

Zur Lösung von Problemen der optimalen Steuerung in der Kontinuumsmechanik

K. H. Schlüßler, R. Hopsch

1. Einleitung

Mit der rapiden Entwicklung der Methode der finiten Elemente (FEM) seit der Mitte der 50er Jahre und dem seither erfolgten schnellen Generationswechsel in der elektronischen Rechentechnik stehen dem Ingenieur Mittel zur Verfügung, immer kompliziertere Tragwerke auf gewünschte Zustände (Verschiebungen, Spannungen etc.) hin zu analysieren. Beim klassischen Entwurf werden dabei die geometrische Konfiguration, die Materialparameter und die Randkontur als fest vorgegeben betrachtet. Die immer besser werdende rechentechnische Basis einerseits sowie die steigenden Ansprüche an Konstruktionen, die unter schärferen Zustandsbeschränkungen hergestellt werden können, legt es nahe, in verstärktem Maße die bekannten Optimierungsverfahren für die Konstruktionspraxis aufzubereiten. Je nachdem welche Parameter für den Entwurf als variabel angenommen werden, wie die Belastungen und Beschränkungen vorgegeben sind, (statisch, dynamisch, aeroelastisch) und ob es sich um ein diskretes oder ein Kontinuumstragwerk handelt, stehen unterschiedliche Optimierungsverfahren zur Verfügung. Sie lassen sich wie folgt klassifizieren:

- i, Mathematische Optimierungsmethoden
- ii, Optimalitätskriterien-Verfahren
- iii, Theorie der optimalen Steuerung
- iv, Dynamische Programmierung.

Die ersten beiden Methoden werden schon sehr weitgehend genutzt, insbesondere für von Hause aus diskrete Tragwerke. Jedoch sind die Übergänge fließend, weil auch die Kontinuumstragwerke bei Anwendung der FEM-Verfahren indirekt als diskrete Tragwerke aufgefaßt werden können. Auf dieser Idee basierend haben Armand und Lodier [1] zum Beispiel eine Iterationsmethode für Platten minimaler Masse mit Hilfe eines FEM-Programms mit im Element konstanten Momenten entwickelt. Sie benutzt die notwendige Optimalitätsbedingung als Grundlage für die numerische Lösung.

Die Theorie der optimalen Steuerung läßt sich, wie nachfolgend gezeigt wird, erfolgreich für die Optimierung von Kontinuumstragwerken einsetzen. Voraussetzung ist dabei aber eine effektive Lösungsmethode für die das Problem beschreibende Randwertaufgabe. Hierfür werden im internationalen Maßstab vorzugsweise FEM-Programme eingesetzt. Damit bestimmen die für die Diskretisierung benutzten Elemente den Charakter der Lösung (z. B. konstante, linear bzw. quadratisch veränderliche Dicken von Platten und Scheiben).

In der vorliegenden Arbeit wird die Lösungsmethodik für Objekte der linearen Elastizitätstheorie (Balken,

Platte, Scheibe) dargestellt. Sie beruht auf dem Übergang zur jeweils verallgemeinerten Randwertaufgabe im Sinne einer Variationsformulierung bzw. von Galerkin-Gleichungen in der diskretisierten Darstellung und der Herleitung von adjungierten Randwertaufgaben. Letztere erfordern die Berechnung weiterer Zustände, die durch Randwertaufgaben mit dem gleichen Differential- und Randwertoperator wie bei der gegebenen Aufgabe aber einer von der Art der Zielfunktion bzw. weiterer Nebenbedingungen beeinflussten rechten Seite der Differentialgleichungen beschrieben werden. Die optimale Steuerung läßt sich leider nur schrittweise erreichen. Dazu ist der jeweiligen Aufgabe entsprechend ein Gradientenverfahren zu konzipieren. Die Zustände und Steuerungen sind dabei in jedem Iterationsschritt neu zu berechnen.

2. Typische Randwertaufgaben

Wir betrachten im folgenden solche Modelle (Balken, Platte, Scheibe), bei denen die zu steuernden geometrischen oder physikalischen Parameter u als Koeffizienten einer gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichung bzw. eines Differentialgleichungssystems einer Randwertaufgabe mit der Zustandsvariablen z gegeben sind. Dabei sei z eine n -dimensionale hinreichend glatte Vektorfunktion und u eine r -dimensionale (etwa stückweise stetige oder beschränkt meßbare) Vektorfunktion mit Werten aus dem Steuerbereich U des R^r .

In Operatorschreibweise lautet die Randwertaufgabe allgemein

$$A(u)z = q(x, u) \quad x \in \Omega \quad (2.1)$$

$$R(u)z = g(x, u) \quad x \in \Gamma \quad (2.2)$$

wobei Ω der Definitionsbereich des Systems mit dem Rand Γ ist. Vorläufig setzen wir das Gebiet als festgegeben voraus, d. h. eine veränderliche Randgeometrie wird noch ausgeschlossen. Zu bestimmen ist $\{z, u\}$ so, daß ein Zielfunktional

$$F(z, u) = \int_{\Omega} f(z, u) d\Omega = \text{Min} \quad (2.3)$$

minimiert wird und gegebenenfalls weitere Nebenbedingungen

$$G^i(z, u) = \int_{\Omega} g^i(z, u) d\Omega = C^i = \text{konstant} \quad (2.4)$$

erfüllt werden.

Zur Erläuterung der Aufgabe (2.1) bis (2.4) seien die folgenden Beispiele gewählt.

P_1 : Der Balken veränderlichen Querschnittes mit minimalem Volumen und vorgegebenem Mittelwert der Durchbiegung

Es seien:

$EI_0 s^\alpha(x)$ die Biegesteifigkeit,
 $V(x)$ die Verschiebung (Durchbiegung),
 $A_0 s(x)$ die Querschnittsfläche,
 $q(x)$ die Linienbelastung des Systems.

Das Paar $\{V(x), s(x)\}$ verkörpert die Zustands- und Steuervariable des Systems, das durch die Randwertaufgabe

$$EI_0 (s^\alpha(x) V''(x))' = q(x) \quad \text{für } x \in \Omega \quad (2.5)$$

$$V(x) = 0, EI_0 s^\alpha(x) V''(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Gamma_1 \quad (2.6)$$

$$V(x) = 0, V'(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Gamma_2 \quad (2.7)$$

(Γ_1 frei drehbare Lagerung, Γ_2 Einspannung) beschrieben wird. Die Steuervariable (Formfunktion) $s(x)$ möge gemäß $s_u(x) \leq s(x) \leq s_o(x)$ beschränkt sein, das Funktional

$$F(V, s) = \int_{\Omega} A_0 s(x) dx = \text{Min}_{s(x)} \quad (2.8)$$

minimieren und der Durchbiegungsbeschränkung

$$G^1(V, s) = \int_{\Omega} \tilde{q}(x) V(x) dx = C = \text{konstant} \quad (2.9)$$

genügen, wobei sich mit Hilfe von $\tilde{q}(x)$ die Verschiebungen längs der Stabachse wichten lassen.

P_2 : Die Kirchhoff'sche Platte veränderlicher Höhe $h(x_1, x_2)$ mit minimalem Volumen und vorgegebenem Mittelwert der Durchbiegung.

Es seien:

D_{ikpq} der Elastizitätstensor,
 $h(x_1, x_2)$ die Plattendicke,
 $q(x_1, x_2)$ die Belastung,
 $w(x_1, x_2)$ die Durchbiegung.

Das Paar $\{w(x_1, x_2); h(x_1, x_2)\}$ verkörpert die Zustands- und Steuervariable des Systems, das durch die Randwertaufgabe

$$D_{ikpq} (h^\alpha(x_1, x_2) w|_{pq})|_{ik} = q(x_1, x_2) \quad \text{für } (x_1, x_2) \in \Omega \quad (2.10)$$

$$w = 0, M_{ik} n_i n_k = 0 \quad \text{für } (x_1, x_2) \in \Gamma_1, \quad (2.11)$$

$$w = 0, w|_i n_i = 0 \quad \text{für } (x_1, x_2) \in \Gamma_2, \quad (2.12)$$

(Γ_1 frei drehbare Lagerung, Γ_2 Einspannung, n_i Richtungsvektor der äußeren Normalen des Randes Γ der Platte) beschrieben wird. Die Steuervariable möge gemäß

$h_u(x_1, x_2) \leq h(x_1, x_2) \leq h_o(x_1, x_2)$ beschränkt sein, das Funktional

$$F(w, h) = \int_{\Omega} h(x_1, x_2) d\Omega = \text{Min} \quad (2.13)$$

minimieren und der Durchbiegungsbeschränkung

$$G^1(w, h) = \int_{\Omega} \tilde{q}(x_1, x_2) w(x_1, x_2) d\Omega = C = \text{konstant} \quad (2.14)$$

genügen.

Bemerkung:

Für $\alpha = 3$ erhält man die Platte homogenen Materials, mit $\alpha = 1$ läßt sich die Sandwichplatte modellieren.

P_3 : Die Scheibe veränderlicher Dicke $h(x_1, x_2)$ mit minimalem Volumen bei möglichst gleichförmiger Beanspruchung.

Es seien:

D_{ikpq} der Elastizitätstensor,
 $h(x_1, x_2)$ die Scheibendicke,
 X_i die Flächenkraft,
 $v_k(x_1, x_2)$ der Verschiebungsvektor,
 $\sigma_{ik} = D_{ikpq} v_p|_q$ der Spannungstensor.

Das Paar $\{v_k(x_1, x_2), h(x_1, x_2)\}$ verkörpert die Zustands- und Steuervariable des Systems, das durch die Randwertaufgabe

$$(h(x_1, x_2) D_{ikpq} v_p|_q)|_i + h(x_1, x_2) X_k = 0 \quad \text{für } (x_1, x_2) \in \Omega \quad (2.15)$$

$$v_p = \bar{v}_p \quad \text{für } (x_1, x_2) \in \Gamma_1 \quad (2.16)$$

$$t_k = h \sigma_{ik} n_i = \bar{t}_k \quad \text{für } (x_1, x_2) \in \Gamma_2 \quad (2.17)$$

beschrieben wird. Die Steuervariable möge gemäß

$h_u(x_1, x_2) \leq h(x_1, x_2) \leq h_o(x_1, x_2)$ beschränkt sein, das Funktional

$$F(v_k, h) = \int_{\Omega} h(x_1, x_2) d\Omega = \text{Min} \quad (2.18)$$

minimieren und der Spannungsbeschränkung entsprechend dem von Mises'schen Bruchkriterium

$$\Phi(\sigma) = 3 \sigma_{ik} \sigma_{ik} - \sigma_{ii} \sigma_{kk} - 2 \sigma_o^2 \leq 0, \quad (2.19)$$

genügen, wobei σ_o die einachsige Fließspannung bedeutet.

Letzteres wird in die Funktionalform

$$G^1(v_k, h) = \int_{\Omega} \Phi^2(\sigma) (1 + \text{sign } \Phi(\sigma))^2 d\Omega = 0 \quad (2.20)$$

überführt.

Weitere Probleme siehe [2], [3], [4].

3. Die allgemeine Lösungsmethode

Probleme der optimalen Steuerung lassen im allgemeinen

i) die geometrische und/oder physikalische Konfiguration

ii) die Randkontur als variabel zu. Da (wie im allgemeinen

bei Optimierungsproblemen) Einschrittlösungen nur in einfachen Ausnahmefällen existieren, sind inkrementelle

Lösungsverfahren mit kleineren Schrittweiten heranzuziehen. Die Unterschiede zwischen den o. g. Fällen bestehen allein darin, daß infolge der variablen Kontur eine explizite Abhängigkeit von x auftritt, die bei der Variation der Funktionale zu beachten ist.

$$i) \quad F(z, u) = \int_{\Omega} f(z, u) \, d\Omega$$

$$\delta F(z, u) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \delta z + \frac{\partial f}{\partial u} \delta u \right) d\Omega$$

$$ii) \quad F(x, z, u) = \int_{\Omega} f(x, z, u) \, d\Omega$$

$$\delta F(x, z, u) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \delta z + \frac{\partial f}{\partial u} \delta u \right) d\Omega + \int_{\Gamma} f \delta x_i n_i \, d\Gamma.$$

Wir betrachten also nur den Fall i). Eine einheitliche Lösungsmethode für die beiden Aufgabenklassen ergibt sich dann wie folgt (Vgl. auch [5]).

Mit Hilfe eines adjungierten Zustandes z^* , partieller Integration und Anwendung des Gauss'schen Integralsatzes läßt sich (2.1) in das sogenannte verallgemeinerte Problem

$$a_u(z, z^*) = (q, z^*) \quad (3.1)$$

überführen, wobei $a_u(z, z^*)$ eine Bilinearform

$$a_u(z, z^*) = (A(u) z, z^*) \quad (3.2)$$

darstellt.

(3.1) bildet für die Diskretisierung mittels der Methode der finiten Elemente die Grundlage für die Herleitung der Galerkin-Gleichungen. Durch Zusammenfassung von (2.3) und (2.4) erhält man ein erweitertes Funktional

$$L(z, u) = \int_{\Omega} (f(z, u) + \lambda_1 g^i(z, u)) \, d\Omega = \text{Min.} \quad (3.3)$$

Die Untersuchung dieses Funktionals hinsichtlich seines Gradienten bezüglich der Steuerung u führt zur Möglichkeit, ein Gradientenverfahren aufzubauen, mit dem man sich schrittweise der optimalen Steuerung nähert. Man bildet dazu zunächst die Variation

$$\delta L = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \delta u + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z + \lambda_1 \frac{\partial g^i}{\partial u} \delta u + \lambda_1 \frac{\partial g^i}{\partial z} \delta z \right) d\Omega. \quad (3.4)$$

Die Variationen des Zustandes und der Steuerung unterliegen aber gleichzeitig der Randwertaufgabe (2.1), (2.2) bzw. der verallgemeinerten Form (3.1). Das gibt die Möglichkeit, mit Hilfe von (3.1) die Variation δz aus (3.4) zu eliminieren.

Für die Probleme P_1 und P_2 mit dem homogenen Randbedingungen (2.6), (2.7) bzw. (2.11), (2.12) d. h. $g(x, u) = 0$ folgt als geeigneter Ansatz für adjungierte Zustände z^* bzw. z^i

$$A(u) z^* = \frac{\partial f}{\partial z} \quad x \in \Omega, \quad (3.5)$$

$$R(u) z^* = 0 \quad x \in \Gamma, \quad (3.6)$$

bzw.

$$A(u) z^i = \frac{\partial g^i}{\partial z} \quad x \in \Omega, \quad (3.7)$$

$$R(u) z^i = 0 \quad x \in \Gamma, \quad (3.8)$$

weil damit die Identitäten

$$\int_{\Omega} (A(u) z^* \delta z - \frac{\partial q}{\partial u} \delta u z^* + \frac{\partial a_u(z, z^*)}{\partial u} \delta u) \, d\Omega = 0, \quad (3.9)$$

$$\int_{\Omega} (A(u) z^i \delta z - \frac{\partial q}{\partial u} \delta u z^i + \frac{\partial a_u(z, z^i)}{\partial u} \delta u) \, d\Omega = 0 \quad (3.10)$$

die für $\frac{\partial f}{\partial z} \delta z$ und $\frac{\partial g^i}{\partial z} \delta z$ benötigten äquivalenten Formeln liefern.

Damit kann man (3.4) in die gewünschte Darstellung bringen.

$$\delta L = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial u} z^* - \frac{\partial a_u(z, z^*)}{\partial u} \right) + \lambda_1 \left(\frac{\partial g^i}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial u} z^i - \frac{\partial a_u(z, z^i)}{\partial u} \right) \right] \delta u \, d\Omega. \quad (3.11)$$

Hierbei bildet der Klammerausdruck im Integranden von (3.11) den gesuchten Gradienten des Funktionals L . Zu bemerken ist, daß (3.5), (3.6) bzw. (3.7), (3.8) zusätzlich zu lösende Randwertaufgaben sind.

Für das Problem P_1 sind also (sinngemäß mit den Randbedingungen (2.6) und (2.7)) die Differentialgleichungen

$$EI_0 (g^\alpha(x) \tilde{V}''(x))'' = 0 \quad (3.12)$$

$$EI_0 (g^\alpha(x) \tilde{V}'(x))' = \tilde{q}(x) \quad (3.13)$$

zu lösen, für das Problem P_2 (Randbedingungen analog zu (2.11) und (2.12)) sind es die Differentialgleichungen

$$D_{ikpq} (h^\alpha(x_1, x_2) \tilde{w}_{|pq}|_{ik}) = 0, \quad (3.14)$$

$$D_{ikpq} (h^\alpha(x_1, x_2) \tilde{w}_{|pq}|_{ik}) = \tilde{q}(x_1, x_2). \quad (3.15)$$

Wie man leicht einsieht, sind jedoch die Zustände $\tilde{V}(x)$ und $\tilde{w}(x_1, x_2)$ identisch null.

Das Problem P_3 beinhaltet wegen seiner inhomogenen Randbedingungen und der Spannungsbeschränkungen (2.20) einige Besonderheiten. Deshalb soll es etwas ausführlicher erläutert werden. Die Randwertaufgabe läßt sich in die verallgemeinerte Form

$$\int_{\Omega} h D_{ikpq} v_{p|q} \tilde{v}_{k|i} \, d\Omega - \int_{\Gamma} t_k \tilde{v}_k \, d\Gamma = \int_{\Omega} h X_k \tilde{v}_k \, d\Omega \quad (3.16)$$

bringen. Das erweiterte Funktional sei von der Gestalt

$$L(v_k, h, \sigma_{kp}) = \int_{\Omega} (f(v_k, h) + \lambda_i g^i(v_k, h, \sigma_{kp})) d\Omega = \text{Min} \quad (3.17)$$

mit der Variation

$$\delta L = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial v_k} \delta v_k + \frac{\partial f}{\partial h} \delta h + \lambda_i \frac{\partial g^i}{\partial v_k} \delta v_k + \lambda_i \frac{\partial g^i}{\partial h} \delta h + \lambda_i \frac{\partial g^i}{\partial \sigma_{kp}} \delta \sigma_{kp} \right) d\Omega. \quad (3.18)$$

Unter Beachtung des Stoffgesetzes $\sigma_{kp} = D_{knpj} v_{j|q}$ führen wir die Variation $\delta \sigma_{kp}$ gemäß

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial g^i}{\partial \sigma_{kp}} \delta \sigma_{kp} d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial g^i}{\partial \sigma_{kp}} D_{knpj} \delta v_{j|q} d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\partial g^i}{\partial \sigma_{kp}} D_{knpj} \delta v_j n_q d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Omega} D_{knpj} \left(\frac{\partial g^i}{\partial \sigma_{kp}} \right)_{|q} \delta v_j d\Omega \end{aligned} \quad (3.19)$$

auf die Variation der Zustandsgröße zurück und erhalten

$$\begin{aligned} \delta L &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial f}{\partial v_k} \delta v_k + \frac{\partial f}{\partial h} \delta h + \lambda_i \left(\frac{\partial g^i}{\partial v_i} - D_{knpj} \left(\frac{\partial g^i}{\partial \sigma_{kp}} \right)_{|q} \right) \delta v_j \right. \\ &\quad \left. + \lambda_i \frac{\partial g^i}{\partial h} \delta h \right] d\Omega + \lambda_i \int_{\Gamma_2} \frac{\partial g^i}{\partial \sigma_{kp}} D_{knpj} \delta v_j n_q d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Andererseits ergibt die Variation von (3.16)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta h D_{ikpq} v_{p|q} \tilde{v}_{k|i}^* d\Omega - \int_{\Omega} (D_{ikpq} h \tilde{v}_{k|i}^*)_{|q} \delta v_p d\Omega \\ + \int_{\Gamma_2} \tilde{t}_k^* \delta v_k d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \delta t_k \tilde{v}_k^* d\Gamma = \int_{\Omega} \delta h X_k \tilde{v}_k^* d\Omega. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Hieraus erkennt man die Ansätze für die adjungierten Zustände \tilde{v}_k^* bzw. \tilde{v}_k^i in der folgenden Form als geeignet:

$$(h D_{jkpq} \tilde{v}_{p|q}^*)_{|j} + \frac{\partial f}{\partial v_k} = 0 \quad \text{für } (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (3.22)$$

$$\tilde{v}_k^* = 0 \quad \text{für } (x_1, x_2) \in \Gamma_1, \quad (3.23)$$

$$\tilde{t}_k^* = 0 \quad \text{für } (x_1, x_2) \in \Gamma_2, \quad (3.24)$$

bzw.

$$(h D_{jkpq} \tilde{v}_{p|q}^i)_{|j} + \frac{\partial g^i}{\partial v_k} - D_{jkpq} \left(\frac{\partial g^i}{\partial \sigma_{pq}} \right)_{|j} = 0 \quad \text{für } (x_1, x_2) \in \Omega \quad (3.25)$$

$$\tilde{v}_k^i = 0 \quad \text{für } (x_1, x_2) \in \Gamma_1, \quad (3.26)$$

$$\tilde{t}_k^i = D_{jkpq} \frac{\partial g^i}{\partial \sigma_{pq}} n_j \quad \text{für } (x_1, x_2) \in \Gamma_2. \quad (3.27)$$

Damit erhalten wir endgültig

$$\begin{aligned} \delta L &= \int_{\Omega} \left[(X_k \tilde{v}_k^* - D_{jkpq} v_{p|q} \tilde{v}_{k|i}^* + \frac{\partial f}{\partial h}) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_i (X_k \tilde{v}_k^i - D_{jkpq} v_{p|q} \tilde{v}_{k|i}^* + \frac{\partial g^i}{\partial h}) \right] \delta h d\Omega. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Hierbei bildet die eckige Klammer den Gradienten des Funktionals. Besitzt $f(v_k, h)$ die Form (2.18), so ist wegen

$$\frac{\partial f}{\partial v_k} = 0 \quad \text{der Zustand } v_k \text{ identisch null.}$$

Zusammenfassend stellen wir fest. Optimale Steuerprobleme der Kontinuumsmechanik sind dadurch gekennzeichnet, daß je nach der Wahl von Zielfunktion und Nebenbedingung weitere adjungierte Randwertaufgaben entstehen, die zusätzlich zur gegebenen Randwertaufgabe zu lösen sind. Bemerkenswert ist allerdings, daß sie den gleichen Differentialoperator besitzen. Damit brauchen bei der Lösung mit der Methode der finiten Elemente nur die rechte Seite des Gleichungssystems und die Randbedingungen verändert werden. Entsprechend der schrittweise erreichten Veränderung des Feldes der Steuerungen ist die Berechnung der Zustands- und Steuergrößen im Wechsel solange zu wiederholen, bis (im technischen Sinne) das Optimum gefunden ist.

4. Ergebnisse

Am Lehrgebiet Mathematik der Ingenieurhochschule Cottbus werden Steuerprobleme des vorgenannten Typs P_1 bis P_3 und weitergehende Fragestellungen bearbeitet. Für das Problem P_1 wurden für Balken mit Hohlkasten – bzw. Doppel – T – Querschnitt in [6] der Formverlauf bei minimaler Masse ermittelt und die Grenzen der erreichbaren Materialeinsparung bzw. Tragfähigkeitserhöhung angegeben. Sie betragen beim

beiderseits freidrehbar gelagerten	
Balken	16,6 bzw. 25 %
Kragträger	45,0 bzw. 66,7 %
eingespannt freidrehbar gelagerten	
Balken	23,7 bzw. 96 %

In Tabelle 1 sind für den beiderseits freidrehbar gelagerten Balken unter Gleichlast in Abhängigkeit von den Koordinaten z_1, z_2 der Umschaltpunkte angegeben

Betrag der oberen Schranke s_0 ,
Betrag der unteren Schranke s_u ,
relativer Materialverbrauch (bezogen auf den Balken mit konstantem Querschnitt).

Der Verlauf der Formfunktion $s(x)$ ist in Bild 1 skizziert. Die Ergebnisse sind insofern von Interesse, als sie deutlich machen, daß Schranken im Betrag nicht beliebig vorgegeben werden können.

Für das Problem P_2 liegt ein nachnutzbares EDV-Programm vor, mit dessen Hilfe sich die Dickenfelder von Platten beliebiger Randgeometrie, Belastung und Lagerung ermitteln lassen. Es basiert auf dem Programm P_4 ,

Tabelle 1 Betrag der oberen Schranke s_o Betrag der unteren Schranke s_u relativer Materialverbrauch

$Z_1 \cdot Z_2 \rightarrow$	0,0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
↓	1,0000	1,0088	1,0313	1,0625	1,0983	1,1354	1,1710	1,2025	1,2276	1,2441	1,2500
0,00	1,0000	0,9988	0,9901	0,9669	0,9226	0,8516	0,7494	0,6133	0,4419	0,2364	0,0000
	1,0000	0,9994	0,9956	0,9860	0,9694	0,9462	0,9181	0,8882	0,8609	0,8410	0,8333
0,05		1,0000	1,0223	1,0531	1,0886	1,1253	1,1605	1,1917	1,2165	1,2329	1,2366
		1,0000	0,9913	0,9680	0,9236	0,8525	0,7502	0,6139	0,4424	0,2366	0,0000
		1,0000	0,9961	0,9864	0,9698	0,9465	0,9183	0,8884	0,8610	0,8410	0,8333
0,10			1,0000	1,0299	1,0643	1,0999	1,1341	1,1643	1,1884	1,2042	1,2099
			1,0000	0,9763	0,9312	0,8593	0,7560	0,6185	0,4456	0,2383	0,0000
			1,0000	0,9899	0,9726	0,9487	0,9199	0,8894	0,8616	0,8413	0,8335
0,15				1,0000	1,0325	1,0664	1,0988	1,1274	1,1502	1,1652	1,1706
				1,0000	0,9531	0,8789	0,7728	0,6318	0,4550	0,2433	0,0000
				1,0000	0,9811	0,9554	0,9249	0,8928	0,8637	0,8426	0,8345
0,20					1,0000	1,0312	1,0611	1,0875	1,1086	1,1225	1,1274
					1,0000	0,9207	0,8084	0,6603	0,4751	0,2539	0,0000
					1,0000	0,9706	0,9364	0,9011	0,8693	0,8463	0,8375
0,25						1,0000	1,0267	1,0503	1,0691	1,0815	1,0859
						1,0000	0,8761	0,7142	0,5132	0,2740	0,0000
						1,0000	0,9591	0,9177	0,8809	0,8546	0,8446
0,30							1,0000	1,0201	1,0362	1,0468	1,0506
							1,0000	0,8129	0,5829	0,3108	0,0000
							1,0000	0,9479	0,9023	0,8701	0,8580
0,35								1,0000	1,0128	1,0212	1,0242
								1,0000	0,7149	0,3804	0,0000
								1,0000	0,9387	0,8957	0,8796
0,40									1,0000	1,0059	1,0081
									1,0000	0,5309	0,0000
									1,0000	0,9352	0,9110
0,45										1,0000	1,0011
										1,0000	0,0000
										1,0000	0,9520
0,50											1,0000
											1,0000
											1,0000

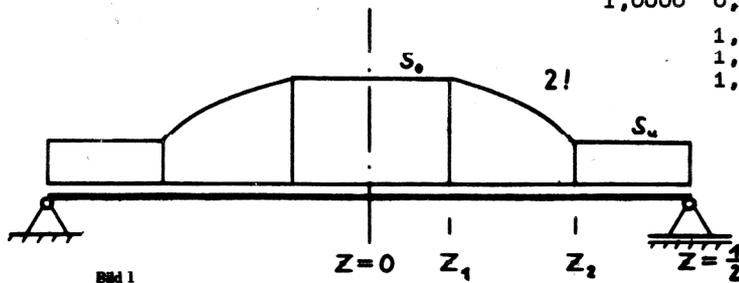


Bild 1 Verlauf der Formfunktion $s(z)$

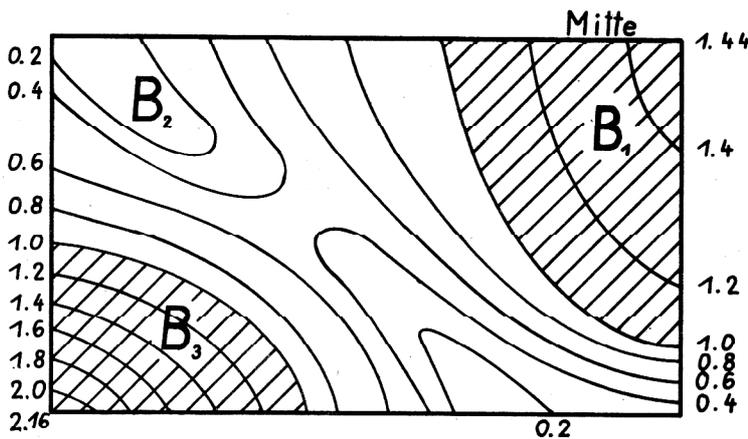


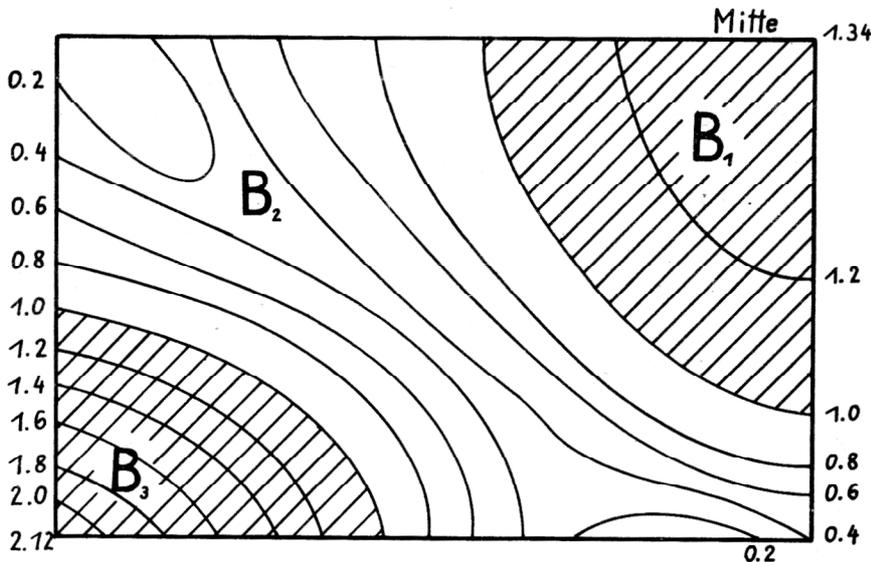
Bild 2 Verlauf der relativen Dicken für ein Viertel einer freiaufhängenden Platte mit dem Seitenverhältnis 30 : 20 : 1

das von der Bergakademie Freiberg übernommen wurde. In Testrechnungen an freiaufhängenden Rechteckplatten unter Gleichlast mit der relativen Dicke eins (Startdicke der Berechnung) wurden die Werte der nachfolgenden Tabelle gefunden.

rel. Seitenverhältnis der Platte zur rel. Ausgangsdicke	rel. Dicke in Plattenmitte	Material-einsparung	Erhöhung der Tragfähigkeit
20 x 20 x 1	1,17	18,2 %	36,9 %
25 x 15 x 1	1,44	20,7 %	107,4 %
30 x 20 x 1	1,34	18,9 %	79,6 %
40 x 20 x 1	1,40	16,7 %	96,0 %

Den typischen Dickenverlauf freiauflegender Platten minimaler Masse zeigen die Bilder 2 und 3. In den schraffierten Bereichen (B_1 und B_2) ist die relative Plattendicke größer als eins. Technologisch gesehen wäre es natürlich günstiger, in den Bereichen B_1 bis B_3 konstante Plattendicken zu haben. Das gibt zu der Fragestellung Anlaß, wie man (ausgehend etwa von den in Bild 2 bzw. 3 vorhandenen Informationen) dann den inneren Rand des Bereiches B_2 für eine unter diesen Bedingungen optimale Platte ermittelt. Diese Aufgabe fällt in die Klasse der Probleme mit variablem Rand. Weitergehende Untersuchungen dazu sind vorgesehen.

Bild 3
Verlauf der relativen Dicken für ein Viertel einer freiauflegenden Platte mit dem Seitenverhältnis 25 : 15 : 1



LITERATUR

- [1] Armand, J. L., Lodier, B.: Optimal design of bending elements. Int. Journal for Num. Meth. in Engineering, Vol. 13, 373 – 384 (1978).
- [2] Schlüssler, K. H.: Zur optimalen Steuerung mechanischer Eigenschaften in linearelastischen Kontinua. Wiss. Zeitschrift IH Cottbus, Heft 1 (1979).
- [3] Schlüssler, K. H.: Zur optimalen Steuerung in der Kontinuumsmechanik. Wiss. Zeitschrift, TH Leipzig, 5/1981 Heft 3, S. 153 – 158.
- [4] Schlüssler, K. H., Hopsch, R.: Erste Erfahrungen der optimalen Steuerung mit FEM-Programmen, Bericht des Weiterbildungsseminars FEM 3 1981 der TU Dresden in Gausig.
- [5] Chun, Y. W., Haug, E. J.: Two dimensional shape optimal design. Int. Journal for Num. Meth. in Engineering, Vol. 13, 311 – 336 (1978).
- [6] Schlüssler, K. H.: Balken mit optimaler Verteilung der Biegesteifigkeit. Wiss. Zeitschrift IH Cottbus, Heft 2 (1980).

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr. rer. nat. habil.
K. H. Schlüssler
Dipl.-Math. R. Hopsch
Ingenieurhochschule
7500 Cottbus
Karl-Marx-Straße 17