

Übergangsverhalten bei verschiedenen Drillkopplungen und tordierten dünnwandigen Stäben mit unterschiedlichen Querschnitten

Dieter Witt

1. Einleitung

Wlassow [1] untersuchte im Abschnitt „Durch Querbleche ausgesteifte dünnwandige Stäbe“ den Einfluß eines Querschotts auf das Verhalten eines dünnwandigen Sta-
bes (Bild 1.1.). Er fand, daß das Querblech einen Bimomentensprung bewirkt, der der lokalen Verwindung proportional ist:

$$B = \frac{G_Q h_Q^3 A_Q}{3} \varphi' = c_B \varphi'. \quad (1.1)$$

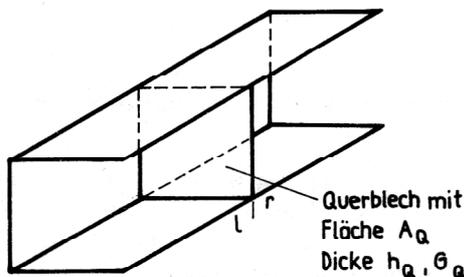


Bild 1.1.
Durch Querblech ausgesteifter Stab

Dieses Verhalten läßt sich als das einer wölbelastischen (Bimomenten-) Feder interpretieren [2], Bild 1.2., deren Federwert nur von den lokalen Größen des Querschotts abhängt. Sie wird bei durchlaufenden Torsionsberechnungen z. B. mit Hilfe von Übertragungsmatrizen genauso behandelt wie eine Querkraftfeder bei Biegebetrachtungen.

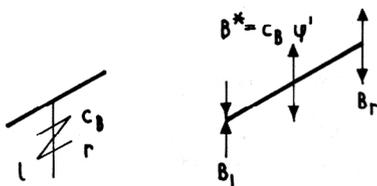


Bild 1.2.
Wirkungsweise des Querblechs

Die Herangehensweise im Kapitel „Durch Bindebleche verstärkte Stäbe“ [1] unterscheidet sich davon völlig. Es ist jeweils ein statisch unbestimmtes Problem zu lösen, um die Wirkung des Bindeblechs zu erfassen. Daher soll nun untersucht werden, ob bei Bindeblechen und in Er-

weiterung auch bei Koppelröhrchen eine ähnliche Behandlung wie beim Querblech möglich ist. Darüber hinaus werden Übergangsbedingungen bezüglich Verwindung und Bimoment für Kontaktstellen zwischen tordierten Stäben mit unterschiedlichen Querschnitten betrachtet.

2. Durch Bindebleche verstärkte Stäbe

In Bild 2.1. ist ein durch ein Bindeblech an der Koppelstelle K verstärkter dünnwandiger Stab dargestellt. Der Stab werde durch die Abmessungen a, b sowie die Wandstärke h und das Bindeblech durch die Abmessung b_B,

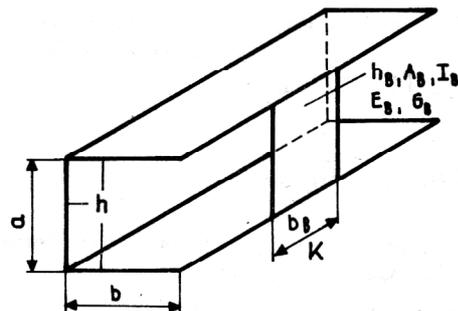


Bild 2.1.
Durch Bindeblech verstärkter Stab

die Wandstärke h_B sowie die Querschnittsfläche A_B, das Flächenträgheitsmoment I_B und die Werkstoffkenngrößen E_B, G_B charakterisiert. Zur Erfassung der Wirkung des Bindebleches wählen wir ein Hauptsystem, das durch Aufschneiden des Bindebleches in der Mitte mit den Schnittrufern oben (o) und unten (u) entsteht. Infolge der Antimetrie des Problems tritt an der Schnittstelle als Überzählige nur eine Querkraft X_1 auf (Bild 2.2.). Sie folgt aus der Beziehung [1]

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0. \quad (2.1)$$

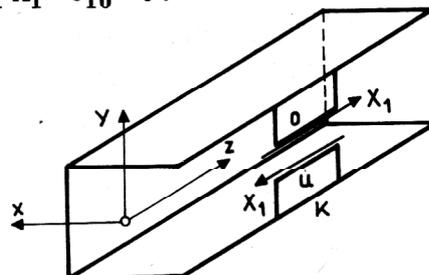


Bild 2.2.
Hauptsystem und Überzählige

δ_{10} ist die Belastungszahl für die Relativverschiebung in folge der äußeren Belastung:

$$\delta_{10} = -\varphi'_{K0} (\omega_o - \omega_u) = -\varphi'_{K0} 2ab.$$

Darin ist φ'_{K0} die Verwindung an der Koppelstelle K infolge der äußeren Belastung, während die Einheitsverwölbungswerte am oberen und unteren Schnittufer, ω_o , ω_u , dem Bild 2.3. entnommen wurden.

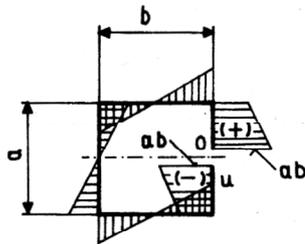


Bild 2.3.
Verwölbungsverlauf an der Koppelstelle

Die Vorzahl δ_{11} setzt sich aus 2 Bestandteilen zusammen:

$$\bar{\delta}_{11} = \bar{\delta}_{11} + \bar{\delta}_{11}.$$

$\bar{\delta}_{11}$ ist der Vorzahlanteil für die Relativverschiebung bei Berücksichtigung von Biegung und Querkraftschub im Bindeblech infolge der Einheitslast an der Stelle und in Richtung der Überzähligen X_1 :

$$\bar{\delta}_{11} = \frac{a^3}{12 E_B I_B} + \frac{\kappa_B a}{G_B A_B}. \quad (2.2)$$

Für die Schubformzahl κ_B gilt bei rechteckförmigem Bindeblechquerschnitt $\kappa_B = 1,2$. Im Stab entsteht infolge der Überzähligen X_1 an der Koppelstelle K ein Bimoment

$$B_1 = X_1 (\omega_o - \omega_u) = X_1 2ab, \quad (2.3)$$

das dort die Verwindung

$$\varphi'_{K1} = X_1 \varphi'_{11}$$

hervorrufen. Damit lautet der Vorzahlanteil des Stabes für die Relativverschiebung an der Schnittstelle des Bindeblechs infolge der Einheitslast an der Stelle und in Richtung der Überzähligen X_1

$$\bar{\delta}_{11} = -\varphi'_{11} (\omega_o - \omega_u) = -\varphi'_{11} 2ab.$$

Der Bimomentensprung an der Koppelstelle K infolge des Bindeblechs ergibt sich somit aus den Gln. (2.1), (2.3) zu

$$B_1 = -\frac{\delta_{10}}{\bar{\delta}_{11} + \bar{\delta}_{11}} 2ab, \quad (2.4)$$

der analog Bild 1.2 behandelt wird:

$$B_1 = c_B \cdot \varphi'_K. \quad (2.5)$$

Die Verwindung an der Koppelstelle setzt sich folgendermaßen zusammen:

$$\varphi'_K = \varphi'_{K0} + \varphi'_{K1} = -\frac{\bar{\delta}_{11}}{2ab} \frac{\delta_{10}}{\bar{\delta}_{11} + \bar{\delta}_{11}}.$$

Durch Einsetzen in Gl. (2.5) unter Berücksichtigung von (2.4) erhalten wir die wölbelastische Federkonstante für den Übergang über ein Bindeblech:

$$c_B = \frac{(2ab)^2}{\bar{\delta}_{11}}, \quad (2.6)$$

die völlig unabhängig von der konkreten Lagerung des Stabes sowie dem Ort der Anbringung des Bindeblechs ist und nur abhängt von den Querschnittsabmessungen des Stabes und den charakteristischen Werten des Bindeblechs. Mit Beachtung der Gl. (2.2) erhalten wir aus (2.6)

$$c_B = \frac{4 E_B h_B b_B a b^2}{(a/b_B)^2 + 2(1 + \nu) \kappa_B}. \quad (2.7)$$

ν ist die Querkontraktionszahl.

3. Durch Koppelröhrchen verstärkte Stäbe

Eine ähnliche Drillkopplung wie durch ein Bindeblech erreicht man auch durch ein z. B. eingeschweißtes Koppelröhrchen, das zur Vereinfachung der Betrachtungen in den Wölbnullpunkten des Stabprofils angebracht wird (Bild 3.1.). Der Stab werde durch die Abmessungen a, b

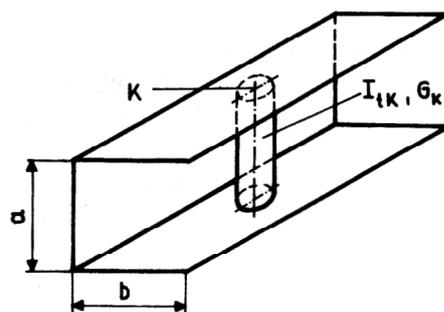


Bild 3.1.
Durch Koppelröhrchen verstärkter Stab

und das Koppelröhrchen durch das Torsionsträgheitsmoment I_{tK} und den Schubmodul G_K charakterisiert. Die Behandlung des Problems erfolgt analog zu dem im 2. Abschnitt beschriebenen. Das Hauptsystem entsteht durch Aufschneiden des Koppelröhrchens in der Mitte. Als Überzählige tritt das Torsionsmoment X_1 auf (Bild 3.2.), das entsprechend Gl. (2.1) bestimmt wird. Die Relativverformung an der Schnittstelle ist im vorliegenden Fall eine Relativverdrehung, die sich über die Verwindung an der Koppelstelle K berechnen lässt: $\varphi'_K \cdot a$. Die Überzählige X_1 bewirkt im Koppelröhrchen St. Venant'sche Torsion und im Stab ein Bimoment

$$B_1 = -X_1 \cdot a \quad (3.1)$$

Damit sind

$$\delta_{10} = \varphi'_{K0} a, \quad \bar{\delta}_{11} = a / (G_K I_{tK}), \quad \bar{\delta}_{11} = \varphi'_{11} a$$

$$B_1 = \frac{\delta_{10}}{\bar{\delta}_{11} + \bar{\delta}_{11}} a, \quad \varphi'_K = \varphi'_{K0} + \varphi'_{K1} = \frac{\bar{\delta}_{11}}{a} \frac{\delta_{10}}{\bar{\delta}_{11} + \bar{\delta}_{11}}$$

$$c_B = \frac{a^2}{\bar{\delta}_{11}} = a G_K I_{tK} \quad (3.2)$$

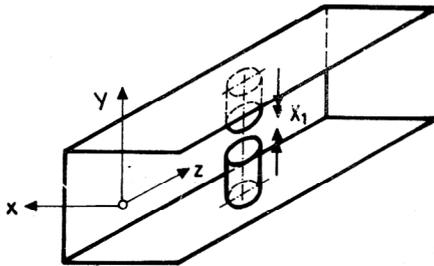


Bild 3.2.
Hauptsystem und Überzähliges

Auch hier ist zu konstatieren, daß die wölbelastische Federkonstante für die Wirkung des Koppelröhrchens unabhängig von der Lagerung des Stabes sowie der Stelle der Anbringung ist und nur von Werten des Koppelröhrchens abhängt.

Vergleicht man die Wirkung des Bindeblechs mit der des Koppelröhrchens bei gleicher Querschnittsfläche des Koppel-elementes, so ist die Drillkopplung des Bindeblechs um Größenordnungen effektiver.

4. Übergangverhalten bei tordierten dünnwandigen Stäben mit unterschiedlichen Querschnitten

Die Übergangsbedingungen für die Kontaktstellen tordierter Stäbe mit unterschiedlichen Querschnitten spielen für die durchlaufende Berechnung von Stabwerken eine wesentliche Rolle. In [2] wurden einige Betrachtungen dazu angestellt. Wir wollen jetzt Stäbe mit U- oder Kastenprofil betrachten, die die gleiche Höhe a und Wandstärke h besitzen und an den Stirnseiten aneinandergesetzt sind (Bild 4.1.). An der Kontaktstelle müssen die Verwölbungen links (l) und rechts (r) der verbundenen Stäbe in der Kontaktfläche A_K gleich sein:

$$v_{zr} = v_{zl} \quad (4.1)$$

Im unbehinderten Fall bilden sich folgende Verwölbungen aus:

$$v_{zl} = -\varphi'_1 \cdot \omega_1; \quad v_{zr} = -\varphi'_r \cdot \omega_r \quad (4.2)$$

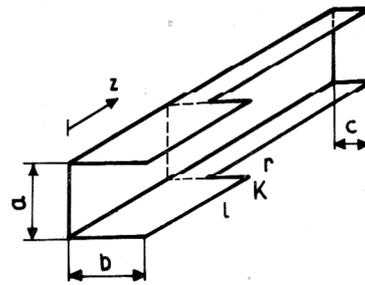


Bild 4.1.
Kontaktstelle zwischen unterschiedlichen Profilen

Die punktweise Erfüllung der Gl. (4.1) ist mit den Beziehungen (4.2) nicht möglich. Deshalb erfolgt in der Kontaktfläche eine Mittelung mit Hilfe des Fehlerquadratminimums:

$$\int_{A_K} (v_{zl} - v_{zr})^2 dA \Rightarrow \text{Min.}$$

Wir betrachten die Verwölbung links, v_{zl} , entsprechend Gl. (4.2) und die Einheitsverwölbung rechts, ω_r , als gegeben und wollen die Verwindung rechts, φ'_r , bestimmen:

$$\int_{A_K} (v_{zl} - v_{zr}) \frac{\partial v_{zr}}{\partial \varphi'_r} dA = 0$$

Daraus folgt

$$\varphi'_r = \varphi'_1 \int_{A_K} \omega_1 \omega_r dA / \int_{A_K} \omega_r^2 dA = \varphi'_1 \cdot F \quad (4.3)$$

Wir werden im folgenden für verschiedene Profilkombinationen den Faktor

$$F = \int_{A_K} \omega_1 \omega_r dA / \int_{A_K} \omega_r^2 dA \quad (4.4)$$

bestimmen [3].

Für den Übergang zwischen 2 verschiedenen U-Profilen entsprechend Bild 4.1., $c \leq b$, ergeben sich unter Benutzung der für das U-Profil bekannten Einheitsverwölbung (Sektorträgheitsmoment $I_{\omega} = \int_A \omega^2 dA$)

$$\int_{A_K} \omega_1 \omega_r dA = I_{\omega r}, \quad \int_{A_K} \omega_r^2 dA = I_{\omega r}$$

damit $F = 1$, d. h. $\varphi'_r = \varphi'_1$. Ist jedoch $c > b$, dann sind

$$\int_{A_K} \omega_1 \omega_r dA = I_{\omega l} = \frac{a^2 b^3 h}{12} \frac{2a + 3b}{a + 6b}$$

$$\int_{A_K} \omega_r^2 dA = \frac{a^2 b^3 h}{12}$$

$$\left[9 \left(\frac{c}{b} \right)^2 \frac{6 + a/b}{(6 + a/c)^2} - 18 \frac{c}{b} \frac{1}{6 + a/c} + 2 \right]$$

und somit $F < 1$, wobei die Abweichung von 1 mit steigendem Verhältnis c/b zunimmt. Diese Aussagen sind folgendermaßen zu werten:

$F = 1$ ist das sinnvolle Ergebnis der Näherung nach dem Fehlerquadratminimum, das selbstverständlich durch das sich am stärksten verwölbende Profil diktiert wird.

Für den Übergang zwischen einem U- und einem I-Profil nach Bild 4.2., $c \leq b$, ergibt sich bei Berücksichtigung der Einheitsverwölbung des I-Profiles $F = 1$. Ist $c > b$, so wird $F < 1$; für $b/c > 0,85$ kann $F \approx 1$ gesetzt werden.

Wir betrachten nun den Übergang zwischen einem Kasten- und einem U-Profil, wie in Bild 4.3. dargestellt. Für $c \leq b$ folgt bei Benutzung der für das Kastenprofil bekannten Einheitsverwölbung

$$F = \frac{-1 + a/b}{1 + a/b} \quad (4.5)$$

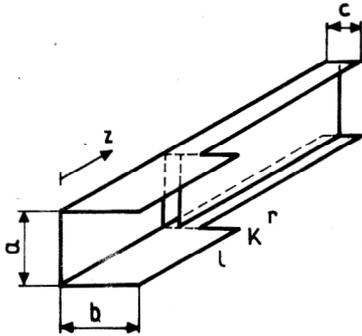


Bild 4.2.
Übergang zwischen U- und I-Profil

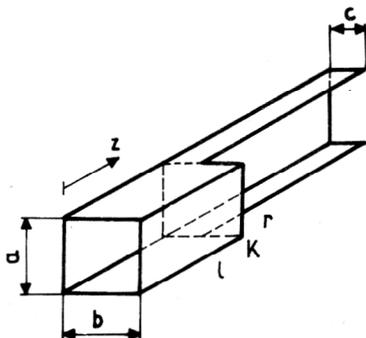


Bild 4.3.
Übergang zwischen Kasten- und U-Profil

Dieses Ergebnis hängt nur von den Abmessungen des Kastenprofils ab und berücksichtigt auch die verwölbungsverhindernde Wirkung des quadratischen Kastenprofils bezüglich der anschließenden Stäbe als Sonderfall.

Für den Fall $c > b$ kann im Bereich $b/c > 0,75$ näherungsweise mit dem Wert (4.5) gerechnet werden.

Die gleiche Aussage (4.5) gilt auch für den Übergang zwischen einem Kasten- und einem I-Profil, d. h. wenn in Bild 4.3. das U- durch ein I-Profil ersetzt wird.

Nachdem die Übergangsbedingung für die Verwindung φ' formuliert wurde, wenden wir uns nun der dazugehörigen Kraftgröße, dem Bimoment B , zu. Wir stellen uns das Kontaktgebiet links und rechts von der Kontaktstelle herausgeschnitten vor. Nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten gilt

$$\int_{A_r} \sigma_{\omega r} \delta v_{zr} dA = \int_{A_1} \sigma_{\omega 1} \delta v_{z1} dA.$$

Mit $\sigma_{\omega} = B\omega/I_{\omega}$, den Relationen (4.2) und dem Sektorträgheitsmoment $I_{\omega} = \int_A \omega^2 dA$ folgt daraus

$$B_r \delta \varphi'_r = B_1 \delta \varphi'_1. \quad (4.6)$$

Berücksichtigen wir Gl. (4.3), dann erhalten wir

$$B_r = B_1 \cdot \frac{1}{F}. \quad (4.7)$$

Damit sind die Übergangsbedingungen für Kontaktstellen zwischen tordierten Stäben mit unterschiedlichen Querschnitten fixiert und können für durchlaufende Rechnungen benutzt werden.

LITERATUR

- [1] Wlassow, W. S.: Dünnwandige elastische Stäbe. Bd. 1, VEB Verlag für Bauwesen Berlin, 1964.
- [2] Witt, D.: Berechnung von Rahmen aus dünnwandigen Profilen. Maschinenbautechnik 26 (1977) 11, S. 514 – 517, 524.
- [3] Jahn, G.: Untersuchung des Übertragungsverhaltens bei verschiedenen Drillkopplungen und tordierten dünnwandigen Stäben mit unterschiedlichen Querschnitten. Diplomarbeit 1981 (unveröffentlicht). TU Dresden, Sektion 13.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. sc. techn. D. Witt
Technische Universität
Sektion Grundlagen des
Maschinenwesens
8027 Dresden
Mommensenstraße 13