl eines geeigneten Koordinatensystems genügen.

Die thermischen Randbedingungen, bestehend aus der Eintrittstemperaturverteilung und Wandrandbedingungen 1., 2. oder auch 3. Art, müssen eben bzw. rotations-

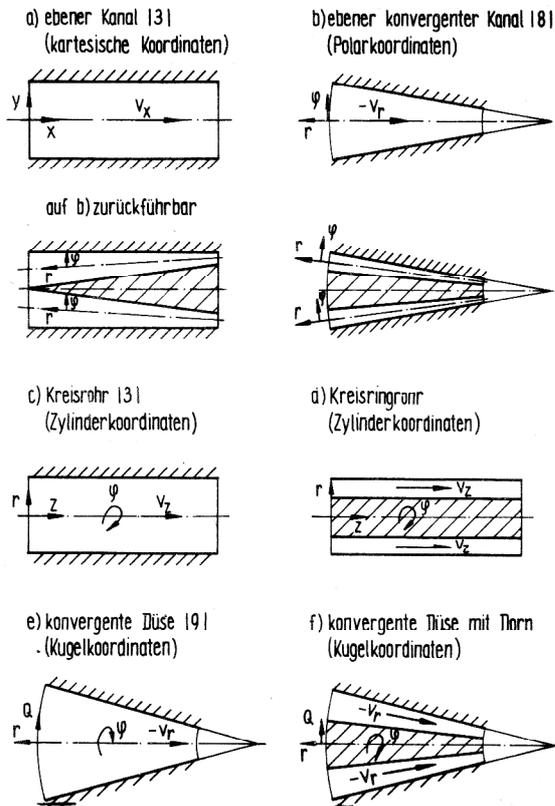


Bild 1
Berechenbare Durchströmbauteile

symmetrisch sein, unterliegen aber keinen weiteren Einschränkungen. Nichtzusammenhängende Wände können auch unterschiedliche thermische Randbedingungen aufweisen.

3. Lösungsverfahren und Programmaufbau

Unter der bei den vorliegenden Pe-Zahlen gestatteten Vernachlässigung der Wärmeleitung in Längsrichtung führt die Energiegleichung (3) auf eine nichtlineare parabolische Differentialgleichung. Damit läßt sich die Aufgabe auf ein Anfangs-Randwertproblem zurückführen.

Das gewählte Lösungsverfahren für das nichtlineare Gleichungssystem (1), (2) und (3) basiert auf einer schrittweisen Entkopplung von Energie- und Bewegungsgleichung. Die Lösung der Energiegleichung erfolgt schichtenweise in Strömungsrichtung mittels eines impliziten Differenzenverfahrens (Prädiktor-Korrektor-Schema) [3], [4]. Die Differentialquotienten werden in Hauptströmungsrichtung durch rückwärtige Differenzenquotienten und in Querrichtung durch zentrale Differenzenquotienten angenähert. Damit ergibt sich für die Energiegleichung folgende Gitterpunktgleichung.

$$A_{1i}^k T_{i-1}^k + A_{2i}^k T_i^k + A_{3i}^k T_{i+1}^k = A_{0i}^k$$

$$(k = j + \frac{1}{2}, j + 1).$$

Die nichtlinearen Koeffizienten wurden dabei bereits durch geeignete Näherungen ersetzt (Bild 2).

Die Koeffizienten A werden mit den im vorangegangenen bzw. im Zwischenschritt berechneten Temperatur-

$$A_i^k = f(v_i^{k-1/2}, p_i^{k-1/2}, T_i^{k-1/2}) \quad k = j + 1/2, j + 1$$

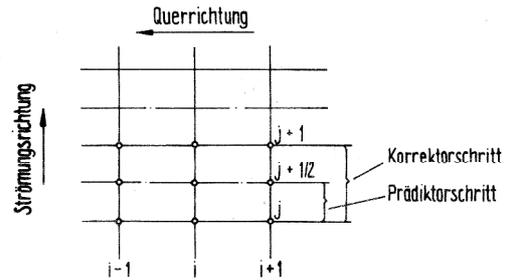


Bild 2
Differenzenschema

ren, Drücken und Geschwindigkeiten gebildet. Diese Vorgehensweise entspricht einer schrittweisen Linearisierung von (3). Die entstehenden Differenzgleichungen bilden ein lineares Gleichungssystem mit einer Bandmatrix, dessen Lösung mit der „Übertragungsmatrix-Methode“ nur geringen rechentechnischen Aufwand verursacht [5]. Für jeden Halbschritt ist die Bewegungsgleichung (2) im Wechsel mit der Energiegleichung (3) zu lösen. Die Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung führt auf ein Randwertproblem einer gewöhnlichen, nichtlinearen Differentialgleichung [4], wenn die Quergeschwindigkeiten vernachlässigt und die Temperaturen aus der in der Schicht bereits gelösten Energiegleichung übernommen werden.

Die Ordnung der Differentialgleichung hängt von der geometrischen Berandung ab. Als Randbedingungen liegen die Haftbedingung (Symmetriebedingung) und die Durchflußbedingung vor.

Die Differentialgleichung wird mit einem Mehrschrittverfahren nach Hamming [6] gelöst. Die Einarbeitung der Randbedingungen läßt sich nur auf iterativem Wege (Schießverfahren [7]) mit einem Newtonschen Näherungsverfahren für mehrere Veränderliche erzielen.

Die Quergeschwindigkeiten werden näherungsweise aus der Kontinuitätsgleichung bestimmt. Eine anschließende Korrektur der Längsgeschwindigkeiten mit dieser Näherung läßt sich wegen zu hoher Rechenzeiten nicht realisieren.

Die genannten Lösungsschritte sind bis zum Erreichen des Kanalrandes zu wiederholen.

Das Lösungsverfahren wurde für die Rechenanlage ESER 1040 programmiert. Das Programm TEGED enthält mehrere austauschbare Subroutinen und kann damit verschiedene rheologische, thermische und geometrische Parameter wahlweise erfassen. An der Erweiterung des Programms wird z. Z. noch gearbeitet. Mit dem Programm können außerdem 3 Varianten der Gitteraufteilung realisiert werden.

Bezüglich der Datenverwaltung treten keinerlei Schwierigkeiten auf, da für den Fortgang der Rechnung nur Werte aus zwei zurückliegenden Schichten benötigt werden. Der Ablauf des Verfahrens wird im schematischen Flußbild (Bild 3) skizziert.

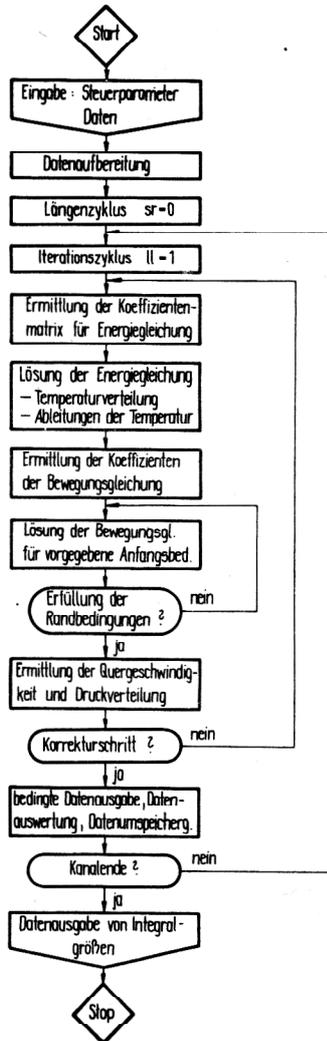


Bild 3
Schematisches Flußbild

4. Ebener konvergenter Kanal

4.1. Modellgleichungen

Die Strömung im ebenen konvergenten Kanal kann im Polarkoordinatensystem geeignet beschrieben werden (Bild 4).

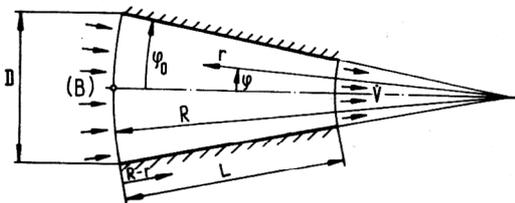


Bild 4
ebener konvergenter Kanal

Für diesen Anwendungsfall erfolgten Berechnungen mit dem Potenzgesetz

$$\eta_s = K e^{\left(\frac{\beta}{T-T_0} - \frac{\alpha}{p-p_0}\right) (4\Pi_D)^{\frac{n-1}{2}}} \quad (5)$$

und dem Gesetz nach Prandtl-Eyring

$$\eta_s = \eta_A e^{\left(\frac{\tilde{\beta}}{T-T_0} - \frac{\tilde{\alpha}}{p-p_0}\right) (4\Pi_D)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{ar sinh} [B(4\Pi_D)^{\frac{1}{2}}]} \quad (6)$$

Über die Koeffizienten β bzw. $\tilde{\beta}$ wird die experimentelle Temperaturabhängigkeit der scheinbaren Viskosität erfaßt. K , n , η_A , T_0 und B sind spezifische Stoffparameter, α bzw. $\tilde{\alpha}$ berücksichtigen die Druckabhängigkeit.

Bei der Dimensionsbefreiung der Grundgleichungen wurden die Koordinaten in r - bzw. in r - und in φ -Richtung gleichzeitig verzerrt. Damit kann bei einem äquidistanten Netz im transformierten System eine veränderliche Schrittweite im Original erzielt werden.

Die Transformation I mit

$$s = \frac{1}{\varphi_0} \ln \frac{R}{r}, \quad h = \frac{\varphi}{\varphi_0} \quad (7)$$

bedingt eine Verkleinerung der Längsschrittweite mit abnehmendem Düsendurchmesser, d. h. mit steigender Strömungsgeschwindigkeit.

Transformation II mit

$$s = \frac{1}{\varphi_0} \ln \frac{R}{r}, \quad h = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0} \quad (8)$$

bewirkt zusätzlich eine Verringerung der Querschnittweite in Richtung Wand. Sie ist für starke Temperaturspitzen in Wandnähe geeignet.

Die vereinfachten Grundgleichungen besitzen für die Transformation I die Form

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{\partial v_h}{\partial h} = 0 \quad (9)$$

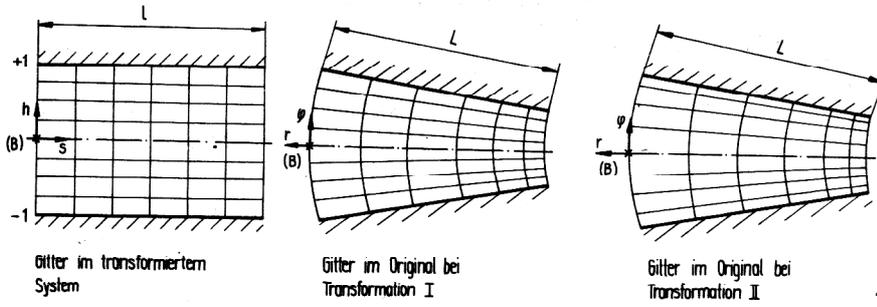
Bewegungsgleichung

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p^*}{\partial s} &= \frac{e^{2\varphi_0 s}}{\operatorname{Re}} \left(\frac{\partial \eta^*}{\partial h} \frac{\partial v_s}{\partial h} + 2v_s \varphi_0 \frac{\partial \eta^*}{\partial s} + \eta^* \frac{\partial^2 v_s}{\partial h^2} \right) \\ \frac{\partial p^*}{\partial h} &= \frac{e^{2\varphi_0 s}}{\operatorname{Re}} \left(\frac{\partial \eta^*}{\partial s} \frac{\partial v_s}{\partial h} - 2\varphi_0 v_s \frac{\partial \eta^*}{\partial h} - 2\varphi_0 \frac{\partial v_s}{\partial h} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

oder nach Umformung

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= \int v_s dh, \Psi I = v_s, \Psi II = \frac{\partial v_s}{\partial h}, \Psi III = \frac{\partial^2 v_s}{\partial h^2}, \Psi IV = \frac{\partial^3 v_s}{\partial h^3}, \\ \Psi IV + \Psi III \frac{2}{\eta^*} \frac{\partial \eta^*}{\partial h} + \Psi II \left(\frac{1}{\eta^*} \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial h^2} + 2\varphi_0 \frac{1}{\eta^*} \frac{\partial \eta^*}{\partial s} + 4\varphi_0 \frac{1}{\eta^*} \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial s^2} \right) \\ &+ \Psi I \left(4\varphi_0 \frac{1}{\eta^*} \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial h \partial s} + 4\varphi_0^2 \frac{1}{\eta^*} \frac{\partial \eta^*}{\partial h} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Bild 5
Gitterverzerrungen



Energiegleichung

$$Pe \left(v_s \frac{\partial \vartheta}{\partial s} + v_h \frac{\partial \vartheta}{\partial h} \right) = \frac{\partial}{\partial h} \left(\lambda^* \frac{\partial \vartheta}{\partial h} \right) + E (\vartheta + 1) v_s \frac{\partial p^*}{\partial s} + Br \eta^* e^{2\varphi_0 s} \left[4\varphi_0^2 v_s^2 + \left(\frac{\partial v_s}{\partial h} \right)^2 \right]. \quad (12)$$

Die zweite Invariante lautet

$$\Pi_D = \frac{1}{4} \left(\frac{e^{2\varphi_0 s} \cdot v_B}{\varphi_0 R} \right)^2 \left[4\varphi_0^2 v_s^2 + \left(\frac{\partial v_s}{\partial h} \right)^2 \right]. \quad (13)$$

Für das Potenzgesetz gilt

$$\eta^* = \frac{\eta_s}{\eta_B} = e^{\left[\frac{\beta^*}{\vartheta - \vartheta_0} - \frac{\beta^*}{\vartheta_0} - \frac{\alpha^*}{p^* - p_0^*} + \frac{\alpha^*}{p_B^* - p_0^*} \right]} \left(e^{2\varphi_0 s} \right)^{n-1} \cdot \left[4\varphi_0^2 v_s^2 + \left(\frac{\partial v_s}{\partial h} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (14)$$

und für Prandtl-Eyring

$$\eta^* = \frac{\eta_s}{\eta_B} = e^{\left[\frac{\beta^*}{\vartheta - \vartheta_0} + \frac{\beta^*}{\vartheta_0} - \frac{\alpha^*}{p^* - p_0^*} + \frac{\alpha^*}{p_B^* - p_0^*} \right]} \cdot \frac{\operatorname{arsinh} \left\{ B^* e^{2\varphi_0 s} \left[4\varphi_0^2 v_s^2 + \left(\frac{\partial v_s}{\partial h} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}}{e^{2\varphi_0 s} \left[4\varphi_0^2 v_s^2 + \left(\frac{\partial v_s}{\partial h} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (15)$$

Bis auf die Geschwindigkeiten, die auf die von s abhängige mittlere Geschwindigkeit bezogen sind, wurden alle übrigen dimensionslosen Größen mit entsprechenden Bezugsgrößen am Eintritt (B) gebildet.

Für die dimensionslose Temperatur gilt

$$\vartheta = \frac{T - T_B}{T_B}. \quad (16)$$

Weiterhin wurden folgende modifizierte dimensionslose Kennzahlen eingeführt

$$Re = \frac{\rho_B}{\eta_B} v_B \varphi_0 \cdot R \quad \text{Reynoldszahl} \quad (17)$$

$$Pe = \frac{\rho_B \cdot c_p}{\lambda_B} v_B \varphi_0 R \quad \text{Pecletzahl} \quad (18)$$

$$Br = \frac{\eta_B}{\lambda_B \cdot T_B} v_B^2 \quad \text{Brinkmanzahl} \quad (19)$$

$$E = \frac{\epsilon_B \rho_B}{\lambda_B} v_B^3 \varphi_0 R \quad \text{Expansionskennzahl} \quad (20)$$

Die hydrodynamischen Randbedingungen lauten

$$\psi(-1) = 0$$

$$\psi(1) = 2 \quad \text{bzw.} \quad \psi(0) = 1 \quad \text{Durchflußbedingung} \quad (21)$$

$$\psi^I(-1) = 0$$

$$\psi^I(1) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \psi^{II}(0) = 0 \quad \text{Haftbedingung} \quad (22)$$

$$p(\pm 1, l) = p_b \quad \text{mit } p_b \text{ als Umgebungsdruck.} \quad (23)$$

Als thermische Randbedingungen können auftreten, die Eintrittsbedingung

$$\vartheta_E = \vartheta(s=0) = f_0(h) \quad -1 \leq h \leq 1 \quad (24)$$

sowie die Wandrandbedingungen $0 \leq s \leq 1$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{w1} &= \vartheta(h=-1) = f_1(s) \\ \vartheta_{w2} &= \vartheta(h=1) = f_2(s) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial h} |_{h=0} = 0 \\ q_{w1}^* &= \frac{\partial \vartheta}{\partial h} |_{h=-1} = g_1(s) \\ q_{w2}^* &= \frac{\partial \vartheta}{\partial h} |_{h=1} = g_2(s) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial h} |_{h=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

außerdem sind auch gemischte Randbedingungen zulässig.

Entsprechende Beziehungen ergeben sich für die Transformation II [8]. Hierbei treten allein in den verschiedenen Termen der Gleichungen noch zusätzliche Koeffizientenfunktionen in h auf. An der Wand für $h = \pm 1$ entsteht allerdings eine Singularität. Dieses Problem kann durch die Berechnung des wandnächsten Schrittes und damit auch die Einarbeitung der Randbedingung über die Transformation I umgangen werden.

Auf die Transformation II wird man vor allem dann zurückgreifen, wenn, wie bei Temperatursprüngen, sehr große Wandtemperaturgradienten zu erwarten sind. Das in 3. skizzierte Lösungsverfahren wurde für beide Transformationen in den Programmen TEGED-EKOKA 1 bzw. TEGED-EKOKA 2 realisiert.

4.2. Numerische Ergebnisse

Einige numerische Ergebnisse werden in den Bildern 6 bis 8 vorgestellt. Die Entwicklung von Temperaturprofilen für die symmetrische Wandrandbedingung konstanter Wärmestrom und konstante Wandtemperatur ist dem Bild 6 zu entnehmen. Den Einfluß der Düsengeometrie verdeutlichen Bild 7 und Bild 8. Ähnlich wie bei der

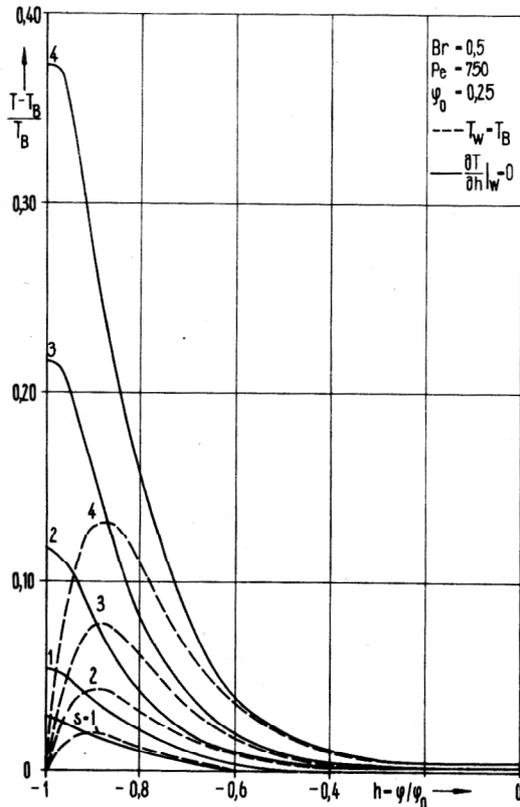


Bild 6
Entwicklung von Temperaturprofilen in Abhängigkeit vom Weg s bei adiabater Rohrwand und konstanter Wandtemperatur $T_w = T_B$

Rohr- und ebenen Kanalströmung kann bei technisch wichtigen Düsengeometrien (begrenzte Länge) keine bemerkenswerte Änderung der Kanalmittentemperaturen durch die thermischen Randbedingungen erzielt werden. In Bild 7 ist das Anwachsen der maximalen Temperaturen mit dem Öffnungswinkel φ_0 zu erkennen. Ursache für dieses Verhalten bildet die zunehmende Dissipationsleistung aufgrund der stärker ansteigenden Strömungsgeschwindigkeiten. Die Rückwirkung des Geschwindigkeitsprofils auf das Temperaturfeld erfolgt ebenfalls hauptsächlich über die Dissipation, Einflüsse der konvektiven Wärmeübertragung stehen demgegenüber zurück. Testrechnungen gaben weiterhin darüber Auskunft, bis zu welchem Öffnungswinkel in der Bewegungsgleichung Terme mit φ_0 vernachlässigt werden können. Als Schrankenwert konnte $\varphi_0 = 15^\circ$ ermittelt werden. Ein Vergleich mit der exakteren Lösung ergab maximale Abweichungen unter 3 %. Diese Vorgehensweise verkürzt nicht allein die Rechenzeit des aufwendigsten Lösungsschrittes, sondern schafft auch die Möglichkeit, leicht gekrümmte Kanäle näherungsweise zu berechnen [8], denn sie entspricht der Annäherung der Geometrie durch ein Stufenmodell.

5. Schlussfolgerungen

Das vorgestellte numerische Verfahren ermöglicht die Berechnung von nichtisothermen Strömungen hochviskoser Medien für eine bestimmte Klasse von Durchströmbauteilen und begrenzte Strömungsparameter. Eine Erweiterung des Verfahrens auf leicht gekrümmte Bauteile mit kleinen Öffnungswinkeln läßt sich vornehmen. Die Erfassung beliebiger Geometrien durch zusätzliche Iterationen für die Quergeschwindigkeiten ist zu rechenzeitintensiv und deshalb nicht praktikabel.

LITERATUR:

- [1] Rumpel, H.: Strömungen hochviskoser Newtonscher und nicht-Newtonscher Flüssigkeiten. Technische Mechanik, (1980) H. 1, S. 79 – 85.
- [2] Hölzig, M., Lobeck, W., Plichta, Chr.: Ein Berechnungsverfahren für gekoppelte Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder hochviskoser, nicht-Newtonscher Flüssigkeiten in Durchströmbauteilen. Diss. TH Karl-Marx-Stadt, 1974.
- [3] Schneider, J.: Ein Beitrag zur theoretischen Untersuchung der nichtisothermen, laminaren Strömung reinviskoser Medien mit temperatur- und druckabhängigen Stoffeigenschaften in ebenen Kanälen und kreiszylindrischen Rohren. Diss. TH Karl-Marx-Stadt, 1975.

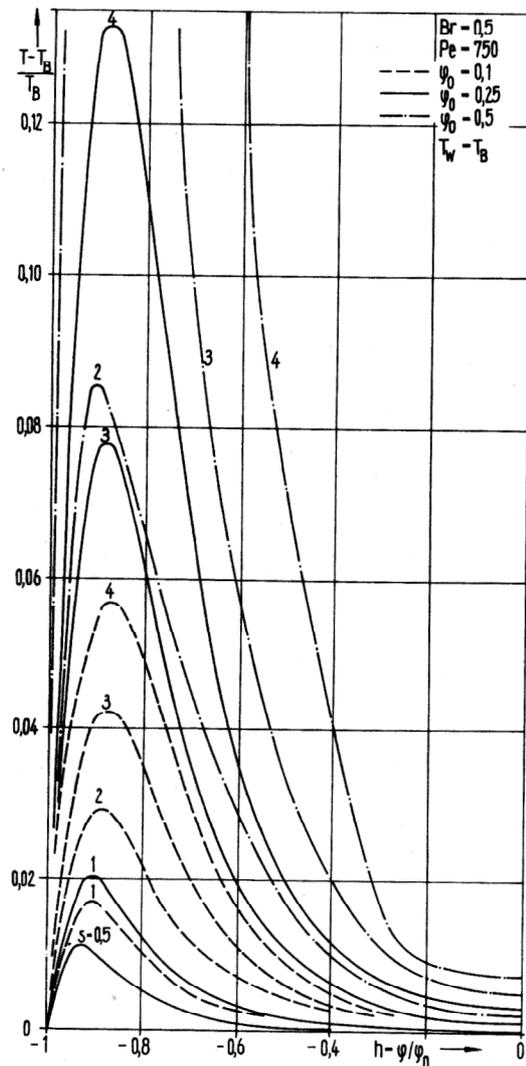


Bild 7
Entwicklung von Temperaturprofilen in Abhängigkeit vom Kanalöffnungswinkel

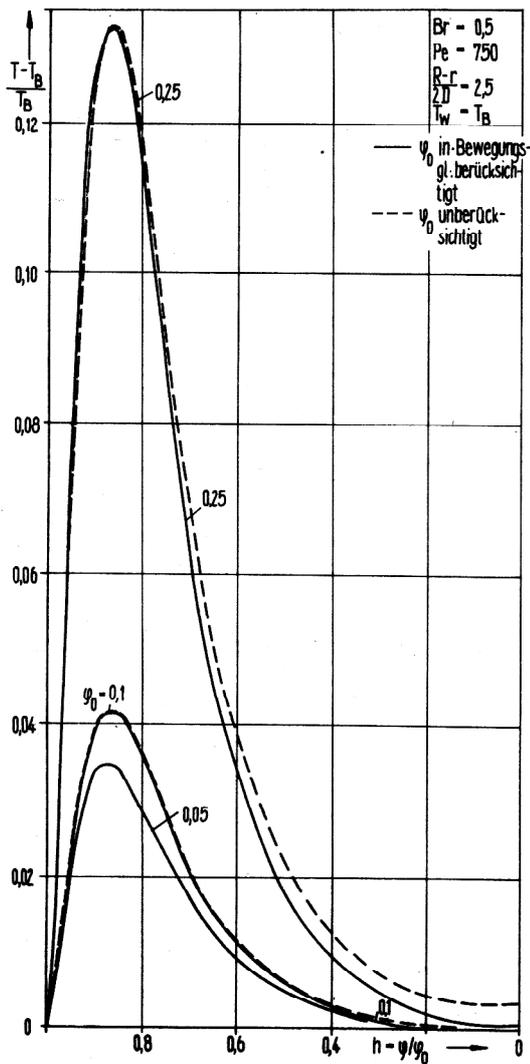


Bild 8
Vergleich der Temperaturprofile beim Stufenmodell

- [4] Douglas, J., Jones, B.: On predictor-corrector methods for nonlinear parabolic differential equations. J. Soc. Industr. Appl. Math. (1963) H. 11, S. 195 – 204.
- [5] Isaacson/Keller: Analyse numerischer Verfahren. Edition Leipzig, 1972.
- [6] Ralston, A., Wilf, H. S.: Mathematische Methoden für Digitalrechner I. Oldenbourg Verlag München – Wien, 1969.
- [7] Kiesewetter, H., Maess, G.: Elementare Methoden der numerischen Mathematik. Akademie-Verlag Berlin, 1974.
- [8] Plichta, Ch.: Nichtisotherme Strömung in ebenen konvergenen Kanälen. Unveröffentlichter Forschungsbericht der TH Karl-Marx-Stadt, 1982.
- [9] Schädlich, V.: Nichtisotherme Strömung in rotationssymmetrischen Kanälen. Diplomarbeit an der TH Karl-Marx-Stadt, 1979.

Anschrift des Verfassers:

Dr.-Ing. Chr. Plichta
 Technische Hochschule
 Sektion Maschinen-Bauelemente
 9010 Karl-Marx-Stadt
 PSF 964